Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Giuseppe Zwirner

Su una particolare classe di equazioni alle derivate parziali del quarto ordine sopra una superficie chiusa

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 17 (1948), p. 139-159

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1948__17__139_0>

SU UNA PARTICOLARE CLASSE DI EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI DEL QUARTO ORDINE SOPRA UNA SUPERFICIE CHIUSA.

Memoria (*) di Giuseppe Zwirner (*a Padova*)

Precisato il concetto generale di equazione lineare alle derivate parziali sopra una superficie topologicamente definita, il Cimmino ha esteso (1) alle equazioni di tipo ellittico del secondo ordine sopra una superficie chiusa, un metodo ideato da Caccioppoli (2) per provare i teoremi di esistenza degli integrali abeliani sulle superficie di Riemann chiuse, e da tale estensione ha dedotto i teoremi esistenziali, su una superficie chiusa, delle soluzioni dell'equazione lineare di tipo ellittico del secondo ordine.

In questo ordine di idee si può o studiare un particolare tipo di equazione invariante rispetto a un dato gruppo di trasformazioni delle variabili (nel caso di Caccioppoli il gruppo delle trasformazioni conformi), o studiare le equazioni di tipo generale invarianti rispetto al gruppo di tutte le trasformazioni regolari delle variabili (come nel caso considerato dal Cimmino).

E nei problemi concreti trattati da Caccioppoli e da Cimmino è stato in ogni caso sfruttato in modo essenziale il fatto che i primi membri di quelle equazioni si potevano considerare come densità, relative ad una certa funzione additiva sulla superficie.

(*) Pervenuta in Redazione il 20 Luglio 1947.

(1) G. Cimmino: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa* [Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, serie II, vol. VII (1938), pp. 73-96].

(2) R. Caccioppoli: *Sui teoremi d'esistenza di Riemann* [Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche, serie IV, vol. IV, (1934), pp. 49-54].

Per esempio: sia S una superficie topologicamente definita e dotata di una metrica angolare, introdotta nell'intorno di ogni punto mercè la variabile complessa locale, che fornisce di tale intorno una rappresentazione piana conforme, e consideriamo su S l'equazione

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f.$$

Ora, se $\varphi(x, y)$ è una funzione continua su S assieme alle sue derivate parziali dei due primi ordini, l'espressione $\Delta\varphi$, relativa ad un punto P di S e alla variabile locale $x + iy$, è una densità, cioè dipende dalla variabile complessa locale adottata in P ma in maniera tale che il suo integrale indefinito, come funzione d'insieme, risulta indipendente da quella variabile, sicchè può pensarsi come rappresentante una distribuzione di masse sulla superficie, considerata intrinsecamente. Precisamente nel passaggio dalla variabile complessa $x + iy$ all'altra $x' + iy'$ l'espressione $\Delta\varphi$ si trasforma mediante moltiplicazione per

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')} = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y'}\right)^2.$$

Sono stato allora condotto a studiare sopra una superficie chiusa una classe di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali del tipo:

$$\text{I)} \qquad L(u) = \Delta\frac{\Delta u}{\alpha} + \beta u = g,$$

ove α e β indicano delle densità, la prima delle quali sempre positiva, di guisa che l'espressione $L(u)$ si comporta anch'essa come una densità.

Per estendere il metodo di Caccioppoli - Cimmino all'equazione (I) ho dovuto in modo analogo a quanto ha fatto il Cimmino per le equazioni del secondo ordine, stabilire dapprima una proprietà integrale per le soluzioni dell'equazione I), la quale costituisce una naturale estensione della proprietà espressa dal teorema della media per le funzioni biarmoniche (3). Provo poi che tale proprietà di media è una proprietà caratteristica, nel senso che una funzione u, che verifichi quella proprietà in tutto un campo, coincide, a meno eventualmente dei punti di un insieme di misura nulla, con una soluzione dell'equazione (I), anche quando si suppone soltanto la u sommabile con una sua potenza con esponente maggiore di 2.

Estendo poi all'equazione considerata il teorema fondamentale stabilito da CIMMINO per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico, e da tale estensione deduco il teorema dell'alternativa.

È da rilevare, per esempio, che il caso da me considerato rientra nel punto di vista, diciamo, di CACCIOPPOLI. Si pone quindi naturalmente la questione di vedere se si possa trasportare il punto di vista di CIMMINO anche alle equazioni lineari alle derivate parziali del quarto ordine.

E del resto è chiaro che le considerazioni svolte mettono in evidenza che il metodo di CACCIOPPOLI - CIMMINO si presta allo studio di classi di equazioni lineari più generali di quella da me considerata.

1. – Sia S una superficie chiusa topologicamente definita e dotata di una metrica angolare, introdotta nell'intorno di ogni punto mercè la variabile complessa locale, che fornisce di tale intorno una rappresentazione piana conforme (4).

Nella superficie chiusa S fissiamo una particolare triangolazione abbastanza serrata perchè uno qualunque I_k, dei triangoli $I_1, I_2, \ldots, I_n$, si rappresenti conformemente, mediante una variabile complessa locale, su un campo C_k del piano x, y (5). Si

(3) Cfr. MIRON NICOLESCU: *Les fonctions polyarmoniques* [Hermann, Parigi (1936), fasc. IV], pp. 8-9.

(4) Cfr. H. WEYL: *Die Idee der Riemannschen Fläche* Leipzig, Teubuer (1923), pp. 16-25].

(5) Intendiamo qui sempre riferirci a rappresentazioni conformi includenti i contorni, cioè prolungabili oltre questi.

verrà così a stabilire una corrispondenza biunivoca e bicontinua fra i punti P di ciascun I_k e i punti di un dato insieme aperto A del piano x, y.

Fissata una rappresentazione conforme T di S, diremo che un insieme di punti E di S è *misurabile* quando ad esso corrisponde in T un insieme misurabile di A.

