RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO TONOLO

Teoria tensoriale delle deformazioni finite dei corpi solidi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 14 (1943), p. 43-117

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1943__14__43_0>

TEORIA TENSORIALE DELLE DEFORMAZIONI FINITE DEI CORPI SOLIDI

Memoria di ANGELO TONOLO *(Padova).*

INTRODUZIONE

Fra le varie applicazioni che fece il RICCI del suo Calcolo Assoluto a quistioni geometriche o di Fisica matematica, quella alla teoria della elasticità dei corpi solidi non è stata da lui pubblicata, sebbene ciò fosse nelle sue intenzioni, come risulta dalla seguente frase: « On consultera à ce propos: RICCI, Lezioni sulla teoria dell'elasticità qui paraîtront prochainement », che si trova nell'ultima pagina della Memoria di RICCI e LEVI-CIVITA « Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications » pubblicata nel Volume LIV dei « Mathematische Annalen ». Fortunatamente queste « Lezioni » sono tutte contenute nei fogli di un suo manoscritto che egli usava passare per la copia ai suoi allievi del Corso di Fisica matematica. In esso la teoria dell'elasticità dei corpi solidi è limitata alle deformazioni infinitesime.

L'impiego degli stessi metodi, con referenza alla teoria delle deformazioni finite, e lo svolgimento degli stessi argomenti, almeno per ciò che riguarda la Cinematica di tali deformazioni, costituiscono l'oggetto della Parte prima della presente Memoria. Nozioni classiche vengono qui sistematicamente trattate con i canoni di questo Calcolo e pertanto nulla di nuovo nei risultati si troverà in questa Parte. Ho voluto che la presente trattazione della Cinematica delle deformazioni finite fosse il più possibile aderente a quella fatta dal Ricci delle deformazioni infinitesime; perciò ho esposto nel § V, in coordinate cartesiane, argomenti che sono notissimi ai cultori di questa teoria; pertanto, in qualche punto, ho creduto opportuno tralasciare certi dettagli di dimostrazione e addirittura di non esporre la teoria delle quadriche di deformazione che si trova invece nel manoscritto del Ricci.

Naturalmente questa aderenza alle « Lezioni » si perde nella seconda Parte della presente ricerca, ove è studiata la Statica delle deformazioni finite. Nella trattazione delle deformazioni infinitesime, la riduzione a forma lagrangiana delle equazioni di equilibrio di Cauchy è immediata, potendo identificare le variabili euleriane a quelle lagrangiane. Ciò non è più lecito quando si tratta di deformazioni finite. Ho stabilito dapprima, per via diretta, con riferimento a coordinate curvilinee euleriane, le equazioni di equilibrio di Cauchy sotto forma tensoriale. Un giudizioso maneggio di formule permette di passare da queste equazioni a quelle ove figurano come variabili di riferimento le lagrangiane, ottenendo così le equazioni di Kirchhoff-Brillouin in coordinate generali. Da queste ho dedotto le equazioni di equilibrio del Boussinesq e quelle del Signorini, attribuendo, sia alle une che alle altre, forma tensoriale.

In ognuno di tali sistemi il numero delle equazioni è sempre minore di quello delle incognite. Se supponiamo che ad ogni particella elementare del corpo corrisponda un determinato valore di una funzione delle sole caratteristiche locali di deformazione, tale, che per qualsiasi trasformazione elementare del mezzo, il corrispondente lavoro delle forze interne, relativo all'unità di volume, eguagli la variazione che subisce la funzione in discorso, allora si può ottenere il pareggiamento fra il numero delle equazioni ed il numero delle incognite. Basta infatti sostituire in tale funzione - che si chiama, come è noto, il potenziale termodinamico, e che esiste sempre nell'ipotesi dei mezzi continui soggetti a trasformazioni reversibili, esenti da vincoli interni, isoterme o adiabatiche – al posto delle componenti di deformazione le loro esplicite espressioni in funzione delle derivate prime covarianti delle componenti dello spostamento della particella dalla sua posizione iniziale, perchè le tre equazioni indefinite tensoriali di

KIRCHHOFF–BRILLOUIN si trasformino in un sistema a derivate parziali del second'ordine, ove figurano soltanto tre incognite, che sono le componenti covarianti dello spostamento in discorso. Il pareggio fra il numero delle equazioni e quello delle incognite è così raggiunto.

