RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANNA ROCCO BOSELLI

Le funzioni di Green per gli iperstrati sferici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 14 (1943), p. 5-16
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1943__14__5_0>

LE FUNZIONI DI GREEN PER GLI IPERSTRATI SFERICI

Nota di ANNA ROCCO BOSELLI *a Napoli.*

1. – Mi occupo in questa Nota delle funzioni di GREEN relative agli iperstrati sferici in spazi ad un numero qualunque di dimensioni.

La funzione di GREEN per la corona circolare si esprime, come è noto, in forma finita mediante trascendenti ellittiche.

Per lo strato sferico, DINI [1] ha indicato una via per pervenire ad un' espressione della funzione di GREEN contenente funzioni ellittiche ed una quadratura.

Io dò qui un procedimento molto semplice, fondato sul metodo delle immagini iterate, adoperato abitualmente per la striscia e per lo strato piano, che permette di ottenere la funzione di GREEN g_m per un iperstrato sferico a m dimensioni come somma di una serie. Ne deduco una relazione ricorrente che esprime g_{m+2} mediante le derivate di g_m. Trovo così, dopo aver riottenuta, sommando la serie che dà g_2, la nota espressione di questa funzione mediante funzioni ellittiche, che le funzioni di GREEN per gli iperstrati sferici ad un numero pari di dimensioni si esprimono in forma finita per funzioni ellittiche. Quanto a quelle relative ad iperstrati ad un numero dispari di dimensioni, esse si possono esprimere mediante le derivate della funzione g_3.

(1) *Il problema di Dirichlet in un' area anulare*, ecc. (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XXXVI), nn. 8 e 9.

Precisiamo che intendiamo qui per funzione di GREEN $g(M, M_0)$, relativa ad un campo Γ e di polo M_0, la funzione nulla sulla frontiera di Γ ed armonica in Γ fuorchè nel polo, dove presenta il comportamento della funzione armonica fondamentale ($\log \frac{1}{r}$ per un campo a due dimensioni e $\frac{1}{r^{m-2}}$ per un campo a $m > 2$ dimensioni).

2. - Consideriamo una corona circolare limitata dalla circonferenza interna C_1 e dalla circonferenza esterna C_2. Diciamone O il centro e supponiamo, come possiamo evidentemente fare senza restrizione, che C_2 abbia raggio 1; sia $q < 1$ il raggio di C_1.

Vogliamo trovare la funzione di GREEN $g_2(M, M_0)$ relativa a questa corona ed al polo M_0. Dobbiamo all'uopo considerare del punto M_0 le immagini iterate rispetto alle circonferenze limiti, e stabilire alcune semplici notazioni e formule. Queste si estendono senz'altro, come faremo in seguito, quando in luogo d'una corona circolare si consideri uno strato o un iperstrato sferico.

Sia $M_{1,1}$ l'immagine di M_0 rispetto alla circonferenza C_1; prendiamone l'immagine $M_{1,2}$ rispetto a C_2, diciamo poi $M_{1,3}$ l'immagine di $M_{1,2}$ rispetto a C_1 e così via. Posto $OM_0 = \rho_0$, $OM_{1,k} = \rho_{1,k}$, si ha

$$\rho_{1,2n} = \frac{\rho_0}{q^{2n}}, \quad \rho_{1,2n-1} = \frac{q^{2n}}{\rho_0} \; (n = 1, 2, \ldots).$$

Rifacciamo poi la costruzione precedente, operando la prima riflessione rispetto a C_2, la seconda rispetto a C_1 e così via; otterremo una successione di punti che indicheremo con $M_{2,1}$, $M_{2,2}, \ldots$ Posto $OM_{2,k} = \rho_{2,k}$ si ha

$$\rho_{2,2n} = q^{2n} \rho_0, \quad \rho_{2,2n-1} = \frac{1}{q^{2n-2} \rho_0} \quad (n = 1, 2 \ldots).$$

Indichiamo in generale con $r_{i,k}$ la distanza $M_{i,k} M$ fra il punto $M_{i,k}$ ed il punto corrente $M (i = 1, 2; \; k = 1, 2 \ldots)$; inoltre indichiamo con r_0 la distanza $M_0 M$.