Ad ogni funzione $\varphi(P)$ assegnata su S corrispondono, mediante T, delle funzioni $\varphi_k(x, y)$ definite in A. Diremo che la $\varphi(P)$ è *continua* (è dotata di *derivate parziali*) in un punto P di S se tale risulta la $\varphi_k(x, y)$ nel punto (x, y) corrispondente a P. La $\varphi(P)$ si dirà *sommabile* su S se tali risultano le $\varphi_k(x, y)$ ad essa corrispondenti nella rappresentazione conforme considerata. È da osservarsi come questa nozione, e così pure le precedenti, non dipende, evidentemente, dalla rappresentazione conforme adottata per S.

Porremo inoltre per definizione

$$\iint_{S(T)} \varphi(P)\, dP = \sum_{1}^{n}{}_k \iint_{C_k} \varphi_k(x, y)\, dx\, dy.$$

Sia ora $F(E)$ una funzione additiva degli insiemi misurabili E di S. La $F(E)$ si dirà *assolutamente continua* su S, se, per ogni successione di insiemi misurabili E, per cui tenda a zero la misura (presa rispetto a T, e quindi anche la misura presa rispetto a qualsiasi altra variabile complessa locale adottata in P), riesce $\lim F(E) = 0$. Alla $F(E)$ corrisponderanno delle funzioni additive assolutamente continue $F_k(E)$ in A. Le derivate di queste sono delle funzioni $\delta_k(x, y)$ sommabili in A. Le funzioni $\delta_k(x, y)$ verranno nel seguito indicate con l'unica lettera δ, e si dirà che δ è la *densità* della $F(E)$ relativa alla variabile complessa locale adottata in P.

La densità di $F(E)$ dipende dal punto P considerato su S nonchè dalla variabile complessa locale adottata in P; precisamente la densità $\delta'(x', y')$ di $F(E)$ relativa al punto P e alla variabile complessa locale $x' + iy'$ si otterrà da quella $\delta(x, y)$ relativa a P e alla variabile complessa locale $x + iy$, mediante la relazione

$$\delta'(x', y') = \delta(x, y) \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')} .$$

Osserviamo inoltre che se $\varphi(P)$ è una funzione assegnata su S, avente derivate parziali dei primi quattro ordini continue, e α, β sono delle densità, la prima delle quali sempre positiva e dotata di derivate seconde continue, l'espressione $L(\varphi) = \Delta \frac{\Delta\varphi}{\alpha} + \beta\varphi$, relativa al punto P e alla variabile locale $x + iy$, può considerarsi come una densità relativa ad una certa funzione additiva sulla superficie.

Premesso ciò, consideriamo ora, indicando con p un numero > 2, la totalità delle funzioni d'insieme $F(E)$ con densità di potenza $\frac{p}{p-1}$ sommabili su S. Lo spazio funzionale costituito da queste $F(E)$ è naturalmente indipendente dalla rappresentazione conforme prescelta per S. Fissiamo in essa una metrica, definendo come distanza di due funzioni $F_1(E)$, $F_2(E)$, di densità rispettivamente $\delta_1(P)$, $\delta_2(P)$, la

$$\left\| F_1(E) - F_2(E) \right\| = \left[\iint_{S(T)} (\delta_1(P) - \delta_2(P))^{\frac{p}{p-1}} d\,P \right]^{\frac{p-1}{p}} .$$

Definiremo poi la relazione di limite

$$\lim_{n \to \infty} F_n(E) = F(E)$$

mediante l'altra

$$\lim_{n \to \infty} \left\| F(E) - F_n(E) \right\| = 0$$

È chiaro che il limite di una successione di funzioni dello spazio funzionale che consideriamo è ancora una funzione del medesimo spazio, sicchè questo è uno spazio lineare metrico completo. Lo indicheremo con $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$.

Consideriamo poi l'insieme di tutte le funzioni $u(P)$ continue su S, assieme alle loro derivate parziali dei primi tre ordini e aventi le derivate terze lipschitziane, e diciamo Σ^* quel sottospazio di $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$ che si ottiene associando ad ogni funzione $u(P)$ la funzione $F(E)$ che ha per densità $L(u)$.

Indicheremo infine con $\overline{\Sigma}^*$ il sottospazio formato da tutte le funzioni di Σ^* e da tutte le funzioni limiti, nel senso specificato, di funzioni appartenenti a Σ^* ([6]).

2. – Fissata una rappresentazione conforme T di S e una funzione $f(P)$ di p–ma potenza sommabile su S, consideriamo il funzionale lineare definito in $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$ da

$$\iint_S f\,dF = \iint_S f(P)\,\delta(P)\,dP, \tag{1}$$

dove $\delta(P)$ indica la densità di $F(E)$. Esso non dipende, evidentemente, dalla particolare rappresentazione conforme adottata per S.

Premesso ciò, dimostriamo il seguente:

Teorema. – *Se il funzionale lineare* (1) *definito in* $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$, *è zero per tutte le* $F(E)$ *di* Σ^*, *la* $f(P)$ *potrà differire soltanto al più nei punti di un insieme di misura nulla da una soluzione* v *dell'equazione:*

$$L(v) = \Delta\frac{\Delta v}{\alpha} + \beta v = 0\,.$$

Stabiliremo il teorema enunciato provando che, nelle ipotesi dette, la $f(P)$ deve verificare, quasi ovunque, una certa proprietà integrale analoga a quella di media per le funzioni biarmoniche, e facendo poi vedere che questa proprietà è caratteristica per le soluzioni dell'equazione $L(v) = 0$.

Vedremo poi (n. 5) come da ciò si possa dedurre il teorema dell'alternativa per l'equazione I).

([6]) Per tutte queste definizioni e ipotesi fondamentali rimando il lettore al lavoro citato di Cimmino, nn. 1–3.

