RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

EDMONDO MORGANTINI

Sulle equazioni in sei variabili rappresentabili con un nomogramma a punti allineati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 17 (1948), p. 115-138

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1948__17__115_0>

SULLE EQUAZIONI IN SEI VARIABILI RAPPRESENTABILI CON UN NOMOGRAMMA A PUNTI ALLINEATI

Memoria (*) *di* EDMONDO MORGANTINI (*a Padova*).

SUNTO: Alla considerazione del nomogramma a punti allineati di una equazione in sei variabili $F(t_1, \ldots, t_6) = 0$ si associa quella della corrispondenza trilineare allineata fra tre piani sovrapposti. Si determina il procedimento adatto per la riduzione a forma canonica della relativa forma trilineare ternaria. Ne risultano le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un'equazione nomograficamente trilineare nelle coppie $t_1 t_2$, $t_3 t_4$, $t_5 t_6$ e di rango due rispetto a ciascuna di esse si possa rappresentare con un nomogramma a punti allineati, ed il procedimento adatto per costruire il nomogramma stesso.

Si studiano poi le condizioni necessarie e sufficienti per la linearità nomografica propria e ristretta di rango due della funzione F rispetto ad una coppia di variabili e quelle necessarie e sufficienti per la trilinearità propria e ristretta di rango due di F. In definitiva si ottengono delle condizioni sufficienti affinchè l'equazione $F = 0$ si possa rappresentare con un nomogramma a punti allineati.

(*) Pervenuta in Redazione il 7 Marzo 1947.

INTRODUZIONE

1. – Consideriamo nel campo complesso un'equazione in 6 variabili $t_1, \dots, t_6$:

$$F(t_1, \dots, t_6) = 0 \tag{1.1}$$

e le sue soluzioni contenute nell'intorno di una di esse $\bar{t} = (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_6)$.

Supponiamo che i punti x, y, z di tre regioni $[x]$, $[y]$, $[z]$ di un piano π (pensato come luogo di punti reali ed immaginari) si possano porre in corrispondenza biunivoca e continua con gli intorni di $(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$, $(\bar{t}_3, \bar{t}_4)$, $(\bar{t}_5, \bar{t}_6)$, in modo che ad ognuna di quelle soluzioni della (1.1) corrisponda una terna di punti alli-

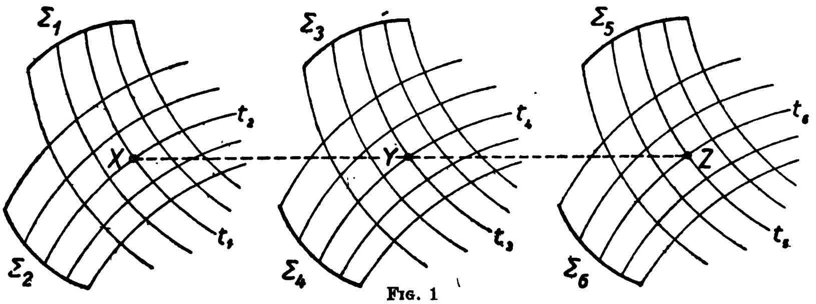

FIG. 1

neati $x(t_1, t_2)$, $y(t_3, t_4)$, $z(t_5, t_6)$. Inoltre, i punti $\bar{x} = x(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$, $\bar{y} = y(\bar{t}_3, \bar{t}_4)$, $\bar{z} = z(\bar{t}_5, \bar{t}_6)$ siano reali. Infine in ciascuna di quelle regioni, ad es. $[x]$, il luogo dei punti *reali* nei quali è costante una delle variabili, ad es. t_1, sia una linea (*linea di livello*) generalmente dotata di tangente, variabile con continuità.

Allora si dice che nell'intorno di $\bar{t}$ la (1.1) è rappresentabile con un *nomogramma a punti allineati* (1). Per *costruire* il

(1) Cfr. ad es. M. D'Ocagne: «*Esquisse d'ensemble de la Nomographie*» (Paris, Gauthier-Villars, 1925). Per più ampii ragguagli bibliografici cfr. E. Morgantini: «*Teoria dei nomogrammi a punti allineati ed a scale*

nomogramma basta disegnare in quel piano un certo numero di linee di livello e segnare a fianco di esse le relative *quote* t_i $(i = 1, \ldots, 6)$.

Il nomogramma così costruito serve a determinare *graficamente* quelle soluzioni $(t_1 \ldots . t_6)$ della (1.1) contenute nell'intorno di $\bar{t}$ per le quali i punti corrispondenti x, y, z sono reali. Ad es., dati i valori di $t_1, \ldots, t_5$ e costruita la retta congiungente i punti $x(t_1, t_2)$ ed $y(t_3, t_4)$, per determinare t_6 basta leggere la quota omonima del punto $z(t_3, t_6)$ in cui la retta xy incontra la linea di livello di quota t_5 (fig. 1).

2. – La corrispondenza indotta tra le regioni $[x]$ $[y]$ $[z]$ dalla rappresentazione nomografica della (1.1) individua fra i tre piani sovrapposti omonimi una *trilinearità allineata* (2), alla quale viceversa si può pensare subordinata.

Ad ogni punto (di ognuna di quelle regioni, e quindi) di ciascuno dei tre piani corrisponde infatti omograficamente una reciprocità singolare fra gli altri due, cioè una proiettività non singolare tra due fasci di rette. I loro centri corrispondono fra loro e col punto considerato in una collineazione – nella fattispecie l'identità – alla quale la proiettività precedente è subordinata.

rettilinee, dal punto di vista delle corrispondenze plurilineari tra forme di prima specie » (Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Vol. XVI) ; « *Teoria dei nomogrammi a punti allineati con due scale rettilinee o sovrapposte ad una stessa conica* » (Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni, Roma, 1948).

In seguito indicheremo questi lavori rispettivamente con le sigle (I) e (II).

(2) I fondamenti di una *teoria generale delle plurilinearità tra spazi lineari* sono stati posti da F. Severi nel 1938 e pubblicati nel volume: « *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche* » (Lezioni raccolte da F. Conforto ed E. Martinelli, Roma, Cremonese, 1942), Cap. V, n. 88.

Quei concetti sono stati ripresi e precisati da A. Comessatti che, nella memoria « *Sulle plurilinearità tra spazî* » (Memorie della R. Accademia d'Italia, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Vol. XIV (1943), estratto n. 3) ha dato fra l'altro una classificazione delle trilinearità tra piani, basata sull'esame delle loro « *tracce* ». In essa il Lettore può trovare riferimento alle ricerche precedenti.