Ho posto fine alla ricerca con brevi considerazioni sui corpi solidi isotropi, assegnando le tensioni principali mediante le formule dell' ALMANSI (*).

(*) Autori che, a mia conoscenza, si sono occupati di quistioni spettanti alla teoria delle deformazioni finite con il metodo tensoriale, sono i seguenti: L. BRILLOUIN, *Les lois de l'élasticité sous forme tensorielle valable pour des coordonnées quelconque*, [Annales de Physique, Xe Série, Tome III, (1925)]; Th. DE DONDER, *Théorie invariantive de l' Élasticité à déformations finies*, [Acad. Royale de Belgique, Bull. Classe des Sciences, 5a Série, t. 17, (1931)]; B. FINZI, *Tensori elastici per deformazioni finite*, [Boll. della U. M. I., Anno X, (1931)]; Y. DUPONT, *Sur la théorie invariantive de l'élasticité à déformations finies*, [Comptes Rendus, t. 192, (1931)]; F. D. MURNAGHAN, *Finite deformations of an elastic solid*, [American Journal of Math., vol. LIX, (1936)]; U. CISOTTI, *Meccanica razionale*, [Libreria Editrice politecnica, 4a edizione, Milano, (1942)]; C. TOLOTTI, *Le equazioni lagrangiane della meccanica dei sistemi continui in coordinate generali*, [Rend. dell'Acc. delle Sc. Fis. e Mat. di Napoli, Vol. XIII, serie 4a, (1943)].

In tale teoria trovano posto di primo piano le ricerche del SIGNORINI. Nella recente Memoria Ia. – *Trasformazioni termoelastiche finite*, [Annali di matematica, Tomo XXII, Serie IV, (1943)], si trova una esposizione vettoriale dettagliata e completa dei suoi studi di cinematica e dinamica delle deformazioni finite, compresi gli ultimi contributi che egli ha apportato alla teoria in discorso

PARTE PRIMA

Cinematica delle deformazioni finite

§ 1. - *Riferimento lagrangiano. Il tensore di deformazione. Formule fondamentali.*

1. *Preliminari.* Sia $(\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau, \omega; h, i, j, k, l, m, n, r, s, u, v = 1, 2, 3)$

$$ds^2 = a_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma \tag{1}$$

l'espressione del quadrato dell'elemento lineare dello spazio euclideo a tre dimensioni riferito a coordinate curvilinee x^λ quali si vogliano. Denotiamo con a il discriminante della forma (1) e con $a^{\rho\sigma}$ i coefficienti della sua forma reciproca. Una determinata regione connessa di questo spazio sia occupata da un mezzo continuo S. Si supponga che questo mezzo subisca una deformazione, in virtù della quale ogni suo punto passi da una posizione P, che diremo *iniziale*, ad un'altra posizione P_1, che diremo *finale*. In conformità, l'insieme dei punti P costituirà la *configurazione* (*o stato*) *iniziale* del mezzo, che denoteremo con S_P, mentre sarà indicata con S_{P_1} la *configurazione* (*o stato*) *finale o deformata* del mezzo che è costituita dall'insieme dei punti P_1. Siano x^λ e X^λ i valori delle coordinate curvilinee dei punti P e P_1; le X^λ saranno manifestamente funzioni delle x^λ

$$X^\lambda = f^\lambda(x^1, x^2, x^3), \tag{2}$$

che noi ammetteremo uniformi, finite e continue assieme alle loro derivate parziali fino al terzo ordine almeno, in tutti i punti di S_P. Supporremo inoltre che anche le x^λ

$$x^\lambda = \varphi^\lambda(X^1, X^2, X^3) \tag{3}$$

siano funzioni uniformi, finite e continue assieme alle loro derivate parziali fino al terzo ordine almeno, in tutti i punti di S_{P_1}. Pertanto, la corrispondenza fra i punti delle due configurazioni iniziale e finale del mezzo S va pensata come biunivoca senza eccezioni; perciò è necessario supporre che il determinante funzionale

$$\Delta = \frac{\partial (X^1, X^2, X^3)}{\partial (x^1, x^2, x^3)}$$

sia privo in S_P di valori di segno opposto. Noi ammetterremo che in tutto questo campo sia sempre

$$\Delta > 0 .$$

Volendo uniformarsi a locuzioni costantemente usate in idrodinamica, chiameremo le x^λ *variabili lagrangiane e le* X^λ *variabili euleriane.*