Detto (x_0, y_0) il punto di A corrispondente, in T, ad un punto P di S, poniamo

$$(2) \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$$

e sia poi r un numero positivo abbastanza piccolo, affinchè il cerchio rappresentato dall'equazione (2) per $\rho = r$, sia contenuto in A. Detto poi ν un intero positivo arbitrario, definiamo entro il detto cerchio la funzione $u^{(\nu)}(x, y) = v^{(\nu)}(x, y) + w^{(\nu)}(x, y)$, ponendo:

$$(3) \qquad v^{(\nu)}(x, y) = g^{(\nu)}(\rho) = \int_\rho^r \frac{dt}{t}\int_0^t \tau\, d\tau \int_\tau^r \left[\left(\frac{2\sigma^2}{r^2}-1\right)^{2\nu+1}+1\right]\frac{d\sigma}{\sigma}$$

e

$$(4) \qquad w^{(\nu)}(x, y) = G^{(\nu)}(\rho) = a(\rho^2-r^2)+b(\rho^2-r^2)^2+c(\rho^2-r^2)^3$$

dove i coefficienti a, b, c devono intendersi determinati in modo che risultino verificate le condizioni al contorno:

$$(5) \qquad \begin{cases} G_\rho^{(\nu)}(r) = -g_\rho^{(\nu)}(r), \\ G_{\rho\rho}^{(\nu)}(r) = -g_{\rho\rho}^{(\nu)}(r), \\ G_{\rho\rho\rho}^{(\nu)}(r) = -g_{\rho\rho\rho}^{(\nu)}(r)\ (^7). \end{cases}$$

Estendiamo poi la definizione della funzione $u^{(\nu)}(x, y)$ all'intera superficie S, ponendola zero in tutti i rimanenti punti di S. Con ciò si otterrà, evidentemente, una funzione $u^{(\nu)}(P)$ continua su S, assieme alle sue derivate parziali dei primi tre ordini e avente le derivate terze lipschitziane.

(7) Osserviamo esplicitamente che la funzione introdotta mediante le (3) e (4) è un polinomio nelle variabili x, y.

Dovrà allora, in particolare, essere

$$(6) \qquad \iint_S f(P)\, L(u^{(\nu)}(P))\, dP = \iint_{C_0} f(x, y)\, L\,(u^{(\nu)}(x, y))\, dx\, dy = 0\,,$$

ove C_0 indica il cerchio $0 \leq \rho \leq r$.

Vogliamo ora passare al limite nella (6) per $\nu \to \infty$.

A tale scopo osserviamo, innanzi tutto, che dalla (3) si deduce

$$\Delta g^{(\nu)} = -\int_\rho^r \left[\left(\frac{2\,\sigma^2}{r^2} - 1\right)^{2\nu+1} + 1\right] \frac{d\sigma}{\sigma}\,.$$

Operando ora il cambiamento di variabili

$$(7) \qquad \begin{cases} x - x_0 = \rho \cos \varphi \\ y - y_0 = \rho \operatorname{sen} \varphi \end{cases} \qquad 0 \leq \rho \leq r\,,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\,,$$

e ricordando che si ha

$$\Delta \frac{\Delta g^{(\nu)}}{\alpha} = \left(\frac{\Delta g^{(\nu)}}{\alpha}\right)_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\Delta g^{(\nu)}}{\alpha}\right)_\rho + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\Delta g^{(\nu)}}{\alpha}\right)_{\varphi\varphi},$$

facilmente si deduce

$$L(g^{(\nu)}) = \frac{2}{\rho}\left[\left(\frac{2\rho^2}{r^2} - 1\right)^{2\nu+1} + 1\right] \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\alpha}\right) -$$

$$-\int_\rho^r \left[\left(\frac{2\sigma^2}{r^2} - 1\right)^{2\nu+1} + 1\right] \frac{d\sigma}{\sigma} \cdot \Delta \frac{1}{\alpha} + \frac{4\,(2\nu+1)}{\alpha\, r^2}\left(\frac{2\rho^2}{r^2} - 1\right)^{2\nu} +$$

$$+\beta \int_\rho^r \frac{dt}{t} \int_0^t \tau\, d\tau \int_\tau^r \left[\left(\frac{2\,\sigma^2}{r^2} - 1\right)^{2\nu+1} + 1\right] \frac{d\sigma}{\sigma}$$

e quindi

$$(8)\quad \lim_{\nu\to\infty}\iint_{C_0} f\,L(v^{(\nu)})\,dx\,dy = \int_0^r\int_0^{2\pi} f\cdot\left\{\frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\alpha}\right) - lg\frac{r}{\rho}\cdot\Delta\frac{1}{\alpha} + \right.$$

$$\left. + \beta\left[\frac{r^2-\rho^2}{4} - \frac{\rho^2}{4}lg\frac{r}{\rho}\right]\right\}\rho\,d\rho\,d\varphi +$$

$$+ \lim_{\nu\to\infty}\frac{4(2\nu+1)}{r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{f}{\alpha}\left(\frac{2\rho^2}{r^2}-1\right)^{2\nu}\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

purchè esista il limite al secondo membro. Ora con un ragionamento perfettamente analogo a quello fatto da Cimmino nel lavoro citato [8] si prova che, fatta eccezione al più per i punti (x_0, y_0) di un insieme di misura nulla su A e per i valori di r di un insieme di misura nulla su un intervallo $0 \leq r \leq r_0$, con r_0 opportunamente limitato, il limite a secondo membro della (8) esiste ed è dato da

$$2\pi\frac{f(x_0, y_0)}{\alpha(x_0, y_0)} + \int_0^{2\pi}\left[\frac{f}{\alpha}\right]_{\rho=r} d\varphi .$$