Sulla circonferenza C_1 sussistono fra le r le relazioni

$$(1)\qquad r_{1,1} = \frac{q}{\rho_0} r_0, \quad r_{1,2n+1} = \frac{q^{2n+1}}{\rho_0} r_{1,2n}, \quad r_{2,2n} = q^{2n-1} \rho_0 r_{1,2n-1} \qquad (n = 1, 2 \ldots).$$

Su C_2 si hanno invece le altre

$$(2)\qquad r_{2,1} = \frac{r_0}{\rho_0}, \quad r_{2,2n+1} = \frac{r_{2,2n}}{q^{2n} \rho_0}, \quad r_{1,2n} = \frac{\rho_0 r_{1,2n-1}}{q^{2n}} \; (n = 1, 2, \ldots).$$

3. - Dimostriamo ora che la funzione di GREEN per la corona circolare considerata è, posto $\rho = OM$,

$$(3)\qquad g_2(M, M_0) = \frac{\log q - \log \rho_0}{\log q} \log \frac{1}{\rho} + \log \frac{r_{1,1}}{r_0} + \sum_0^\infty \log \frac{\rho_0^2 r_{2,2n+1}}{q^2 r_{1,2n+2}} + \sum_1^\infty \log \frac{r_{1,2n+1}}{r_{2,2n}}.$$

Proviamo innanzi tutto la convergenza delle serie a secondo membro. Notoriamente basta provare la convergenza assoluta delle serie

$$\sum_0^\infty \left(\frac{\rho_0^2 r_{2,2n+1}}{q^2 r_{1,2n+2}} - 1 \right), \quad \sum_1^\infty \left(\frac{r_{1,2n+1}}{r_{2,2n}} - 1 \right).$$

Per il termine generale della seconda serie si ha ovviamente

$$\left| \frac{r_{1,2n+1}}{r_{2,2n}} - 1 \right| \leq \frac{1}{r_{2,2n}} (\rho_{2,2n} - \rho_{1,2n+1}) = \frac{q^{2n}}{r_{1,2n+1} \rho_0} (\rho_0^2 - q^2),$$

ciò che prova senz'altro la convergenza, perchè $r_{1,2n+1}$ è inferiormente limitato nella corona, $OM_{1,2n+1}$ tendendo ad 0 per $n \to \infty$.

Quanto alla prima serie possiamo scriverne il termine generale come segue

$$\frac{\rho_0^2 (\rho_{2,2n+1} + \alpha_n)}{q^2 (\rho_{1,2n+2} + \beta_n)} - 1$$

essendo α_n e β_n quantità limitate nella corona; se ne trae l'espressione

$$\frac{\rho_0 + \alpha_n q^{2n}}{\rho_0 + \beta_n q^{2n}} - 1 = \frac{(\alpha_n - \beta_n) q^{2n}}{\rho_0 + \beta_n q^{2n}},$$

ciò che prova anche la convergenza della seconda serie.

Notiamo inoltre che la convergenza delle serie considerate è anche uniforme.

Ciò posto, essendo come è noto $\log\frac{1}{r}$ armonica nel piano, la funzione g_2 risulta armonica, ed è anche immediato che essa si comporta per $M \equiv M_0$ come $\log\frac{1}{r_0}$. Rimane da dimostrare che g_2 si annulla sulle circonferenze C_1 e C_2 contorno della corona.

Su C_1 si ha

$$\rho = q, \qquad \frac{r_{1,1}}{r_0} = \frac{q}{\rho_0},$$

e quindi g_2 si riduce alle due serie. Ma la somma di queste è nulla, perchè i loro termini sono ordinatamente opposti, avendosi in virtù delle (1)

$$\frac{r_{1,2n+1}}{r_{2,2n}} = \frac{q^2 r_{1,2n}}{\rho_0^2 r_{2,2n-1}} \qquad (n = 1, 2 \ldots).$$

Su C_2 il primo termine di g_2 si annulla perchè $\rho = 1$; si ha poi in virtù delle (2)

$$\frac{r_{2,1}}{r_{1,2}} = \frac{q^2 r_0}{\rho_0^2 r_{1,1}}, \qquad \frac{r_{2,2n+1}}{r_{1,2n+2}} = \frac{q^2 r_{2,2n}}{\rho_0^2 r_{1,2n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

dimodochè il secondo termine di g_2 è opposto al primo termine della prima serie, e l'n^{mo} di questo risulta per $n > 1$ opposto all'$(n-1)^{mo}$ della seconda.