Conviene aggiungere che la subclassificazione delle trilinearità che il Comessatti chiama di tipo I, di fronte alle trasformazioni lineari non singo-

Pertanto, introdotti nei tre piani $[x]$ $[y]$ $[z]$ tre sistemi di coordinate proiettive omogenee di punto $x_0 : x_1 : x_2$ $y_0 : y_1 : y_2$ $z_0 : z_1 : z_2$, la (1.1) si può rappresentare con un nomogramma a punti allineati allora e solo che si possono determinare le funzioni:

ρ, σ, τ di $t_1, \ldots, t_6$, non identicamente nulle in un intorno di $\bar{t}$;

$f_i(t_1, t_2)$, $\varphi_i(t_3, t_4)$, $\psi_i(t_5, t_6)$ $(i = 0, 1, 2)$, uniformi, derivabili e con derivate continue nell'intorno di $\bar{t}$, dove assumono valori reali; in modo tale che, posto:

$$x_i = \rho\, f_i(t_1, t_2) \;,\; y_i = \sigma\, \varphi_i(t_3, t_4) \;,\; z_i = \tau\, \psi_i(t_5, t_6) \,, \tag{2.1}$$

la corrispondenza che nasce per la (1.1) e le (1.2) tra gli intorni di:

$$\bar{x} = x(\bar{t}_1, \bar{t}_2)\,, \qquad \bar{y} = y(\bar{t}_3, \bar{t}_4)\,, \qquad \bar{z} = z(\bar{t}_5, \bar{t}_6)\,,$$

sia (quella indotta da) una trilinearità allineata.

3. - Le (2.1) sono le equazioni parametriche dei *sistemi quotati* $(t_1\, t_2)$, $(t_3\, t_4)$, $(t_5\, t_6)$, ognuno dei quali è costituito da due sistemi ∞^1 di linee di livello Σ_i ($t_i =$ *costante*; $i = 1,2$; $3,4$; $5,6$). Si suppone che le (2.1) siano tali che la corrispondenza tra le curve di Σ_i ed i valori di t_i sia - in un intorno di $\bar{t}_i$ - biunivoca e continua.

lari operanti su ciascun delle tre serie di variabili, è stata data con metodo geometrico da R. M. Thrall e J. H. Chanler nella memoria « *Ternary trilinear forms in the field of complex numbers* » (Duke Math. Journal, vol. 4 (1938), p. 679) e perfezionata con i metodi algebrici da J. H. Chanler in « *The invariant theory of the ternary trilinear form* » (Duke Math. Journal, vol. 5 (1939), p. 552). La bibliografia di questi due lavori completa quella fornita dal Comessatti.

Cfr. anche la memoria (I) di E. Morgantini, già citata.

La trilinearità allineata tra piani sovrapposti è un sottotipo « nucleato » del tipo I del Comessatti (loco cit., p. 34) e figura nell'ultimo quadretto a sinistra in basso della tabella riassuntiva a pag. 689 del citato lavoro di Thrall e Chanler.

In casi particolari le condizioni imposte alle funzioni (2.1) nel n. 2 possono per ciò risultare superflue. Così ad es. se le linee di livello del sistema quotato $(t_1\, t_2)$ sono rette, come quando:

$$f_i\,(t_1\, t_2) = \Sigma\, a_{rs}^{(i)}\, g_r\,(t_1)\, h_s\,(t_2) \qquad (r,s = 1,2\,;\; i = 0, 1, 2),$$

è sufficiente che le funzioni $g_r(t_1)$, $h_s(t_2)$ $(r, s = 1, 2)$ siano continue ed univocamente invertibili entro opportuni intorni di $\overline{t_1}$, $\overline{t_2}$.

Supporremo anche che - nell'intorno di $\overline{t}$ - non si annullino identicamente i determinanti funzionali:

$$(3.1) \qquad |\, f_0\, f_1\, f_2 \,|_{12}\,, \qquad |\, \varphi_0\, \varphi_1\, \varphi \,|_{34}\,, \qquad |\, \psi_0\, \psi_1\, \psi_2 \,|_{56}\;,$$

dove ad es.:

$$|\, f_0\, f_1\, f_2 \,|_{12} = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \\ \dfrac{\partial f_0}{\partial t_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial t_1} \\ \dfrac{\partial f_0}{\partial t_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial t_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial t_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{00} & f_{10} & f_{20} \\ f_{01} & f_{11} & f_{21} \\ f_{02} & f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} = |\, f_{ih} \,| \quad (i,h = 0, 1, 2).$$

Altrimenti, se ad es. $|\, f_0\, f_1\, f_2 \,|_{12} \equiv 0$, il sistema quotato $(t_1\, t_2)$ si riduce ad una linea γ_{12} *a punti condensati,* ad ogni punto della quale corrispondono infiniti valori di t_1 e di t_2. Cosicchè, introdotfo su γ_{12} un parametro τ, il nomogramma si riduce ad interpretare una equazione in 5 variabili τ, t_3, t_4, t_5 t_6.

Nel caso che tutti e 3 i determinanti funzionali (3.1) si annullino identicamente e le relazioni che conseguono dalla (1.1) e dalle (2.1) tra i parametri τ, τ', τ'' delle tre linee a punti condensati e le variabili $t_1 t_2$, $t_3 t_4$, $t_5 t_6$ si possano interpretare con altrettanti nomogrammi a punti allineati, si ottiene per la (1.1) una rappresentazione **n o m o g r a f i c a c o m p o s t a**, del tipo della fig. 2.

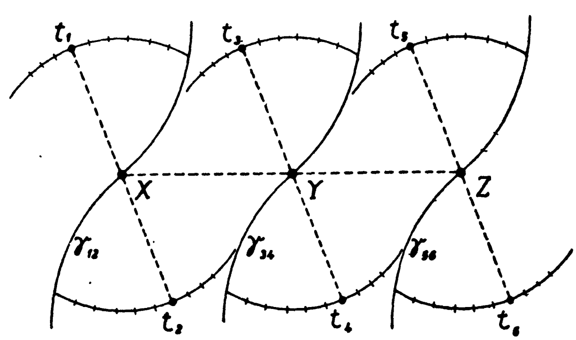

Fig. 2

4. - Quando si ha identicamente in un certo intorno di $\overline{t}$:

$$
\begin{aligned}
(4.1) \qquad & K(t_1, \dots, t_6)\, F(t_1, \dots, t_6) = \\
& = f_0(t_1)\, \Phi_0(t_2, \dots, t_6) + \dots + f_p(t_1)\, \Phi_p(t_1, \dots, t_6)\,,
\end{aligned}
$$

dove la funzione K non si annulla nell'intorno di $\overline{t}$ e le funzioni f_i e Φ_i sono uniformi e continue, diremo che la funzione F (o l'equazione (1.1)) è *nomograficamente lineare* (3) rispetto alla variabile t_1. Se poi le f_i $(i = 0, \dots, p)$ sono linearmente indipendenti, diremo che p è il *rango* della funzione F rispetto a t_1.