2. *Il tensore di deformazione. Sua espressione in funzione delle* $u^\lambda = X^\lambda - x^\lambda$ *e le loro derivate.* Ai due punti P e P' infinitamente vicini del mezzo iniziale di coordinate rispettive x^λ e $x^\lambda + dx^\lambda$ la cui distanza ds, elevata a quadrato, è data dalla forma (1), corrispondono nel mezzo finale due punti infinitamente vicini P_1 e P'_1, di coordinate rispettive X^λ e $X^\lambda + dX^\lambda$ che si ottengono dalle (2), e la cui distanza ds_1, elevata a quadrato, è data, in conformità alla (1), da

$$ds_1^2 = a_{\rho\sigma}(X^\lambda)\, dX^\rho dX^\sigma . \tag{4}$$

Posto

$$\vartheta^\rho_\mu = \frac{\partial X^\rho}{\partial x^\mu} ,$$

si ha

$$dX^\rho = \vartheta^\rho_\mu \, dx^\mu ,$$

e quindi, sostituendo in (4), si trae

(5) $$ds_1^2 = b_{\rho\sigma}(x^\lambda)\, dx^\rho\, dx^\sigma,$$

ove

$$b_{\rho\sigma}(x^\lambda) = a_{\mu\nu}(X^\lambda)\, \vartheta^\mu_\rho\, \vartheta^\nu_\sigma,$$

nelle quali formule intendiamo le X^λ surrogate dalle (2). La variazione $ds_1^2 - ds^2$ del quadrato della distanza ds dei due punti P e P' del mezzo iniziale, per effetto della deformazione (2), è pertanto

(6) $$ds_1^2 - ds^2 = 2\, \xi_{\rho\sigma}(x^\lambda)\, dx^\rho\, dx^\sigma,$$

avendo posto

(7) $$2\, \xi_{\rho\sigma}(x^\lambda) = b_{\rho\sigma}(x^\lambda) - a_{\rho\sigma}(x^\lambda).$$

Le $\xi_{\rho\sigma}(x^\lambda)$ costituiscono un tensore doppio covariante simmetrico che chiameremo *tensore di deformazione*, le cui componenti $\xi_{\rho\sigma}(x^\lambda)$ saranno ànche chiamate *caratteristiche di deformazione.*

La ragione di questo appellativo sta nel fatto che esse intervengono nella determinazione delle alterazioni che subiscono, per effetto della deformazione, le lunghezze degli elementi lineari del mezzo iniziale e gli angoli che formano tra loro due di questi elementi uscenti da un medesimo punto del corpo. Per mostrare quanto abbiamo ora asserito, cominciamo a stabilire dapprima alcune formule generali che sono fondamentali in questa teoria.

Siano $ds = PP'$ e $\delta s = PQ'$ due elementi lineari quali si vogliono uscenti da P del mezzo S_P, il cui angolo, compreso fra zero e π, denoteremo con Θ. I punti P, P', Q' abbiano rispettivamente per coordinate x^λ, $x^\lambda + dx^\lambda$, $x^\lambda + \delta x^\lambda$. Siano P_1, P_1', Q_1' le posizioni assunte da questi punti nel mezzo deformato, di coordinate rispettive X^λ, $X^\lambda + dX^\lambda$, $X^\lambda + \delta X^\lambda$; denotiamo con Θ_1 l'angolo, con la precedente limitazione, formato dagli elementi lineari $ds_1 = P_1 P_1'$, $\delta s_1 = P_1 Q_1'$. Valgono le formule

$$(8) \qquad ds\,\delta s \cos\Theta = a_{\rho\sigma}(x^\lambda)\, dx^\rho\, \delta x^\sigma,$$

$$(9) \qquad ds_1\,\delta s_1 \cos\Theta_1 = a_{\rho\sigma}(X^\lambda)\, dX^\rho\, \delta X^\sigma.$$