Abbiamo quindi:

$$(9)\quad \lim_{\nu\to\infty}\iint_{C_0} f\cdot L(v^{(\nu)})\,dx\,dy = \int_0^r\int_0^{2\pi} f\cdot\left\{\frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\alpha}\right) - lg\frac{r}{\rho}\cdot\Delta\frac{1}{\alpha} + \right.$$

$$\left. + \beta\left[\frac{r^2-\rho^2}{4} - \frac{\rho^2}{4}lg\frac{r}{\rho}\right]\right\}\rho\,d\rho\,d\varphi + 2\pi\frac{f(x_0, y_0)}{\alpha(x_0, y_0)} + \int_0^{2\pi}\left[\frac{f}{\alpha}\right]_{\rho=r} d\varphi .$$

Dovendo il polinomio $G^{(\nu)}(\rho)$, dato dalla (4), verificare le condizioni (5), posto

$$A^{(\nu)} = \int_0^r \tau\,d\tau\int_\tau^r\left[\left(\frac{2\sigma^2}{r^2}-1\right)^{2\nu+1} + 1\right]\frac{d\sigma}{\sigma},$$

[8] pp. 81–82.

sarà

$$G^{(\nu)}(\rho)=\frac{A^{(\nu)}}{2\,r^2}(\rho^2-r^2)-\frac{A^{(\nu)}}{4\,r^4}(\rho^2-r^2)^2+\left(\frac{A^{(\nu)}}{6\,r^6}-\frac{1}{24\,r^4}\right)(\rho^2-r^2)^3.$$

Si riconosce inoltre facilmente che risulta

$$L\,(G^{(\nu)}(\rho))=\Delta\,G^{(\nu)}\cdot\Delta\,\frac{1}{\alpha}+2\left[-\frac{8\,A^{(\nu)}}{r^4}\,\rho+\right.$$

$$\left.+96\left(\frac{A^{(\nu)}}{6\,r^6}-\frac{1}{24\,r^4}\right)\rho\,(\rho^2-r^2)+48\left(\frac{A^{(\nu)}}{6\,r^6}-\frac{1}{24\,r^4}\right)\rho^3\right]\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\alpha}\right)+$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left[-\frac{16\,A^{(\nu)}}{r^4}+192\left(\frac{A^{(\nu)}}{6\,r^6}-\frac{1}{24\,r^4}\right)(\rho^2-r^2)+\right.$$

$$\left.+384\left(\frac{A^{(\nu)}}{6\,r^6}-\frac{1}{24\,r^4}\right)\rho^2\right]+\beta\left[\frac{A^{(\nu)}}{2\,r^2}(\rho^2-r^2)-\frac{A^{(\nu)}}{4\,r^4}(\rho^2-r^2)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{A^{(\nu)}}{6\,r^6}-\frac{1}{24\,r^4}\right)(\rho^2-r^2)^3\right]$$

e

$$\lim_{\nu\to\infty}\quad A^{(\nu)}=\frac{r^2}{4}\,;$$

e quindi

$$\lim_{\nu\to\infty}\iint_{C_0}f\cdot L\,(w^{(\nu)})\,dx\,dy=\int_0^r\int_0^{2\pi}f\cdot\left[\frac{r^2-\rho^2}{r^2}\,\Delta\,\frac{1}{\alpha}-\right.$$

(10)

$$\left.-\frac{4\rho}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{4}{\alpha r^3}+\beta\,\frac{3\,r^2-\rho^2}{16\,r^2}\,(\rho^2-r^2)\right]\rho d\,\rho d\,\varphi\,.$$

Sommando ora membro a membro le (9), (10), ricordando che per le ipotesi fatte la somma dei primi membri vale zero, in definitiva si ottiene:

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
\frac{f(x_0, y_0)}{\alpha(x_0, y_0)} = {} & \frac{2}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} \frac{f}{\alpha}\,\rho d\rho d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{f}{\alpha}\right]_{\rho=r} d\varphi - \\
& - \frac{1}{2\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} f\cdot\left\{\left[r^2 - \rho^2 - r^2 lg\,\frac{r}{\rho}\right]\rho\,\Delta\,\frac{1}{\alpha} + (2r^2 - \right. \\
& \left. - 4\rho^2)\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right\} d\rho\,d\varphi - \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} f\left(\frac{r^4 - \rho^4}{8} - \right. \\
& \left. - \frac{r^2\rho^2}{2}\,lg\,\frac{r}{\rho}\right)\beta\rho\,d\rho\,d\varphi\,.
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi che, *nelle ipotesi fatte, la f verifica quasi ovunque in A la proprietà integrale* (11) *per r quasi ovunque nell'intervallo $0 \leq r \leq r_0$*.

Se fosse $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ la (11) si muta nella formula che esprime la proprietà di media delle funzioni biarmoniche.

3. - Determiniamo ora una proprietà di media per le soluzioni dell'equazione

$$
(12)\qquad L(u) = g\,.
$$

A tale scopo sostituiamo, nella formula di GREEN [9]

$$
\iint_D (u\,\Delta\,v - v\,\Delta\,u)\,dx\,dy = -\int_{FD}\left(u\,\frac{dv}{dn} - v\,\frac{du}{dn}\right)ds\,,
$$

dapprima u con $\frac{\Delta u}{\alpha}$ e poi v con $\frac{\Delta v}{\alpha}$ e sommiamo poi membro a membro. Otteniamo:

[9] Cfr. CIMMINO: *Sul problema generalizzato di Dirichlet per l'equazione di Poisson* [Rend. Sem. Mat dell' Università di Padova, vol. XI (1940), pp. 28-89], pp. 33 nota ([13]) e pag. 44.

$$\iint_D \left(u\Delta\frac{\Delta v}{\alpha} - v\Delta\frac{\Delta u}{\alpha}\right) dx\,dy = -\int_{FD}\left(u\frac{d}{dn}\frac{\Delta v}{\alpha} - \frac{\Delta v}{\alpha}\frac{du}{dn} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta u}{\alpha}\frac{dv}{dn} - v\frac{d}{dn}\frac{\Delta u}{\alpha}\right) ds$$

ed essendo

$$\iint_D [uL(v) - vL(u)]\,dx\,dy = \iint_D \left(u\,\Delta\frac{\Delta v}{\alpha} - v\,\Delta\frac{\Delta u}{\alpha}\right) dx\,dy$$

in definitiva si ha:

$$(13)\qquad \iint_D [uL(v) - vL(u)]\,dx\,dy = -\int_{FD}\left(u\frac{d}{dn}\frac{\Delta v}{\alpha} - \frac{\Delta v}{\alpha}\frac{du}{dn} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta u}{\alpha}\frac{dv}{dn} - v\frac{d}{dn}\frac{\Delta u}{\alpha}\right) ds\,.$$