La linearità nomografica sarà *propria* se K è una costante (non nulla). Se poi le funzioni f_i e Φ_i si suppongono derivabili finchè occorre, la linearità nomografica si dirà anche *ristretta.*

Analogamente, se in un intorno di $\overline{t}$ si ha identicamente:

$$
\begin{aligned}
(4.2) \qquad & K(t_1, \dots, t_6)\, F(t_1, \dots, t_0) = \\
& = f_0(t_1, t_2)\, \Phi_0(t_3, \dots, t_6) + \dots + f_p(t_1, t_2)\, \Phi_p(t_3, \dots, t_6)\,,
\end{aligned}
$$

diremo che F è nomograficamente lineare *rispetto alla coppia* di variabili t_1, t_2. E come sopra se ne definirà il *rango* e si preciserà l'eventualità che la linearità nomografica sia *propria* ed addirittura anche *ristretta.*

5. – Se nel sostegno comune ai tre piani $[x]$, $[y]$, $[z]$ si introduce un unico sistema di coordinate proiettive omogenee e si dicono rispettivamente $x_0 : x_1 : x_2$, $y_0 : y_1 : y_2$, $z_0 : z_1 : z_2$ le coordinate di x, y, z, l'equazione della trilinearità allineata assume la forma canonica:

(3) R. Soreau (cfr. ad es. il citato «*Esquisse.....*» del D'Ocagne, pag. 116) usa nella stessa accezione la frase *nomograficamente razionale,* che mi pare meno appropriata. Cosi preferisco chiamare *rango* quello che egli chiama *ordine.*

$$(5\ 1) \qquad |x\,y\,z| \equiv \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

come vuole la condizione d'allineamento di tre punti.

Perciò, come è noto ([4]), condizione necessaria e sufficiente perchè le soluzioni della (1.1) contenute in un intorno di $\bar{t}$ si possano rappresentare con un nomogramma a punti allineati è che si abbia identicamente in quell'intorno, per tramite delle (2.1):

$$(5.2) \qquad KF(t_1, \ldots, t_6) = |\,x\ y\ z\,|\,,$$

essendo $K \neq 0$ in quell'intorno.

La (5.2) impone in particolare alla F di essere nomograficamente trilineare in senso ristretto rispetto alle 3 coppie di variabili t_1, t_2; t_3, t_4; t_5, t_6, e di rango 2 rispetto a ciascuna di esse.

Trascurando il fattore K, la forma più generale di una equazione il cui primo membro sia una funzione siffatta, è:

$$(5.3) \qquad \Sigma\, d_{ikl}\, f_i(t_1, t_2)\ \varphi_k(t_3, t_4)\ \psi_l(t_5, t_6) = 0 \qquad (i\ k,\ l,\ = 0,\ 1,\ 2),$$

dove le d_{ikl} sono costanti, e per le funzioni «*componenti*» f, φ, ψ supponiamo che valgano le proprietà di cui ai nn. 2, 3.

Ci proponiamo di *determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè il primo membro della* (5.3) *si possa ricondurre alla forma* (5.1) *operando una sostituzione lineare a cofficienti costanti e a modulo non nullo su ciascuna serie di funzioni componenti.*

Da quanto precede risulta allora la possibilità e dal contesto risulterà anche il procedimento adatto per la rappresentazione nomografica a punti allineati dell'equazione (5.3), nell'intorno di una generica sua soluzione $\bar{t}$.

([4]) Cfr. ad es. (II), nn. 1, 3.

Inoltre ci proponiamo di determinare le *condizioni necessarie e sufficienti per la linearità nomografica propria e ristretta di una funzione* $F(t_1, \ldots, t_6)$ *rispetto ad una coppia di variabili* e, più in generale, *per la trilinearità nomografica nelle coppie* t_1, t_2; t_3, t_4; t_5, t_6, *in modo che rispetto a ciascuna coppia il rango sia* 2.

In definitiva si otterranno così delle condizioni sufficienti affinchè un'equazione come la (1.1) si possa rappresentare con un nomogramma a punti allineati nell'intorno di una sua soluzione $\bar{t}$. Soddisfatte che siano tali condizioni (che vincolano la F ad alcune sue derivate) risulterà anche implicitamente il procedimento adatto per la effettiva costruzione del nomogramma della (1.1).

PARTE I.

6. – Un cambiamento del riferimento comune ai tre piani $[x]$, $[y]$, $[z]$, ossia una trasformazione lineare a modulo non nullo (non singolare):

$$(6,1) \qquad \xi = A x \ , \qquad \text{cioè} \qquad x = A^{-1} \xi \ ,$$

dove:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \ ,$$

non altera sostanzialmente la (5.1), giacchè si ha:

$$\| x\, y\, z \| = \| \xi\, \eta\, \zeta \| \cdot A^{-1}_{-1} \ ,$$

e quindi, essendo $| A | \neq 0$, la (5.1) equivale alla:

$$| \xi\, \eta\, \zeta | = 0 \ .$$

Operando invece una diversa trasformazione su ciascuna delle tre serie di variabili x, y, z, e cioè sulle x la (6.1) e sulle altre le:

$$(6.2) \qquad \eta = B y \ , \qquad \text{cioè} \qquad y = B^{-1} \eta \ ;$$

$$(6.3) \qquad \zeta = C z \ , \qquad \text{cioè} \qquad z = C^{-1} \zeta \ ,$$

la (5.1) assume la forma:

$$(6.4) \qquad \Sigma\, d_{ikl}\, \xi_i\, \eta_k\, \zeta_l = 0 \qquad (i, k, l = 0, 1, 2) \ ,$$

dove:

$$(6.5) \qquad d_{ikl} = \begin{vmatrix} \alpha_{i0} & \alpha_{i1} & \alpha_{i2} \\ \beta_{k0} & \beta_{k1} & \beta_{k2} \\ \gamma_{l0} & \gamma_{l1} & \gamma_{l2} \end{vmatrix} = | \alpha_{i*} \beta_{k*} \gamma_{l*} | \qquad (i, k, l = 0, 1, 2)$$

ed α_{ir}, β_{ks}, γ_{lt} sono i reciproci di a_{ir}, b_{ks}, c_{lt} in A, B, C.