Così è completamente dimostrato che $g_2(M, M_0)$ è effettivamente la funzione di Green relativa alla corona circolare.

4. – Nello spazio a tre dimensioni, estendendo le notazioni ed il procedimento precedenti, si trova per la funzione di GREEN $g_3(M, M_0)$ dello strato sferico compreso fra le sfere di raggio q e 1, l'espressione

$$(4) \qquad g_3(M, M_0) = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{\rho_0}\sum_0^\infty \left(\frac{q^{n+1}}{r_{1,2n+1}} + \frac{q^{-n}}{r_{2,2n+1}}\right) + \\ + \sum_1^\infty \left(\frac{q^{-n}}{r_{1,2n}} + \frac{q^n}{r_{2,2n}}\right).$$

Si vede subito, ammessa la convergenza delle serie a secondo membro, che g_3 è armonica, per essere armonica la funzione $\frac{1}{r}$ nello spazio ordinario, e che per $M \equiv M_0$, g_3 si comporta come $\frac{1}{r_0}$. Si vede anche, utilizzando come precedentemente le relazioni fra le $r_{i,k}$ sulle superficie sferiche limiti, che ivi $g_3 = 0$. Tutto si riduce dunque a dimostrare la convergenza delle serie.

È evidente che le serie

$$\sum_0^\infty \frac{q^{n+1}}{r_{1,2n+1}}, \quad \sum_1^\infty \frac{q^n}{r_{2,2n}}$$

convergono. Quanto alle altre due

$$\sum_0^\infty \frac{q^{-n}}{r_{2,2n+1}}, \quad \sum_1^\infty \frac{q^{-n}}{r_{1,2n}},$$

si ha evidentemente

$$r_{2,2n+1} \geq \rho_{2,2n+1} - 1 = \frac{1}{q^{2n}\rho_0} - 1,$$

$$r_{1,2n} \geq \rho_{1,2n} - 1 = \frac{\rho_0}{q^{2n}} - 1;$$

perciò la prima serie ammette come maggiorante la serie

$$\rho_0 \sum_0^\infty \frac{q^n}{1 - \rho_0 q^{2n}},$$

e la seconda ammette l'altra

$$\sum_1^\infty \frac{q^n}{\rho_0 - q^{2n}}.$$

Queste maggioranti convergono perchè $q < 1$, e quindi anche le due serie considerate convergono, e dippiù uniformemente.

5. – In generale, conservando tutte le notazioni precedenti, si trova per la funzione di Green nell'iperstrato dello spazio ad m dimensioni, limitato dalle ipersfere di raggi q ed 1, l'espressione

$$(5)\qquad \begin{aligned} g_m(M, M_0) = {} & \frac{1}{r_0^{m-2}} - \frac{1}{\rho_0^{m-2}} \sum_0^\infty \left(\frac{q^{(m-2)(n+1)}}{r_{1,2n+1}^{m-2}} + \frac{q^{-(m-2)n}}{r_{2,2n+1}^{m-2}} \right) + \\ & + \sum_1^\infty \left(\frac{q^{-(m-2)n}}{r_{1,2n}^{m-2}} + \frac{q^{(m-2)n}}{r_{2,2n}^{m-2}} \right). \end{aligned}$$

Si ragiona come precedentemente per g_3, sostituendo solo alla funzione armonica fondamentale $\frac{1}{r}$, l'altra $\frac{1}{r^{m-2}}$.

Queste funzioni di Green $g_m(M, M_0)$ (notoriamente simmetriche rispetto ad M e M_0) sono in sostanza, per ovvie ragioni di simmetria, funzioni di tre sole variabili: i raggi $\rho = OM$, $\rho_0 = OM_0$ e l'angolo φ fra questi raggi. Agli argomenti ρ e φ possono utilmente sostituirsene due altri, $x = \rho \cos \varphi$ e $y = \rho \operatorname{sen} \varphi$; x è l'ascissa di M secondo l'asse OM_0, e y è la proiezione di OM sull'iperpiano (retta nel caso del piano e piano nel caso dello spazio ordinario) perpendicolare ad OM_0 per O. Possiamo quindi indicare la funzione relativa allo spazio ad m dimensioni con $g_m(\rho, \varphi, \rho_0)$ o con $g_m(x, y, \rho_0)$.