Poniamo [1]:

$$X^\lambda = x^\lambda + u^\lambda\,(x^1,\ x^2,\ x^3).$$

Si ha

$$a_{\rho\sigma}(X^\lambda) = a_{\rho\sigma}(x^\lambda) + \frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} u^\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} u^\mu u^\nu + \ldots,$$

e quindi, sostituendo nella (9), si trae

$$ds_1\,\delta s_1 \cos\Theta_1 = \left[a_{\rho\sigma} + \frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} u^\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} u^\mu u^\nu + \ldots\right]$$
$$[dx^\rho + du^\rho]\,[\delta x^\sigma + \delta u^\sigma],$$

donde, sviluppando i prodotti, si ottiene

$$(10) \qquad ds_1\,\delta s_1 \cos\Theta_1 = ds\,\delta s\cos\Theta + a_{\rho\sigma}(dx^\rho\,\delta u^\sigma + \delta x^\sigma\, du^\rho +$$
$$+ du^\rho\,\delta u^\sigma) + \frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu}(dx^\rho\,\delta x^\sigma + dx^\rho\,\delta u^\sigma + \delta x^\sigma\, du^\rho + du^\rho\,\delta u^\sigma)\, u^\mu +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu}(dx^\rho\,\delta x^\sigma + dx^\rho\,\delta u^\sigma + \delta x^\sigma\, du^\rho + du^\rho\,\delta u^\sigma)\, u^\mu u^\nu + \ldots.$$

[1] Abbiamo indicato con gli indici in alto u^λ le differenze $X^\lambda - x^\lambda$; ma esse, nelle variabili x^λ, non possono essere considerate come le componenti di un vettore contravariante; lo sono nel caso delle deformazioni infinitesime. Per questa ragione abbiamo fatto uso della notazione u^λ anche per il caso delle deformazioni finite.

Cominciamo a trasformare la somma

$$A = a_{\rho\sigma}(dx^\rho\,\delta u^\sigma + \delta x^\sigma\,du^\rho) + \frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu}\,u^\mu\,dx^\rho\,\delta x^\sigma .$$

Con referenza alla (1), facciamo le posizioni (²):

(11) $$u_\rho = a_{\rho\sigma} u^\sigma ,$$

(12) $$\nabla_\mu u^\sigma = \frac{\partial u^\sigma}{\partial x^\mu} + \begin{Bmatrix} \sigma \\ \lambda\ \mu \end{Bmatrix} u^\lambda ,$$

(13) $$\nabla_\mu u_\sigma = \frac{\partial u_\sigma}{\partial x^\mu} - \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\ \sigma \end{Bmatrix} u_\lambda .$$

Abbiamo

$$a_{\rho\sigma}\,dx^\rho\,\delta u^\sigma = a_{\rho\sigma}\frac{\partial u^\sigma}{\partial x^\mu}\,dx^\rho\,\delta x^\mu =$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,a_{\rho\sigma} u^\sigma - \frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu}\,u^\sigma \right\} dx^\rho\,\delta x^\mu .$$

Ricordando che

(14) $$\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} = \begin{bmatrix} \sigma \\ \mu\ \rho \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho \\ \mu\ \sigma \end{bmatrix} ,$$

risulta dalla precedente

(15) $$a_{\rho\sigma}\,dx^\rho\,\delta u^\sigma = \left\{ \nabla_\mu u_\rho - \begin{bmatrix} \rho \\ \lambda\ \mu \end{bmatrix} u^\lambda \right\} dx^\rho\,\delta x^\mu .$$

Similmente si ottiene

(16) $$a_{\rho\sigma}\,\delta x^\sigma\,du^\rho = \left\{ \nabla_\rho u_\mu - \begin{bmatrix} \mu \\ \lambda\ \rho \end{bmatrix} u^\lambda \right\} dx^\rho\,\delta x^\mu .$$

(²) Il simbolo ∇_μ non è qui adoperato come simbolo di derivazione covariante; lo diventa nel caso delle deformazioni infinitesime.