Supponiamo dapprima di operare solo con la (6.3) sulle z. Basterà supporre che la (6.1) e la (6.2) coincidano con la trasformazione identica. Detti d'_{ikl} i coefficienti della trasformata della (5.1), le (6.5) dànno:

$$(6.6) \qquad d'_{iil} = 0 \qquad (i, l = 0, 1, 2),$$

$$(6.7) \qquad d'_{rsl} = -d'_{srl} = \gamma_{lt} \qquad (r\,s\,t = 0\,1\,2\,;\,1\,2\,0\,,\,2\,0\,1\,;\, l = 0, 1, 2).$$

Poichè una trasformazione lineare che operi contemporaneamente sulle tre serie di variabili altera il primo membro della (5.1) solo per un fattore di proporzionalità, si può supporre che ogni equazione rappresentante una trilinearità allineata differisca dalla (5.1) soltanto per due trasformazioni lineari, operanti ad es. rispettivamente sulle y e sulla z.

Cosicchè viceversa ogni equazione siffatta, come la (6.4) si potrà riportare alla forma canonica (5.1) mediante due di tali trasformazioni. Possiamo ad es. supporre di applicare prima quella (3.2) operante sulle η.

Sia

$$(6.8) \qquad \Sigma\, d'_{ihl}\, \xi_i\, y_h\, \zeta_l = 0 \qquad (i, h, l = 0, 1, 2)$$

l'equazione trasformata. Poichè – a parte lo scambio di nome tra le ξ e le x – essa differisce dalla (5.1) solo per una trasformazione come la (6.3) operante solamente sulle z, per i coefficienti della forma trilineare a 1° membro della (6.8) dovranno sussistere le (6.6), (6.7).

7. - **Alla considerazione della forma trilineare:**

(7.1) $$\Sigma\, d_{ikl}\, \xi_i\, \eta_k\, \zeta_l \qquad (i, k, l = 0, 1, 2)\,,$$

conviene associare quella della matrice cubica a 3 indici (fig. 3):

$$\{ d_{***} \} = \{ d_{ikl} \} \qquad (i, k, l = 0, 1, 2)\,.$$

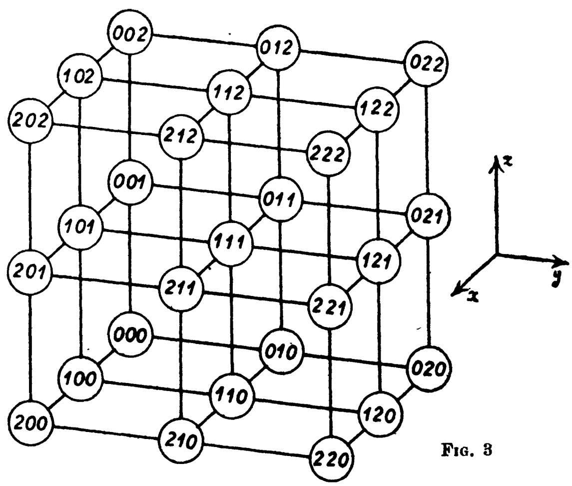

Fig. 3

Operando sulle η la trasformazione (6.2) essa si muta nella:

(7.2) $$\Sigma\, d'_{ihl}\, \xi_i\, y_h\, \zeta_l \qquad (i, h, l = 0, 1, 2)\,,$$

dove:

(7.3) $$d'_{ihl} = \sum_{k=0}^{2} b_{kh}\, d_{ikl} \qquad (i, k, l = 0, 1, 2)\,,$$

cioè concisamente:

(7.4) $$d'_{i*l} = B_{-1}\, d_{i*l} \quad , \quad d_{i*l} = B_{-1}^{-1}\, d'_{i*l} \qquad (i, l = 0, 1, 2)\,.$$

A parole: *una sostituzione lineare operante su di una serie di variabili induce sulle corrispondenti linee della matrice* $\{ d_{***} \}$ *la sostituzione contragrediente.* E viceversa.

Dalle (6.6), (6.7), (7.3) si ricava:

$$(7.5)\qquad \sum_{k=0}^{2} d_{ikl}\, b_{ki} = 0 \qquad\qquad (i, l = 0, 1, 2)\,,$$

$$(7.6)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{2} d_{2kl}\, b_{k2} + \sum_{k=0}^{2} d_{1kl}\, b_{k3} = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{2} d_{2kl}\, b_{k1} + \sum_{k=0}^{2} d_{0kl}\, b_{k3} = 0 \qquad (l = 0, 1, 2)\,. \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{2} d_{1kl}\, b_{k1} + \sum_{k=0}^{2} d_{0kl} \cdot b_{k2} = 0 \end{cases}$$

Non essendo gli elementi b_{ki} tutti nulli, dalle (7.5), (7.6) segue *necessariamente*:

$$(7.7)\qquad \left\| \begin{matrix} \| d_{0**} \| & 0 & 0 \\ 0 & \| d_{1**} \| & 0 \\ 0 & 0 & \| d_{2**} \| \\ 0 & \| d_{2**} \| & \| d_{1**} \| \\ \| d_{2**} \| & 0 & \| d_{0**} \| \\ \| d_{1**} \| & \| d_{0**} \| & 0 \end{matrix} \right\| = 0\,,$$

avendo indicato col simbolo $= 0$ che la caratteristica della matrice composta (7.7) debba essere 8.

Viceversa le (7.7) sono anche condizioni sufficienti affinchè sussistano le (7.5), (7.6) per valori non tutti nulli delle b_{ki}.

Dalle (7.5), essendo $|B| = |b_{**}| \neq 0$, segue in particolare:

$$(7.8)\qquad |d_{i**}| = 0 \qquad\qquad (i = 0, 1, 2)\,.$$

In particolare per la verifica delle (7.7) conviene dapprima accertarsi che i determinanti (7.8) sono nulli. Quindi si determinano, mediante le (7.5) che occorrono, le b_{ki} e si verifica che soddisfino alle (7.6). Se ciò accade, risultano anche calcolati (mediante le (7.4)) i d'_{ihl} soddisfacenti alle condizioni (6.6), (6.7).

Dalle (6.7) risultano quindi determinati gli elementi della matrice C^{-1} e perciò anche quelli della matrice C e della sostituzione (6.3) che riporta la (6.8) alla forma canonica:

$$| \xi \, y \, z | = 0 .$$

Le (7.7) appaiono pertanto come le *condizioni necessarie e sufficienti affinchè una corrispondenza trilineare come la* (6.4) *risulti allineata*.

Le (6.2), (6.3) si possono pensare come le trasformazioni che fanno passare dal riferimento proiettivo $x = \xi = y = z$ a quelli η e ζ, o come le equazioni delle omografie con cui occorre trasportare i piani $[y]$ e $[z]$ sul piano $[x]$.

La simmetria della (5.1) permette di affermare che la (7.7) equivale a ciascuna delle due condizioni analoghe che si ottengono mettendo in evidenza gli strati delle altre due giaciture di $\{ d_{***} \}$ (5).