Nel seguito sottintenderemo per brevità gli argomenti.

Ci proponiamo ora di stabilire una relazione generale che sussiste fra queste varie funzioni di GREEN. Propriamente dimostreremo, basandoci sull'espressione generale trovata, che sussiste una relazione ricorrente fra due funzioni g i cui indici differiscono di 2.

Sempre con le notazioni precedentemente introdotte, si ha

$$r_0^2 = (x - \rho_0)^2 + y^2, \quad r_{i,k} = (x - \rho_{i,k})^2 + y^2.$$

Calcolando la derivata di g_2 rispetto ad x avremo

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{x}{r_{1,1}^2} - \frac{x}{r_0^2} + \sum_0^\infty \left(\frac{x}{r_{2,2n+1}^2} - \frac{x}{r_{1,2n+2}^2} \right) +$$

$$+ \sum_1^\infty \left(\frac{x}{r_{1,2n+1}^2} - \frac{x}{r_{2,2n}^2} \right) + \frac{\rho_0}{r_0^2} - \frac{1}{\rho_0} \sum_0^\infty \left(\frac{q^{2(n+1)}}{r_{1,2n+1}^2} + \frac{q^{-2n}}{r_{2,2n+1}^2} \right) +$$

$$+ \rho_0 \sum_1^\infty \left(\frac{q^{-2n}}{r_{1,2n}^2} + \frac{q^{2n}}{r_{2,2n}^2} \right) - \frac{\log q - \log \rho_0}{\log q} \frac{x}{\rho^2}.$$

Intanto è

$$\frac{\partial g_2}{\partial y} = \frac{y}{r_{11}^2} - \frac{y}{r_0^2} + \sum_0^\infty \left(\frac{y}{r_{2,2n+1}^2} - \frac{y}{r_{1,2n+2}^2} \right) +$$

$$+ \sum_1^\infty \left(\frac{y}{r_{1,2n+1}^2} - \frac{y}{r_{2,2n}^2} \right) - \frac{\log q - \log \rho_0}{\log q} \frac{y}{\rho^2},$$

e perciò

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{x}{y} \frac{\partial g_2}{\partial y} + \rho_0 g_4,$$

ovvero

$$g_4 = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{x}{y} \frac{\partial g_2}{\partial y} \right). \tag{6}$$

In generale:

$$\frac{\partial g_m}{\partial x} = \frac{-(m-2)x}{r_0^m} + \frac{m-2}{\rho_0^{m-2}} \sum_0^\infty \left(\frac{q^{(m-2)(n+1)}}{r_{1,2n+1}^m} x + \frac{q^{-(m-2)n}}{r_{2,2n+1}^m} x \right) -$$

$$-(m-2) \sum_1^\infty \left(\frac{q^{-(m-2)n}}{r_{1,2n}^m} x + \frac{q^{(m-2)n}}{r_{2,2n}^m} x \right) + \frac{m-2}{r_0^m} \rho_0 -$$

$$- \frac{m-2}{\rho_0^{m-1}} \sum_0^\infty \left(\frac{q^{m(n+1)}}{r_{1,2n+1}^m} + \frac{q^{-mn}}{r_{2,2n+1}^m} \right) + (m-2)\rho_0 \sum_1^\infty \left(\frac{q^{-mn}}{r_{1,2n}^m} + \frac{q^{mn}}{r_{2,2n}^m} \right).$$

Ovvero

$$\frac{\partial g_m}{\partial x} = \frac{x}{y} \frac{\partial g_m}{\partial y} + (m-2)\rho_0 g_{m+2},$$

e perciò si ha la formula

$$g_{m+2} = \frac{1}{(m-2)\rho_0} \left(\frac{\partial g_m}{\partial x} - \frac{x}{y} \frac{\partial g_m}{\partial y} \right). \tag{7}$$

Questa formula ci permette di calcolare la funzione di Green per l'iperstrato sferico di uno spazio a un numero pari di dimensioni, mediante la funzione g_2, e per un numero dispari di dimensioni mediante la funzione g_3.

6. – Facciamo ora vedere come la nota espressione della funzione g_2 mediante funzioni ellittiche si possa ritrovare sommando la serie che abbiamo costruita.