Sommando le (15), (16) e tenendo presente le (14) si trova, con ovvio scambio di indici,

$$A = \{ \nabla_\rho u_\sigma + \nabla_\sigma u_\rho \} dx^\rho \delta x^\sigma . \tag{17}$$

Trasformiamo la somma

$$B = a_{\rho\sigma} du^\rho \delta u^\sigma + \frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} (dx^\rho \delta u^\sigma + \delta x^\sigma du^\rho) u^\mu +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} u^\mu u^\nu dx^\rho \delta x^\sigma .$$

Si può scrivere

$$B = \left\{ a_{\rho\sigma} \frac{\partial u^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial u^\sigma}{\partial x^\nu} + \frac{\partial a_{\sigma\mu}}{\partial x^\omega} \frac{\partial u^\sigma}{\partial x^\nu} u^\omega + \frac{\partial a_{\rho\nu}}{\partial x^\omega} \frac{\partial u^\rho}{\partial x^\mu} u^\omega \right\} dx^\mu \delta x^\nu +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} u^\mu u^\nu dx^\rho \delta x^\sigma .$$

Sostituiamo al posto delle derivate delle funzioni u^λ le loro espressioni ricavate dalle (12) e al posto delle derivate prime delle funzioni $a_{\rho\sigma}$ le espressioni (14); si trae

$$a_{\rho\sigma} \frac{\partial u^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial u^\sigma}{\partial x^\nu} = a_{\rho\sigma} \left[\nabla_\mu u^\rho - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\ \mu \end{matrix} \right\} u^\lambda \right] \left[\nabla_\nu u^\sigma - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \tau\ \nu \end{matrix} \right\} u^\tau \right] =$$

$$= a_{\rho\sigma} \nabla_\mu u^\rho \nabla_\nu u^\sigma - \left[\begin{matrix} \sigma \\ \lambda\ \mu \end{matrix} \right] u^\lambda \nabla_\nu u^\sigma - \left[\begin{matrix} \rho \\ \tau\ \nu \end{matrix} \right] u^\tau \nabla_\mu u^\rho +$$

$$+ \left[\begin{matrix} \sigma \\ \lambda\ \mu \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \tau\ \nu \end{matrix} \right\} u^\lambda u^\tau ,$$

$$\frac{\partial a_{\sigma\mu}}{\partial x^\omega} \frac{\partial u^\sigma}{\partial x^\nu} u^\omega = \left\{ \left[\begin{matrix} \mu \\ \omega\ \sigma \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} \sigma \\ \omega\ \mu \end{matrix} \right] \right\} \frac{\partial u^\sigma}{\partial x^\nu} u^\omega ,$$

$$\frac{\partial a_{\rho\nu}}{\partial x^\omega} \frac{\partial u^\rho}{\partial x^\mu} u^\omega = \left\{ \left[\begin{matrix} \nu \\ \omega\ \rho \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} \rho \\ \omega\ \nu \end{matrix} \right] \right\} \frac{\partial u^\rho}{\partial x^\mu} u^\omega .$$

Ne consegue

$$B = \Bigg[a_{\rho\sigma} \nabla_\mu u^\rho \nabla_\nu u^\sigma + \begin{bmatrix} \rho \\ \lambda\ \nu \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial u^\rho}{\partial x^\mu} - \nabla_\mu u^\rho \right\} u^\lambda +$$

$$+ \begin{bmatrix} \sigma \\ \lambda\ \mu \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial u^\sigma}{\partial x^\nu} - \nabla_\nu u^\sigma \right\} u^\lambda + \begin{bmatrix} \mu \\ \lambda\ \sigma \end{bmatrix} \frac{\partial u^\sigma}{\partial x^\nu} u^\lambda +$$

$$+ \begin{bmatrix} \nu \\ \lambda\ \rho \end{bmatrix} \frac{\partial u^\rho}{\partial x^\mu} u^\lambda + \begin{bmatrix} \sigma \\ \lambda\ \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau\ \nu \end{Bmatrix} u^\lambda u^\tau \Bigg] dx^\mu \delta x^\nu +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} u^\mu u^\nu dx^\rho \delta x^\sigma .$$