In particolare, se la trilinearità (6.4) è di tipo allineato, sono nulli i moduli di tutti gli strati della $\{ d_{***} \}$.

8. - Quanto precede permette di concludere che condizione necessaria e sufficiente affinchè una equazione come la (5.3) si possa ricondurre alla forma $| f \, \varphi \, \psi | = 0$ operando una sostituzione lineare non singolare su ciascuna serie di funzioni componenti è che le costanti d_{ikl} soddisfino alle condizioni (7.7).

Allora la (5.3) si può rappresentare con un nomogramma a punti allineati di cui un modello si ottiene introducendo nel piano del disegno un sistema di coordinate proiettive omogenee $x_0 : x_1 : x_2$ e costruendo le linee di livello dei sistemi quotati di equazioni parametriche:

(5) Ciascuna di esse equivale a quelle che caratterizzano il tipo (10) della classificazione di R. M. THRALL e J. H. CHANLER [l. cit. (2)], ad es. che siano tutti nulli i coefficienti della forma cubica ternaria:

$$| x_1 d_{1**} + x_2 d_{2**} + x_3 d_{3**} | .$$

$$x = f(t_1, t_2) \quad , \tag{8.1}$$

$$x = B^{-1} \varphi(t_3, t_4) \quad , \tag{8.2}$$

$$x = C^{-1} \psi(t_5, t_6) \quad , \tag{8.3}$$

dove le matrici B^{-1} e C^{-1} siano determinate come al n. 7.

Rimane a disposizione del disegnatore un'omografia del piano del nomogramma, con la quale cercherà di disporre le zone utili del tre sistemi quotati nel modo più conveniente per una lettura rapida e precisa.

Se tale omografia è reale, e reale è il sistema di riferimento $x_0 : x_1 : x_2$, il nomogramma è adatto a rappresentare le soluzioni della (1) per cui i punti corrispondenti dei sistemi quotati (8.1), (8.2), (8.3) sono reali.

9. – La linearità nomografica propria e ristretta di rango 2 della funzione $F(t_1, \ldots, t_6)$ rispetto alla coppia di variabili t_1, t_2 si ha per definizione quando sussiste l'identità:

$$F(t_1, \ldots, t_6) = \sum_{i=0}^{2} f_i(t_1, t_2)\, \Phi_i(t_3, \ldots, t_6) \,, \tag{9.1}$$

e le funzioni componenti f_i e Φ_i sono derivabili finchè occorre assieme ad F. Inoltre le funzioni f_i sono linearmente indipendenti, cosicchè:

$$\| f_0\, f_1\, f_2 \|_{12} \equiv \left\| \begin{matrix} f_0 & f_{01} & f_{02} & f_{011} & f_{022} \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{111} & f_{122} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & f_{211} & f_{222} \end{matrix} \right\| \neq 0 \,. \tag{9.2}$$

Nella (9.2) il simbolo $\neq 0$ sta ad indicare che la caratteristica di quella matrice wronskiana è generalmente uguale a 3, e si è posto per brevità:

$$f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial t_k} \quad , \quad f_{ikl} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t_k\, \partial t_l} \qquad (i = 0, 1, 2\,; k, l = 1, 2) \,. \tag{9.3}$$

La (9.1) esprime che (per ogni valore di $t_3, t_4, \ldots, t_6$) le funzioni F, f_0, f_1, f_2 sono linearmente dipendenti rispetto alle variabili $t_1 t_2$. Ora, come è noto ([6]), condizione necessaria e sufficiente perchè ciò accada è che sia, identicamente rispetto a $t_1, \ldots, t_6$:

$$\| F f_0 f_1 f_2 \|_{12} \equiv \left\| \begin{matrix} F & F_1 & F_2 & F_{11} & F_{22} & F_{111} & F_{222} \\ f_0 & f_{01} & f_{02} & f_{011} & f_{022} & f_{0111} & f_{0222} \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{111} & f_{122} & f_{1111} & f_{1222} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & f_{211} & f_{222} & f_{2111} & f_{2222} \end{matrix} \right\| = 0 \,, \tag{9.4}$$

([6]) Cfr. (II), n. 6.

dove il simbolo $=0$ sta ad indicare che la caratteristica della matrice wronskiana (9.4) è costantemente uguale a 3, e per gli indici valgono delle convenzioni analoghe alle (9.3).

10. - La (9.4) esprime che in uno spazio lineare a 6 dimensioni S_6 (nel quale siasi introdotto un sistema di coordinate omogenee), l'iperpiano $(F, F_1, F_2, F_{11}, F_{22}, F_{111}, F_{222})$ passa per l'S_3 comune ai tre iperpiani:

$$(f_i, f_{i1}, f_{i2}, f_{i11}, f_{i22}, f_{i111}, f_{i222}) \qquad (i=0, 1, 2).$$

Perciò basta che passi per 4 punti di S_3, linearmente indipendenti, $A_0\, A_1\, A_2\, A_3$. Supponiamo ad es. che nella (9.2) sia generalmente diverso da zero il determinante funzionale:

$$|\,0,1,2\,| = |\,f_0\, f_1\, f_2\,|_{12} = |\,f_{ih}\,| \qquad (i, h = 0, 1, 2)\,, \tag{10.1}$$

dove $f_{i0} = f_i$ e, nella prima notazione, son messi in evidenza gli indici di derivazione. Ciò equivale a supporre che f_0, f_1, f_2 siano anche funzionalmente indipendenti. Allora possiamo scegliere:

$$\begin{cases} A_0 = (d_{00},\, d_{01},\, d_{02},\, e,\, 0,\, 0,\, 0)\,, \\ A_1 = (d_{10},\, d_{11},\, d_{12},\, 0,\, e,\, 0,\, 0)\,, \\ A_2 = (d_{20},\, d_{21},\, d_{22},\, 0,\, 0,\, e,\, 0)\,, \\ A_3 = (d_{30},\, d_{31},\, d_{32},\, 0,\, 0,\, 0,\, e)\,, \end{cases} \tag{10.2}$$

dove, con la notazione già usata nella (10.1) sia:

$$\begin{cases} d_{i0} : d_{i1} : d_{i2} : e = |\,j, 1, 2\,| : |\,0, j, 2\,| : |\,0, 1, j\,| : -|\,0,1,2\,|\,; \\ \qquad i, j = 0, 11\ ;\ 1, 22\ ;\ 2, 111\ ;\ 3, 222\,, \end{cases} \tag{10.3}$$

cosicchè le quantità d_{ih} ed e $(i=0, 1, 2, 3;\ h=0, 1, 2)$ risulteranno funzioni solo di t_1 e t_2, e le (9.4) equivarranno alle 4 identità:

$$
(10.4)\quad \begin{cases} d_{00}\,F + d_{01}\,F_1 + d_{02}\,F_2 + e\,F_{11} & = 0 \\ d_{10}\,F + d_{11}\,F_1 + d_{12}\,F_2 + \qquad e\,F_{22} & = 0 \\ d_{20}\,F + d_{21}\,F_1 + d_{22}\,F_2 + \qquad\qquad e\,F_{111} & = 0 \\ d_{30}\,F + d_{31}\,F_1 + d_{32}\,F_2 + \qquad\qquad\qquad e\,F_{222} & = 0. \end{cases}
$$

Ad un risultato analogo si perverebbe supponendo che, invece di quello (10.1), non sia identicamente nullo un altro dei minori estratti dalla (9.2).