La funzione data dalla (3)

$$g_2 = \frac{\log q - \log \rho_0}{\log q} \log \frac{1}{\rho} + \log \frac{r^{1,1}}{r_0}, + \log \frac{\rho_0^2 r_{2,1}}{q^2 r_{1,2}} +$$

$$+ \sum_1^\infty \left(\log \frac{\rho_0^2 r_{2,2n+1}}{q^2 r_{1,2n+2}} + \log \frac{r_{1,2n+1}}{r_{2,2n}} \right)$$

può scriversi anche così

$$g_2 = \frac{\log q - \log \rho_0}{\log q} \log \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2} \log \left[\frac{r_{1,1}^2}{r_0^2} \frac{\rho_0^4 r_{2,1}^2}{q^4 r_{1,2}^2} \prod_1^\infty \frac{\rho_0^4 r_{2,2n+1}^2}{q^4 r_{1,2n+2}^2} \frac{r_{1,2n+1}^2}{r_{2,2n}^2} \right].$$

Posto $z = x + i\,y$, sarà $r_{i,k}^2 = (z - \rho_{i,k})\,(\bar{z} - \rho_{i,k})$, essendo $\bar{z}$ il coniugato di z.

Si ricava di qui

$$\frac{1}{2}\log\left[\frac{r_{1,1}^2}{r_0^2}\,\frac{\rho_0^4 r_{2,1}^2}{q^4 r_{1,2}^2}\prod_1^\infty \frac{\rho_0^4 r_{2,2n+1}^2}{q^4 r_{1,2n+2}^2}\,\frac{r_{1,2n+1}^2}{r_{2,2n}^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left\{\frac{r_{1,1}^2}{r_0^2}\,\frac{\rho_0^4}{q^4}\,\frac{\left(z - \frac{1}{\rho_0}\right)\left(\bar{z} - \frac{1}{\rho_0}\right)}{\left(z - \frac{\rho_0}{q^2}\right)\left(\bar{z} - \frac{\rho_0}{q^2}\right)}\prod_1^\infty \frac{\rho_0^4}{q^4}\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\,\frac{\left(z - \frac{1}{q^{2n}\rho_0}\right)\left(z - \frac{q^{2n+2}}{\rho_0}\right)\left(\bar{z} - \frac{1}{q^{2n}\rho_0}\right)\left(\bar{z} - \frac{q^{2n+2}}{\rho_0}\right)}{\left(z - \frac{\rho_0}{q^{2n+2}}\right)\left(z - q^{2n}\rho_0\right)\left(\bar{z} - \frac{\rho_0}{q^{2n+2}}\right)\left(\bar{z} - q^{2n}\rho_0\right)}\right\}.$$

Introducendo sotto il simbolo del prodotto di infiniti termini, anche i fattori messi innanzi, si ha:

$$\frac{1}{2}\log\left\{\frac{r_{1,1}^2}{r_0^2}\prod_1^\infty \frac{\rho_0^4}{q_0^2}\,\frac{\left(z - \frac{1}{q^{2n-2}\rho_0}\right)\left(z - \frac{q^{2n+2}}{\rho_0}\right)\left(\bar{z} - \frac{1}{q^{2n-2}\rho_0}\right)\left(\bar{z} - \frac{q^{2n+2}}{\rho_0}\right)}{\left(z - \frac{\rho_0}{q^{2n}}\right)\left(z - q^{2n}\rho_0\right)\left(\bar{z} - \frac{\rho_0}{q^{2n}}\right)\left(\bar{z} - q^{2n}\rho_0\right)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left\{\frac{r_{1,1}^2}{r_0^2}\prod_1^\infty \frac{\left(z\,q^{2n-2}\rho_0 - 1\right)\left(1 - \frac{q^{2n+2}}{z\,\rho_0}\right)\left(\bar{z}\,q^{2n-2}\rho_0 - 1\right)\left(1 - \frac{q^{2n+2}}{\rho_0\,\bar{z}}\right)}{\left(\frac{q^{2n}}{\rho_0}z - 1\right)\left(1 - \frac{q^{2n}\rho_0}{z}\right)\left(\frac{q^{2n}}{\rho_0}\bar{z} - 1\right)\left(1 - \frac{q^{2n}\rho_0}{\bar{z}}\right)}\right\}.$$