Consideriamo ora una funzione $u(x, y)$ continua su S, assieme alle sue derivate parziali dei primi tre ordini e avente le derivate parziali terze lipschitziane, che sia soluzione dell'equazione (12) e applichiamo la formula (13) ponendo

$$v = \frac{r^4 - \rho^4}{8} - \frac{r^2\rho^2}{2}\,lg\,\frac{r}{\rho}$$

e supponendo che D sia la corona circolare definita da $\varepsilon \leq \rho \leq r$, dove ρ è la quantità (2), e passiamo infine al limite per $\varepsilon \to 0$. Avendosi:

$$\frac{dv}{dn} = \frac{\rho^3}{2} + r^2\rho\,lg\,\frac{r}{\rho} - \frac{r^2\rho}{2}\,,$$

$$\frac{\Delta v}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\left(2r^2 - 2\rho^2 - 2r^2\,lg\,\frac{r}{\rho}\right),$$

$$\frac{d}{dn}\frac{\Delta v}{\alpha} = \left(2r^2\,lg\,\frac{r}{\rho} + 2\rho^2 - 2r^2\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{4\rho^2 - 2r^2}{\rho\alpha}\,,$$

$$L(v)=\left(2r^2-2\rho^2-2r^2\,lg\frac{r}{\rho}\right)\Delta\frac{1}{\alpha}+$$

$$+2\frac{2r^2-2\rho^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{8}{\alpha}+\beta\left(\frac{r^4-\rho^4}{8}-\frac{r^2\rho^2}{2}lg\frac{r}{\rho}\right),$$

è facile riconoscere che si perviene alla formula seguente:

$$\begin{aligned}
&\frac{u(x_0,y_0)}{\alpha(x_0,y_0)}=\frac{2}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{u}{\alpha}\rho\,d\rho\,d\varphi-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{u}{\alpha}\right]_{\rho=r}d\varphi-\\
&-\frac{1}{2\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi}u\left[\left(r^2-\rho^2-r^2\,lg\frac{r}{\rho}\right)\rho\,\Delta\frac{1}{\alpha}+\right.\\
(14)\quad&\left.+(2r^2-4\rho^2)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]d\rho\,d\varphi-\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4-\rho^4}{8}-\right.\\
&\left.-\frac{r^2\rho^2}{2}lg\frac{r}{\rho}\right)(\beta u-g)\rho\,d\rho\,d\varphi,
\end{aligned}$$

la quale per $g=0$ non è altro che la (11) con u al posto di f.

Per questa ragione e per quanto si è osservato alla fine del numero precedente, chiameremo la (14) *la proprietà di media per le soluzioni dell'equazione* $L(u)=g$.

Supponiamo ora che la densità α sia continua su S assieme alle sue derivate parziali dei primi quattro ordini e che la funzione $u(x, y)$, con le derivate parziali dei primi quattro ordini continue su S, verifichi la proprietà di media (14) per tutti i valori di r sufficientemente prossimi a zero. Vogliamo allora dimostrare che la funzione $u(x, y)$ è una soluzione dell'equazione $L(u)=g$.

A tale scopo, dopo di aver moltiplicato la (14) per r^2, deriviamola rispetto a r e poi dividiamo il risultato così ottenuto per r. Avremo:

$$2\frac{u(x_0, y_0)}{\alpha(x_0, y_0)} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{u}{\alpha} + \frac{r}{2}\left(\frac{u}{\alpha}\right)_\rho - r\left(\frac{1}{\alpha}\right)_\rho u\right]_{\rho=r} d\varphi +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}\left[u\frac{1-2\,lg\frac{r}{\rho}}{2}\rho\Delta\frac{1}{\alpha} + 2\left(\frac{1}{\alpha}\right)_\rho u\right]d\rho\, d\varphi +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2-\rho^2}{2} - \rho^2\, lg\frac{r}{\rho}\right)(\beta u - g)\,\rho\, d\rho\, d\varphi = 0\,.$$

Derivando quest' ultima espressione successivamente due volte rispetto a r, si ha

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r}{2}\left(\frac{u}{\alpha}\right)_{\rho\rho\rho} - r\left(\frac{1}{\alpha}\right)_{\rho\rho\rho}\cdot u - 2r\left(\frac{1}{\alpha}\right)_{\rho\rho}\cdot u_\rho - r\left(\frac{1}{\alpha}\right)_\rho\cdot u_{\rho\rho} +\right.$$

$$\left.+\frac{r}{2}u_\rho\cdot\Delta\frac{1}{\alpha} + \frac{r}{2}u\left(\Delta\frac{1}{\alpha}\right)_\rho - \frac{1}{2}u\cdot\Delta\frac{1}{\alpha}\right]_{\rho=r} d\varphi +$$

$$+\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} u\,\Delta\frac{1}{\alpha}\,\rho d\rho d\varphi - \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi}(r^2-\rho^2)(\beta u - g)\rho d\rho d\varphi +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}(\beta u - g)\,\rho\, d\rho\, d\varphi = 0$$