Pertanto: *condizione necessaria per la linearità nomografica propria e ristretta di rango 2 della F rispetto alla coppia di variabili t_1, t_2 è che delle 7 funzioni*:

$$
(10.5)\qquad F,\ F_1,\ F_2,\ F_{11},\ F_{22},\ F_{111},\ F_{222}\ ,
$$

solo tre (scelte fra le prime cinque) *siano* (per ogni valore di t_1, t_2) *linearmente indipendenti rispetto alle variabili $t_3, \ldots, t_6$*).

È da notare che al sistema di equazioni differenziali lineari (10.4) soddisfano anche le funzioni $f_0\ f_1\ f_2$, come risulta immediatamente dalle (10.3), sostituendo successivamente nella (9.4) f_0, f_1, f_2 al posto di F.

11. - È facile vedere che le condizioni enunciate al n. 10 come necessarie sono anche *sufficienti* per la linearità nomografica propria e ristretta di rango 2 della F rispetto alla coppia t_1, t_2. Infatti consideriamo tre integrali particolari delle (10.4), nelle quali sulle funzioni d_{ih} ed e si faccia ora la sola ipotesi che non siano identicamente nulle. Tali integrali sono ad es. le funzioni:

$$
(11.1)\qquad f_i = F^{p_i} = F\,(t_1, t_2, p_{i3}, p_{i4}, p_{i5}, p_{i6}) \qquad (i = 0, 1, 2)\,.
$$

Supponiamo di aver scelto le costanti p_{ih} ($i = 0, 1, 2$, $h = 3, 4, 5, 6$) in modo che le f_i siano linearmente indipendenti, come vogliono le (9.2).

Scrivendo successivamente che F, f_0, f_1, f_2 soddisfano alle (10.4) ne consegue la (9.4), e quindi la (9.1).

Se ad es. F^{p_0}, F^{p_1}, F^{p_2} sono anche funzionalmente indipendenti, cioè se generalmente si ha, con le stesse convenzioni usate nella (10.1):

$$(11.2) \qquad | F^{p_0} F^{p_1} F^{p_2} |_{12} = | F_h^{p_i} | \neq 0 \qquad (i, h = 0, 1, 2) ,$$

dalla (9.4) consegue:

$$(11.3) \qquad \begin{aligned} &\Phi_0 : \Phi_1 : \Phi_2 : = \\ &= | F F^{p_1} F^{p_2} |_{12} : | F^{p_0} F F^{p_2} |_{12} : | F^{p_0} F^{p_1} F |_{12} : - | F^{p_0} F^{p_1} F^{p_2} | . \end{aligned}$$

Cioè, detto a_{ih} il reciproco dell'elemento $F_h^{p_i}$ $(i, h = 0, 1, 2)$ nel determinante (11.2), si ha:

$$(11.4) \qquad - \Phi_i = \sum_{k=0}^{2} a_{ik} F_h \qquad (i = 0, 1, 2) .$$

È da notare che, stante la definizione delle a_{ih}, in ogni caso si ha identicamente per le (11.1), (11.3): $F = \sum_{i=0}^{2} f_i \Phi_i$.

L'importante è però che - malgrado le apparenze contrarie - le Φ_i non dipendono da t_1, t_2. Di ciò ci assicurano appunto le (9.4).

12. - Condizione necessaria e sufficiente affinchè quattro tra le funzioni (10.5) siano linearmente dipendenti rispetto a $t_3, \ldots, t_6$ (per ogni valore di t_1, t_2) è che sia uguale a 3 la caratteristica della matrice:

$$(12.1) \qquad F\binom{3,\ldots,6,33,\ldots,66,333,\ldots,666}{1,2,11,22,111,222} \equiv \left\| \begin{matrix} F & F_3 & \ldots F_6 & F_{33} & \ldots F_{66} & F_{333} & \ldots F_{666} \\ F_1 & F_{13} & \ldots F_{16} & F_{133} & \ldots F_{166} & F_{1333} & \ldots F_{1666} \\ F_2 & F_{23} & \ldots F_{26} & F_{233} & \ldots F_{266} & F_{2333} & \ldots F_{2666} \\ F_{11} & F_{113} & \ldots F_{116} & F_{1133} & \ldots F_{1166} & F_{11333} & \ldots F_{11666} \\ F_{22} & F_{223} & \ldots F_{226} & F_{2233} & \ldots F_{2266} & F_{23333} & \ldots F_{22666} \\ F_{111} & F_{1113} & \ldots F_{1116} & F_{11133} & \ldots F_{11166} & F_{111333} & \ldots F_{111666} \\ F_{222} & F_{2223} & \ldots F_{2226} & F_{22233} & \ldots F_{22266} & F_{222333} & \ldots F_{222666} \end{matrix} \right\|$$

Infatti, se ad esempio F, F_1, F_2 sono linearmente indipendenti rispetto a $t_3, \dots, t_6$ (per ogni valore di t_1, t_2), così che sia generalmente uguale a tre la caratteristica della matrice wronskiana:

$$\| F\, F_1\, F_2 \|_{3456} \equiv F \binom{3,\dots,6,33\dots66}{1,2}, \tag{12.2}$$

perchè F, F_1, F_2, F_{11}; F, F_1, F_2, F_{22}; F, F_1, F_2, F_{111}; F, F_1, F_2, F_{222} siano linearmente dipendenti rispetto a $t_3, \dots, t_6$, occorre e basta com'è noto ([7]) che sia generalmente uguale a tre la caratteristica delle matrici wronskiane:

$$\begin{matrix} \| F\, F_1\, F_2\, F_{11} \|_{3456}, & \| F\, F_1\, F_1\, F_{22} \|_{3456}, \\ \| F\, F_1\, F_2\, F_{111} \|_{3456}, & \| F\, F_1\, F_2\, F_{222} \|_{3456}, \end{matrix} \tag{12.3}$$

e cioè appunto che sia uguale a 3 la caratteristica della (12.1).