Posto $Z = \frac{q^2}{\rho_0}\,\frac{1}{z}$, il secondo membro diventa

$$\frac{1}{2}\log\left\{\frac{r_{1,1}^2}{r_0^2}\right.$$

$$\left.\prod_1^\infty \frac{\left(1 - q^{2n} e^{\log Z}\right)\left(1 - q^{2n} e^{-\log Z}\right)\left(1 - q^{2n} e^{\log \bar{Z}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{-\log \bar{Z}}\right)}{\left(1 - q^{2n} e^{\log\frac{\rho_0^2}{q^2}} e^{\log Z}\right)\left(1 - q^{2n} e^{-\log\frac{\rho_0^2}{q^2}} e^{-\log Z}\right)\left(1 - q^{2n} e^{\log\frac{\rho_0^2}{q^2}} e^{\log \bar{Z}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{-\log\frac{\rho_0^2}{q^2}} e^{-\log \bar{Z}}\right)}\right.$$

e posto ancora

$$u = \frac{\omega}{\pi i} \log Z, \quad v = \frac{\omega}{\pi i} \log \frac{\rho_0^2}{q^2} Z,$$

si ottiene l'espressione

$$(8) \qquad \frac{1}{2} \log \left(\frac{r_{1,1}^2}{r_0^2} \prod_1^\infty \frac{\left(1 - q^{2n} e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{-\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{\frac{\pi i \bar{u}}{\omega}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{-\frac{\pi i \bar{u}}{\omega}}\right)}{\left(1 - q^{2n} e^{\frac{\pi i v}{\omega}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{-\frac{\pi i v}{\omega}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{\frac{\pi i \bar{v}}{\omega}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{-\frac{\pi i \bar{v}}{\omega}}\right)} \right).$$

Intanto

$$\frac{r_{1,1}^2}{r_0^2} = \frac{\left(z - \frac{q^2}{\rho_0}\right)\left(\bar{z} - \frac{q^2}{\rho_0}\right)}{(z - \rho_0)(\bar{z} - \rho_0)} = \frac{\frac{q^4}{\rho_0^2}\left(e^{-\frac{\pi i u}{\omega}} - 1\right)\left(e^{-\frac{\pi i \bar{u}}{\omega}} - 1\right)}{\rho_0^2\left(e^{-\frac{\pi i v}{\omega}} - 1\right)\left(e^{-\frac{\pi i \bar{v}}{\omega}} - 1\right)} =$$

$$= \frac{q^4}{\rho_0^4} e^{\frac{\pi i}{2\omega}(v-u)} e^{\frac{\pi i}{2\omega}(\bar{v}-\bar{u})} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi u}{2\omega} \operatorname{sen}\frac{\pi \bar{u}}{2\omega}}{\operatorname{sen}\frac{\pi v}{2\omega} \operatorname{sen}\frac{\pi \bar{v}}{2\omega}} = \frac{q^2}{\rho_0^2} \left| \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi u}{2\omega}}{\operatorname{sen}\frac{\pi v}{2\omega}} \right|^2.$$

Introduciamo ora la funzione di WEIERSTRASS σu, relativa ai periodi ω, ω' con $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{\pi i} \log q$.

Ricorrendo alla formula

$$e^{-\frac{\mu u^2}{2\omega}} \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} \operatorname{sen}\frac{\pi u}{2\omega} \prod_1^\infty \frac{\left(1 - q^{2n} e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{-\frac{\pi i u}{\omega}}\right)}{(1 - q^{2n})^2}$$

l'espressione (8) diventa

$$\log\frac{q}{\rho_0}+\frac{1}{2}\log\left\{\frac{e^{-\frac{\mu}{2\omega}u^2}\sigma u\, e^{-\frac{\mu}{2\omega}\bar{u}^2}\sigma\bar{u}}{e^{-\frac{q}{2\omega}v^2}\sigma v\, e^{-\frac{q}{2\omega}\bar{v}^2}\sigma\bar{v}}\right\}=\log\frac{q}{\rho_0}+\log\left|\frac{\sigma u}{\sigma v}\right|+$$

$$+\log\left|e^{-\frac{\mu}{2\omega}u^2+\frac{\mu}{2\omega}v^2}\right|.$$

L'ultimo logaritmo è uguale a

$$\frac{2\omega\mu}{\pi^2}\log\frac{\rho_0}{q}\log\frac{\rho}{q}=\frac{2\omega\mu}{\pi^2}\log\rho\log\rho_0+\frac{2q\omega'}{\pi i}\log\frac{\rho\,\rho_0}{q}.$$