da cui dividendo tutti i termini per r e poi derivando il risultato così ottenuto nuovamente rispetto a r, si ottiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\left(\frac{1}{\alpha}\right)_{\rho\rho\rho\rho}\cdot u - 2\left(\frac{1}{\alpha}\right)_{\rho\rho\rho}\cdot u_\rho + 2\left(\frac{1}{\alpha}\right)_\rho\cdot u_{\rho\rho\rho} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha}\cdot u_{\rho\rho\rho\rho} + u_{\rho\rho}\cdot\Delta\frac{1}{\alpha} + 2u_\rho\cdot\left(\Delta\frac{1}{\alpha}\right)_\rho + u\left(\Delta\frac{1}{\alpha}\right)_{\rho\rho}\right]_{\rho=r} d\varphi +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\left[3r^2u\,\Delta\frac{1}{\alpha}-r^3u\left(\Delta\frac{1}{\alpha}\right)_\rho-r^3u_\rho\cdot\Delta\frac{1}{\alpha}\right]_{\rho=r}d\varphi-6\int_0^r\int_0^{2\pi}u\Delta\frac{1}{\alpha}\cdot\rho d\rho d\varphi}{r^4}+$$

$$+\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{\displaystyle\int_0^r\int_0^{2\pi}(r^2-\rho^2)(\beta u-g)\,\rho d\rho d\varphi}{r^4}-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\displaystyle\int_0^r\int_0^{2\pi}(\beta u-g)\,\rho d\rho d\varphi}{r^2}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\beta u-g]_{\rho=r}d\varphi=0\,.$$

Di qui passando al limite per $r\to 0$, ricordando le (7) in base alle quali sono da calcolarsi le derivate rispetto a ρ, otteniamo:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Bigg[-\left\{\left(\frac{1}{\alpha}\right)_x\cos\varphi+\left(\frac{1}{\alpha}\right)_y\operatorname{sen}\varphi\right\}^{(4)}\cdot u-2\left\{\left(\frac{1}{\alpha}\right)_x\cos\varphi+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\alpha}\right)_y\operatorname{sen}\varphi\right\}^{(3)}\left\{u_x\cos\varphi+u_y\operatorname{sen}\varphi\right\}+2\left\{\left(\frac{1}{\alpha}\right)_x\cos\varphi+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\alpha}\right)_y\operatorname{sen}\varphi\right\}\left\{u_x\cos\varphi+u_y\operatorname{sen}\varphi\right\}^{(3)}+\frac{1}{\alpha}\left\{u_x\cos\varphi+u_y\operatorname{sen}\varphi\right\}^{(4)}+$$

$$+\frac{3}{4}\left\{u_x\cos\varphi+u_y\operatorname{sen}\varphi\right\}^{(2)}\Delta\frac{1}{\alpha}+\frac{3}{2}\left\{\left(\Delta\frac{1}{\alpha}\right)_x\cos\varphi+\right.$$

$$\left.+\left(\Delta\frac{1}{\alpha}\right)_y\operatorname{sen}\varphi\right\}\left\{u_x\cos\varphi+u_y\operatorname{sen}\varphi\right\}+$$

$$+\frac{3}{4}\left\{\left(\Delta\frac{1}{\alpha}\right)_x\cos\varphi+\left(\Delta\frac{1}{\alpha}\right)_y\operatorname{sen}\varphi\right\}^{(2)}u\Bigg]_{\rho=0}d\varphi+\frac{3}{8}(\beta u-g)_{x_0,y_0}=0,$$

ossia:

$$\Big\{-\Delta\Delta\frac{1}{\alpha}\cdot u-2\left[\left(\Delta\frac{1}{\alpha}\right)_x\cdot u_x+\left(\Delta\frac{1}{\alpha}\right)_y\cdot u_y-\left(\frac{1}{\alpha}\right)_x\cdot(\Delta u)_x-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{\alpha}\right)_y\cdot(\Delta u)_y\right]+\frac{1}{\alpha}\Delta\Delta u+\Delta u\cdot\Delta\frac{1}{\alpha}+\Delta\Delta\frac{1}{\alpha}\cdot u+$$

$$+2u_x\left(\Delta\frac{1}{\alpha}\right)_x+2u_y\left(\Delta\frac{1}{\alpha}\right)_y+\beta u-g\Big\}_{x_0,y_0}=0$$

od anche:

$$(15)\quad \Big\{2\left(\frac{1}{\alpha}\right)_x\cdot(\Delta u)_x+2\left(\frac{1}{\alpha}\right)_y\cdot(\Delta u)_y+\frac{1}{\alpha}\Delta\Delta u+\Delta u\cdot\Delta\frac{1}{\alpha}+$$

$$+\beta u-g\Big\}_{x_0,y_0}=0\,.$$

Ricordando ora la relazione:

$$\Delta(\lambda.\mu)=\lambda\Delta\mu+\mu\Delta\lambda+2\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial x}+2\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial y}$$

e posto in tale formula

$$\lambda=\frac{1}{\alpha}\,,\ \mu=\Delta u$$

si ottiene

$$\Delta\frac{\Delta u}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\Delta\Delta u+\Delta u\cdot\Delta\frac{1}{\alpha}+2\left(\frac{1}{\alpha}\right)_x\cdot\left(\Delta u\right)_x+2\left(\frac{1}{\alpha}\right)_y\cdot\left(\Delta u\right)_y.$$

Di qui e dalla (15) si deduce:

$$[L(u)-g]_{x_0,y_0}=0$$

il che prova la nostra affermazione.