Da quanto precede risulta allora che la (9.1) *può pensarsi come « l'integrale generale » del sistema di equazioni differenziali che si ottiene esprimendo che la caratteristica della* (12.1) *sia uguale a* 3. E ciò nel senso che ogni funzione F del tipo (9.1) dove le f_i e le Φ_i siano funzioni arbitrarie soddisfa ad un tal sistema, mentre viceversa ogni F soddisfacente a quel sistema si può (in più modi, come vedremo) esprimere nella forma (9.1).

Se nel n. 9 avessimo interpretato la (9.1) come la espressione di una dipendenza lineare rispetto alle variabili $t_3, \dots, t_6$ (per ogni valore di t_1, t_2) delle funzioni $F\ \Phi_0\ \Phi_1\ \Phi_2$, saremmo pervenuti ovviamente ancora alla considerazione della matrice (12.1) e ad imporle di avere la caratteristica tre.

13. – In pratica, anzichè verificare se la F soddisfa al sistema di equazioni differenziali che esprime essere uguale a 3 la caratteristica della (12.1), *per riconoscere se la F si può esprimere nella forma* (9.1) *basta verificare* che sia soddisfatta la (9.4) dove f_0, f_1, f_2 siano date dalle (11.1) per una scelta delle costanti p_{ih} ($i = 0, 1, 2$; $h = 3, 4, 5, 6$) tale che valga la (9.2). Cioè occorre e basta *che sia:*

$$\| F^{p_0}\ F^{p_1}\ F^{p_2} \|_{12} \neq 0, \tag{13.1}$$

$$\| F\, F^{p_0}\ F^{p_1}\ F^{p_2} \|_{12} = 0. \tag{13.2}$$

([7]) Cfr. (II), n. 6.

Conviene osservare esplicitamente che appena le (13.2) siano verificate per una particolare scelta delle p_{ih}, fatta con le cautele espresse dalla (13.1), lo sono altresì per *ogni* valore che si attribuisca a quei parametri.

La effettiva riduzione della F alla forma (9.1) si può quindi conseguire in più modi a seconda della scelta delle costanti p_{ih}, da cui risultano determinate le funzioni componenti f_i e Φ_i mediante le (11.1), (11.4).

Se in particolare sussiste la (11.2), la verifica delle (13.2) si riduce a quella delle quattro identità:

$$(13.3) \qquad F_j = \sum_{i=0}^{2} f_{ij}\, \Phi_i = \sum_{i=0}^{2} \sum_{h=0}^{2} a_{ih}\, F_j^{p_i}\, F_h \qquad (j = 11, 22, 111, 222),$$

che si traggono dalle (10.4), (10.3) per tramite della (11.1), e dove le funzioni a_{ih} hanno lo stesso significato che nelle (11.4).

14. - Se la F è nomograficamente lineare in senso proprio e ristretto anche rispetto alla coppia di variabili $t_3\, t_4$, cosicchè sia identicamente:

$$(14.1) \qquad F(t_1 \ldots t_6) = \sum_{k=0}^{2} \varphi_k(t_3 t_4)\, \Psi_k(t_1 t_2 t_5 t_6)\,,$$

la linearità nomografica propria e ristretta di rango 2 di F rispetto a t_1, t_2 porta di conseguenza anche quella delle Ψ_k, con le stesse funzioni componenti f_i. Infatti ad es. se la F soddisfa alle (10.4) rispetto alle variabili $t_1, \ldots, t_6$, dalle (14.1) risulta che le Ψ_k sodddisfano a quelle *stesse* identità, rispetto alle variabili t_1, t_2, t_5, t_6. Che la proposizione si inverta è immediato. Nè d'altra parte importa supporre prima la linearità nomografica rispetto alla coppia t_1, t_2 o quella rispetto alla coppia t_3, t_4.

Dunque, *perchè la F sia nomograficamente trilineare in senso proprio e ristretto rispetto alle coppie di variabili t_1, t_2; t_3, t_4; t_5, t_6 occorre e basta che lo sia separatamente rispetto a ciascuna coppia.*

Cioè occorre e basta che, scelte le costanti:

p_{ih} $(h = 3,4,5,6)$, q_{km} $(m = 1,2,5,6)$, r_{ln} $(n = 1,2,3,4)$ $(i, k, l = 0,1,2)$

in modo che sia:

$$
(14.2) \qquad \| F^{p_0} F^{p_1} F^{p_2} \|_{12} \neq 0 , \quad \| F^{q_0} F^{q_1} F^{q_2} \|_{34} \neq 0 , \quad \| F^{r_0} F^{r_1} F^{r_2} \|_{56} \neq 0 ,
$$

si abbia identicamente:

$$
(14.3) \qquad \| F F^{p_0} F^{p_1} F^{p_2} \|_{12} = 0 , \quad \| F F^{q_0} F^{q_1} F^{q_2} \|_{34} = 0 , \quad \| F F^{r_0} F^{r_1} F^{r_2} \|_{56} = 0 .
$$

Dopo di che sarà identicamente:

$$
(14.5) \qquad F(t_1,\ldots,t_6) = \Sigma\, d_{ikl}\, f_i(t_1, t_2)\, \varphi_k(t_3, t_4)\, \psi_l(t_5, t_6) \quad (i, k, l = 1, 2) ,
$$

dove:

$$
(14.6) \qquad \begin{cases} f_i(t_1, t_2) = F^{p_i} = F(t_1, t_2, p_{i3}, p_{i4}, p_{i5}, p_{i6}) & (i = 0, 1, 2) , \\ \varphi_k(t_3, t_4) = F^{q_k} = F(q_{k1}, q_{k2}, t_3, t_4, q_{k5}, q_{k6}) & (k = 0, 1, 2) , \\ \psi_l(t_5, t_6) = F^{r_l} = F(r_{l1}, r_{l2}, r_{l3}, r_{l4}, t_5, t_6) & (l = 0, 1, 2) , \end{cases}
$$

e le d_{ikl} sono opportune costanti.

È da notare che le condizioni espresse dalle (14.3) non sono tutte indipendenti.