D'altra parte si ha

$$u=\frac{\omega}{\pi i}\log\frac{1}{\rho_0\,\rho}-\frac{\varphi\omega}{\pi}+\frac{2\omega}{\pi i}\log q=\frac{\omega}{\pi i}\log\frac{1}{\rho_0\,\rho}-\frac{\varphi\,\omega}{\pi}+2\,\omega',$$

$$v=\frac{\omega}{\pi i}\log\frac{\rho_0}{\rho}-\frac{\varphi\,\omega}{\pi},$$

e ricordando che

$$\sigma(u+2\,\omega')=-\,e^{2\mu'(u+\omega')}\sigma u\ ,$$

si ottiene

$$\log\left|\frac{\sigma u}{\sigma v}\right|=\log\left|\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi i}\log\rho\,\rho_0+\frac{\varphi\omega}{\pi}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi i}\log\frac{\rho}{\rho_0}+\frac{\varphi\omega}{\pi}\right)}\right|+\log\left|e^{2\mu'(u+\omega')}\right|.$$

L'ultimo logaritmo è uguale a

$$-\frac{2\,\mu'\,\omega}{\pi i}\log\rho\,\rho_0+2\,\mu'\,\omega'=\frac{2\,\mu'\omega}{\pi i}\log\frac{q}{\rho\,\rho_0}.$$

Sostituendo questi risultati nell'espressione di g_2 e ricordando che

$$\mu\,\omega'-\mu'\,\omega=\frac{\pi i}{2}$$

si ottiene in definitiva

$$g_2 = \left(\frac{2\mu\omega}{\pi^2} + \frac{1}{\log q}\right) \log \rho \log \rho_0 + \log \left| \frac{\sigma\left(\frac{\varphi\omega}{\pi} - \frac{i\,\omega}{\pi} \log \rho\,\rho_0\right)}{\sigma\left(\frac{\varphi\omega}{\pi} - \frac{i\omega}{\pi} \log \frac{\rho}{\rho_0}\right)} \right| .$$

7. - A partire da questa espressione di g_2 si possono trovare, applicando le formole ricorrenti (6), (7), tutte le funzioni g relative a spazi ad un numero pari di dimensioni espresse in forma finita mediante funzioni ellittiche. Per es. per g_4 si trova

$$g_4 = \frac{\omega}{\pi\,\rho\,\rho_0 \operatorname{sen} \varphi} R \left[\zeta\left(\frac{\varphi\omega}{\pi} - \frac{i\omega}{\pi} \log \frac{\rho}{\rho_0}\right) - \zeta\left(\frac{\varphi\omega}{\pi} - \frac{i\omega}{\pi} \log \rho\,\rho_0\right) \right]$$

dove R è simbolo di parte reale.

Applicando poi alle ζ ad argomenti binomi il teorema di addizione della funzione ζ, e ricordando le proprietà delle funzioni ζ e $\wp$ ad invarianti reali, si trova ancora dopo alcune riduzioni

$$g_4 = \frac{\omega}{2\pi\,\rho\,\rho_0 \operatorname{sen} \varphi} \wp' \frac{\varphi\omega}{\pi} \left[\frac{1}{\wp \frac{\varphi\omega}{\pi} - \wp\left(\frac{i\omega}{\pi} \log \frac{\rho}{\rho_0}\right)} - \frac{1}{\wp \frac{\varphi\omega}{\pi} - \wp\left(\frac{i\omega}{\pi} \log \rho\rho_0\right)} \right] .$$

Dunque, a partire da g_4, le g con indice pari si esprimono mediante funzioni ellittiche in senso stretto, cioè doppiamente periodiche.

Quanto alle g relative a spazi ad un numero dispari di dimensioni, tutto quello che possiamo dire è che esse si esprimono in forma finita mediante le derivate di g_3. Ma la g_3 stessa sembra difficilmente esprimibile in forma finita, senza introdurre operazioni di quadratura.

Pervenuto in Redazione il 10 Gennaio 1943-XXI)