Ci sarà utile trasformare la (14) in un'altra formula dove figurano soltanto integrali doppi. A tale scopo moltiplichiamone ambo i membri per r^3 e poi integriamo rispetto a r fra 0 e r e dividiamo poi per $\frac{r^4}{4}$. Otteniamo così:

$$(16)\quad \begin{aligned}\frac{u(x_0, y_0)}{\alpha(x_0, y_0)} = \frac{1}{\pi r^4}\int_0^r\int_0^{2\pi}\Big[4r^2\rho - 6\rho^3 - \Big(\frac{5r^4+3\rho^4}{8} - r^2\rho^2 -\\ -\frac{r^4}{2}\,lg\frac{r}{\rho}\Big)\rho\alpha\Delta\frac{1}{\alpha} + \Big(\frac{r^4\rho^2}{8}\,lg\frac{r}{\rho} + \frac{r^2\rho^4}{16} - \frac{r^4\rho^2}{32} - \frac{2r^6+\rho^6}{96}\Big)\alpha\beta\rho +\\ + (4r^2\rho^2 - r^4 - 3\rho^4)\,\alpha\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\frac{1}{\alpha}\Big)\Big]\frac{u}{\alpha}\,d\rho\,d\varphi + \frac{1}{\pi r^4}\int_0^r\int_0^{2\pi}\Big(\frac{2r^6+\rho^6}{96} +\\ + \frac{r^4\rho^2}{32} - \frac{r^2\rho^4}{16} - \frac{r^4\rho^2}{8}\,lg\frac{r}{\rho}\Big)\rho g\,d\rho\,d\varphi\end{aligned}$$

che si può anche scrivere, indicando con P_0 e Q i punti x_0, y_0 e x, y

$$(17)\quad \frac{u(P_0)}{\alpha(P_0)} = \iint_{C_0} K(P_0, Q)\frac{u(Q)}{\alpha(Q)}\,dQ + \iint_{C_0} G(P_0, Q)\,g(Q)\,dQ,$$

dove

$$\begin{aligned}K(P_0, Q) = \frac{1}{\pi r^4}\Big[4r^2 - 6\rho^2 - \Big(\frac{5r^4+3\rho^4}{8} - r^2\rho^2 - \frac{r^4}{2}\,lg\frac{r}{\rho}\Big)\alpha\Delta\frac{1}{\alpha} +\\ + \frac{\alpha}{\rho}(4r^2\rho^2 - r^4 - 3\rho^4)\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\frac{1}{\alpha}\Big) + \Big(\frac{r^4\rho^2}{8}\,lg\frac{r}{\rho} +\\ + \frac{r^2\rho^4}{16} - \frac{r^4\rho^2}{32} - \frac{2r^6+\rho^6}{96}\Big)\alpha\beta\Big],\end{aligned}$$

$$G(P_0, Q) = \frac{1}{\pi r^4}\Big(\frac{2r^6+\rho^6}{96} + \frac{r^4\rho^2}{32} - \frac{r^2\rho^4}{16} - \frac{r^4\rho^2}{8}\,lg\frac{r}{\rho}\Big)$$

essendo sempre ρ^2 la quantità data dalla (2).

4. – D'ora innanzi faremo l'ipotesi che i coefficienti di $L(u)$ ed il secondo membro dell'equazione non omogenea $L(u) = g$, siano dotati di derivate dei primi quattro ordini continue in A [10].

[10] Avvertiamo peraltro che tale ipotesi è sovrabbondante per la dimostrazione della proprietà che abbiamo in vista ma è assai utile al fine di una maggiore rapidità di esposizione.

Supporremo poi che $u(x, y)$ sia una funzione di p-*ma* potenza sommabile su S e che verifichi quasi ovunque la (16) per r quasi ovunque in un intervallo $0 \leq r \leq r_0$, con r_0 sufficientemente prossimo a zero.

In tali ipotesi si prova che, tranne al più nei punti di un insieme di misura nulla, la $u(x, y)$ è dotata di derivate parziali dei primi quattro ordini continue su S e perciò, in base a quanto abbiamo visto alla fine del numero precedente, essa sarà, a prescindere dagli insiemi di misura nulla, una soluzione dell'equazione $L(u) = g$.

Infatti si osservi, intanto, che nelle ipotesi fatte la funzione $K(P_0, Q)$ è una funzione dotata in A di derivate dei primi quattro ordini continue, per $P_0 \neq Q$, sia rispetto alle coordinate di P_0 sia rispetto a quelle di Q.

Esisterà inoltre una costante positiva M tale che per ogni coppia di punti P_0, P_1 contenuti in un dominio $B < A$, sia

$$
(18) \quad |K(P_0, P_1)| < M \cdot \overline{P_0P_1}^{-1}, \; |DK(P_0, P_1)| < M \cdot \overline{P_0P_1}^{-2},
$$
$$
|D^2K(P_0, P_1)| < M \cdot \overline{P_0P_1}^{-3}, \; |D^3K(P_0, P_1)| < M \cdot \overline{P_0P_1}^{-4},
$$
$$
|D^4K(P_0, P_1)| < M \cdot \overline{P_0P_1}^{-5}
$$

dove coi simboli D, D^2, D^3, D^4 si indicano derivazioni del primo, secondo, terzo e quarto ordine rispetto a P_0, secondo una direzione o direzioni arbitrarie.

Osserviamo ancora che il secondo integrale di (16), sempre per le ipotesi fatte, è una funzione dotata di derivate dei primi quattro ordini continue e la stessa cosa si può affermare per l'$\iint_{C_0} K(P_0, Q)\, dQ$, come facilmente si riconosce ponendo nella (17) in luogo di $\frac{u}{\alpha}$ la costante 1.

Premesso ciò, in base ad una nota disuguaglianza e dal fatto che $K(P_0, Q)$ soddisfa alla prima delle (18) e che u è di p-*ma* potenza sommabile con $p > 2$, dalla (17) segue che u è limitata.

Arrivati a questo punto basta riprendere i ragionamenti fatti da Cimmino nel lavoro più volte ricordato [11], per provare la nostra affermazione.

[11] pp. 84-87.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

Se i coefficienti di $L(u)$ *e la densità* g *sono dotati di derivate parziali dei primi quattro ordini continue, ogni funzione* $u(P)$ *supposta soltanto di* p*—ma potenza sommabile, con* $p > 2$, *che verifichi la proprietà di media* (14) *per tutti gli* r *sufficientemente prossimi a zero, sarà pure dotata di derivate dei primi quattro ordini continue e verificherà l'equazione* $L(u) = g$.