Infatti esse equivalgono ai sistemi di equazioni differenziali:

$$
(14.7) \qquad F\binom{3,\ldots,6,33,\ldots,66,333,\ldots,666}{1,2,11,22,111,222} = 0 , \quad F\binom{1,2,5,6,11,\ldots,66,111,\ldots,666}{3,4,33,44,333,444} = 0 , \quad F\binom{1,\ldots,4,11,\ldots,44,111,\ldots,444}{5,6,55,66,555,666} = 0 ,
$$

di cui il primo ed il secondo, il secondo ed il terzo, il terzo ed il primo hanno in comune le equazioni:

$$
(14.8) \qquad \left| F\binom{3,4,33,44,333,444}{1,2,11,22,111,222} \right| = 0 , \quad \left| F\binom{5,6,55,66,555,666}{3,4,33,44,333,444} \right| = 0 , \quad \left| F\binom{1,2,11,22,111,222}{5,6,55,66,555,666} \right| = 0 .
$$

15. - Per il calcolo dei coefficienti d_{ikl} si può seguire il seguente procedimento, nel caso che sia:

$$(15.1)\qquad |F_h^{p_i}| \neq 0 \quad (h = 0, 1, 2)\ , \quad |F_m^{q_k}| \neq 0 \quad (m = 0, 3, 4)\ ,$$
$$|F_n^{r_l}| \neq 0 \quad (n = 0, 5, 6) \quad (i, k, l = 0, 1, 2)\,.$$

Indichiamo rispettivamente con a_{ih}, b_{km}, c_{lm} i reciproci degli elementi $F_h^{p_i}$, $F_m^{q_k}$, $F_n^{r_l}$ dei determinanti (15.1).

Riduciamo dapprima F alla forma (9.1) mediante le (11.1), (11.4).

Dopo di ciò avremo, come si è detto, anche:

$$(15.2)\qquad \Phi_i(t_3, t_4, t_5, t_6) = \sum_{k=0}^{2} \varphi_k(t_3, t_4)\, \Psi_{ik}(t_5, t_6)\ ,$$

dove:

$$(15.3)\qquad \varphi_k(t_3, t_4) = F^{q_k}\ , \quad -\Psi_{ik}(t_5, t_6) = \sum_{m=0,3,4} b_{km}\, \Phi_{im} \quad (i, k = 0, 1, 2)\,.$$

Quindi:

$$(15.4)\qquad F(t_1, \ldots, t_6) = \sum_{i,k=0}^{2} f_i(t_1, t_2)\, \varphi_k(t_3, t_4)\, \Psi_{ik}(t_5, t_6)\,.$$

Ma allora sarà anche:

$$(15.5)\qquad \Psi_{ik}(t_5, t_6) = \sum_{l=0}^{2} \psi_l(t_5, t_6)\, d_{ikl} \qquad (i, k = 0, 1, 2)\ ,$$

dove:

$$(15.6)\qquad \psi_l(t_5, t_6) = F^{r_l}\ , \quad -d_{ikl} = \sum_{n=0,5,6} c_{ln}\, \Psi_{ikn} \quad (i, k, l = 0, 1, 2)\,.$$

Quindi la (14.5), dove:

$$(15.7)\qquad -d_{ikl} = \sum_{\substack{h=0,1,2\\ m=0,3,4\\ n=0,5,6}} a_{ih}\, b_{km}\, c_{ln}\, F_{hmn} \quad (i, k, l = 0, 1, 2)\,.$$

Agli scopi della rappresentazione nomografica non interessa alterare il primo membro della equazione $F = 0$ per un fattore di proporzionalità, anche se questo non è costante, purchè non sia identicamente nullo. Ciò permette (per le (15.1)) di sostituire nella (15.7) ai reciproci a_{ih}, b_{km}, c_{ln} degli elementi dei determinanti (15.1) i corrispondenti complementi algebrici.

16. - Consideriamo una sestupla generica $t_1, \ldots, t_6$ per cui siano soddisfatte le (15.1) e consideriamo le sostituzioni lineari non singolari che hanno per matrici quelle dei determinanti (15.1). Indicheremo tali matrici rispettivamente con le lettere A, B, C. Consideriamo anche le due forme trilineari ternarie $F(x\,y\,z)$, $F'''(\xi\,\eta\,\zeta)$, di coefficienti :

$$d_{ikl} \qquad (i,\ k,\ l = 0,\ 1,\ 2)\ ,$$

$$(16.1) \qquad d'''_{\lambda\mu\nu} = F_{hmn} \qquad \begin{array}{l}(\lambda, h = 0{,}0\,;\ 1{,}1\,;\ 2{,}2\ldots\ \mu, m = 0{,}0\,;\\ 1{,}3\,;\ 2{,}4\ldots\ \nu, n = 0{,}0\ ;\ 1{,}5\ ;\ 2{,}6)\,,\end{array}$$

legati gli uni agli altri dalla sostituzione lineare non singolare (15.7).

Il passaggio da F ad F''' (e viceversa) può pensarsi effettuato per gradi, ad es. attraverso la considerazione di due forme trilineari intermedie:

$$F'(\xi y z) \text{ ed } F''(\xi\eta z)\ , \text{ di cofficienti } d'_{\lambda kl} \text{ e } d''_{\lambda\mu l}\ ,$$

qualora si ponga, con una notazione già usata al n. 7 :

$$(16.2) \quad \left\{\begin{array}{l} d'''_{\lambda\mu *} = C\, d''_{\lambda\mu *} \\ d''_{\lambda * l} = B\, d'_{\lambda * l} \\ d'_{* kl} = A\ d_{* kl} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} d_{* kl} = A^{-1}\, d'_{* kl} \\ d'_{\lambda * l} = B^{-1}\, d''_{\lambda * l} \\ d''_{\lambda\mu *} = C^{-1}\, d'''_{\lambda\mu *} \end{array}\right. \quad (\lambda, \mu, k, l = 0, 1, 2)\,.$$

Cosicchè (n. 7) le forme F''' ed F si possono pensare trasformate una dell'altra attraverso tre trasformazioni lineari non singolari, operanti ciascuna su di una sola serie di variabili, e contragredienti alle (16.2):

$$(16.3) \qquad \begin{cases} \xi = A_{-1}^{-1}\, x \\ \eta = B_{-1}^{-1}\, y \\ \zeta = C_{-1}^{-1}\, z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = A_{-1}\, \xi \\ y = B_{-1}\, \eta \\ z = C_{-1}\, \zeta \end{cases} .$$

Dunque F''' *ed* F *sono dello stesso tipo* (equivalenti, nel senso di R. M. Thrall e J. H. Chanler ([8])). In particolare perchè la trilinearità di equazione $F = 0$ risulti di tipo allineato, occorre e basta che sia di tipo allineato quella di equazione $F''' = 0$. Cioè, *perchè la equazione* $F = 0$ *si possa rappresentare con un nomogramma a punti allineati è sufficiente che la funzione* F *soddisfi, oltre che alle condizioni* (14.3), *anche a quelle che si ottengono dalle* (7.7) *sostituendo ordinatamente alle costanti* $d_{\lambda\mu\nu}$ *le funzioni* $d'''_{\lambda\mu\nu} = F_{hmn}$ *della* F, *come è espresso dalle* (16.1).

([8]) l. cit. ([2]).