Resta con ciò completamente dimostrato il teorema enunciato nel n. 2.

Osserviamo inoltre esplicitamente che dal teorema del n. 2, in base a noti teoremi di analisi funzionale lineare, segue che se l'equazione $L(v) = 0$ è priva di soluzioni diverse dallo zero, lo spazio Σ^* è completo in $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$, cioè $\overline{\Sigma}^*$ coincide con $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$. Nel caso contrario, $\overline{\Sigma}^*$ si compone di tutte le funzioni F di $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$ che riescono ortogonali alle soluzioni non nulle v di $L(v) = 0$, cioè che verificano la $\iint_S v\, dF = 0$.

5. - Dimostriamo ora il teorema dell'alternativa per le soluzioni dell'equazione $L(u) = g$.

Teorema – *Se l'equazione* $L(v) = 0$ *non ammette soluzioni diverse da zero su* S, *l'equazione* $L(u) = g$ *ammette soluzioni, qualunque sia la densità* g, *con derivate parziali dei primi quattro ordini continue; se la* $L(v) = 0$ *ammette soluzioni diverse da zero, fra queste ve ne sarà un numero finito di linearmente indipendenti* $v_1, v_2, \ldots, v_s$, *e l'equazione* $L(u) = g$ *ammetterà soluzioni quando, e solo quando,* g *è ortogonale a* $v_1, v_2, \ldots, v_s$ *su* S.

Cominciamo ad esaminare la prima alternativa; supponiamo cioè che la $L(v) = 0$ non abbia soluzioni diverse da zero su S. Allora in base a quanto abbiamo osservato alla fine del numero precedente, lo spazio $\overline{\Sigma}^*$ coincide con $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$. Perciò qualunque sia la funzione F di $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$ si può trovare una successione di funzioni F_k di Σ^* che ha per limite, nel senso specificato nel n. 1, la F.

Sia g la densità di F e δ_k quella di F_k. Per la definizione stessa di Σ^* ad ogni F_k corrisponderà una funzione u_k continua su S, assieme alle sue derivate parziali dei primi tre ordini e avente le derivate parziali terze lipschitziane, per cui $L(u_k) = \delta_k$ e quindi:

$$(19) \quad \frac{u_k(P_0)}{\alpha(P_0)} = \iint_{C_0} K(P_0, Q) \frac{u_k(Q)}{\alpha(Q)} dQ + \iint_{C_0} G(P_0 Q)\, \delta_k(Q) dQ.$$

Supponendo dapprima che le u_k siano equilimitate su S, dalla (19) e nell'ipotesi del teorema su g, con un ragionamento del tutto analogo a quello svolto da Cimmino nel n. 7 del suo lavoro citato in (1), si prova che le u_k sono uniformemente continue e perciò dalla successione delle u_k se ne potrà estrarre una sottosuccessione uniformemente convergente verso una funzione limite $u(P)$, la quale verificherà l'equazione

$$\frac{u(P_0)}{\alpha(P_0)} = \iint_{C_0} K(P_0, Q) \frac{u(Q)}{\alpha(Q)} dQ + \iint_{C_0} G(P_0, Q)\, g(Q)\, dQ,$$

limite della (19).

Di qui e dal teorema precedente, segue che $u(P)$ è una soluzione dell'equazione $L(u) = g$.

Supponiamo ora, se possibile, che le u_k non siano equilimitate. Detto allora M_k il massimo modulo di u_k su S potremo sempre supporre, sostituendo ove occorra alla successione delle u_k una sua sottosuccessione,

$$\lim_{k \to \infty} M_k = \infty.$$

Le funzioni $\frac{u_k}{M_k}$ hanno tutte per massimo modulo su S la unità; esse sono perciò equilimitate e soddisfacendo a una equazione che si ottiene dalla (19) dividendone tutti i termini per M_k, si potrà da tale successione, per quanto abbiamo visto precedentemente, estrarne un'altra convergente uniformemente verso una funzione limite $\bar{u}(P)$ che dovrà verificare l'equazione

$$\frac{\bar{u}(P_0)}{\alpha(P_0)} = \iint_{C_0} K(P_0, Q) \frac{\bar{u}(Q)}{\alpha(Q)} dQ$$

che si ottiene passando al limite per $k \to \infty$ nella (19), dopo averne diviso tutti i termini per M_k.

Ma allora la $\bar{u}(P)$, per il teorema del numero precedente, è una soluzione, evidentemente non nulla, dell'equazione $L(v) = 0$, il che nelle nostre ipotesi non può essere.

Dunque il caso che le u_k non siano equilimitate non può presentarsi quando l'equazione $L(v) = 0$ non ammette soluzioni diverse da zero su S.

Consideriamo ora la seconda alternativa: supponiamo cioè che l'equazione $L(v) = 0$ ammetta soluzioni diverse da zero su S.

Innanzi tutto si prova, con ragionamenti noti (12) che fra tali soluzioni ve ne può essere soltanto un numero finito v_1, $v_2, \ldots, v_s$ di linearmente indipendenti. Inoltre, dalla formula (13) applicata all'intera superficie S segue che l'equazione $L(u) = g$ può ammettere soluzioni soltanto se g è ortogonale alle v_1, $v_2, \ldots, v_s$.

D'altra parte, per quanto abbiamo osservato alle fine del numero precedente, lo spazio $\bar{\Sigma}^*$ è formato da tutte le funzioni F di $'\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$ con densità $g(P)$ ortogonale a $v_1, v_2, \ldots, v_s$.

Ciò posto, con ragionamenti analoghi a quelli svolti a proposito della prima alternativa (13), si viene a dimostrare l'esistenza di soluzioni per l'equazione $L(u) = g$, nell'ipotesi che g sia continua assieme alle sue derivate parziali dei primi quattro ordini.

(12) Cfr. loc. cit. in (1). pag. 90.

(13) Si veda il ragionamento svolto da Cimmino a pag. 90-91 del lavoro citato in (1).