Facendo uso ancora delle (12) per trasformare le differenze racchiuse tra le parentesi $\{\ \}$, dopo ovvie riduzioni e cambiamento di indici, si trova

$$B = \Bigg[\nabla_\rho u_\mu \nabla_\sigma u^\mu + \left\{ \begin{bmatrix} \sigma \\ \mu\ \nu \end{bmatrix} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\rho} + \begin{bmatrix} \rho \\ \mu\ \nu \end{bmatrix} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\sigma} \right\} u^\mu + \tag{18}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \begin{bmatrix} \omega \\ \mu\ \rho \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega \\ \nu\ \sigma \end{Bmatrix} \right\} u^\mu u^\nu \Bigg] dx^\rho \delta x^\sigma .$$

In virtù delle (17), (18), si trae dalla (10) la formula fondamentale

$$ds_1 \delta s_1 \cos \Theta_1 = ds\, \delta s \cos \Theta + \tag{19}$$

$$+ \{ \nabla_\rho u_\sigma + \nabla_\sigma u_\rho + \nabla_\rho u_\mu \nabla_\sigma u^\mu \} dx^\rho \delta x^\sigma +$$

$$+ \left\{ \begin{bmatrix} \sigma \\ \mu\ \nu \end{bmatrix} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\rho} + \begin{bmatrix} \rho \\ \mu\ \nu \end{bmatrix} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\sigma} \right\} u^\mu dx^\rho \delta x^\sigma +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \begin{bmatrix} \omega \\ \mu\ \rho \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega \\ \nu\ \sigma \end{Bmatrix} \right\} u^\mu u^\nu dx^\rho \delta x^\sigma + \dots .$$

In questa facciamo $\Theta = \Theta_1 = 0$; ricaviamo allora dalle (6) per il doppio delle caratteristiche di deformazione in coordinate lagrangiane la formula definitiva ([3])

$$(20)\quad 2\xi_{\rho\sigma} = \nabla_\rho u_\sigma + \nabla_\sigma u_\rho + \nabla_\rho u_\mu \nabla_\sigma u^\mu + \left\{ \begin{bmatrix} \sigma \\ \mu\ \nu \end{bmatrix} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\rho} + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} \rho \\ \mu\ \nu \end{bmatrix} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\sigma} \right\} u^\mu + \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \begin{bmatrix} \omega \\ \mu\ \rho \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega \\ \nu\ \sigma \end{Bmatrix} \right\} u^\mu u^\nu + \ldots$$

Possiamo pertanto dare alla (19) la seguente forma

$$(21)\qquad ds_1\, \delta s_1 \cos\Theta_1 = ds\, \delta s \cos\Theta + 2\,\xi_{\rho\sigma}\, dx^\rho\, \delta x^\sigma \ .$$

Osservazione. Nell'*elasticità di 1º grado*, o di *1ª approssimazione*, nelle espressioni ora assegnate delle $\xi_{\rho\sigma}$ si tien conto soltanto dei termini che contengono le u^ρ e le loro derivate prime al primo grado. In conformità a questo criterio, si ha

$$(22)\qquad 2\,\xi_{\rho\sigma} = \nabla_\rho u_\sigma + \nabla_\sigma u_\rho \ .$$

Nell'*elasticità di 2º grado*, o *di 2ª approssimazione*, nelle espressioni delle $\xi_{\rho\sigma}$ si tien conto soltanto dei termini che contengono le u^ρ e le loro derivate prime al primo e secondo grado. In conformità, dobbiamo scrivere

$$(23)\qquad \begin{aligned} 2\,\xi_{\rho\sigma} = {} & \nabla_\rho u_\sigma + \nabla_\sigma u_\rho + \nabla_\rho u_\mu \nabla_\sigma u^\mu + \\ & + \left\{ \begin{bmatrix} \sigma \\ \mu\ \nu \end{bmatrix} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\rho} + \begin{bmatrix} \rho \\ \mu\ \nu \end{bmatrix} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\sigma} \right\} u^\mu + \\ & + \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \begin{bmatrix} \omega \\ \mu\ \rho \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega \\ \nu\ \sigma \end{Bmatrix} \right\} u^\mu u^\nu \ . \end{aligned}$$

([3]) Queste espressioni delle $\xi_{\rho\sigma}$ si trovano nella Memoria del Brillouin (pag. 268) citata nella nota (*) dell'Introduzione.

Nell'*elasticità di n–simo grado,* o *di n–sima approssimazione,* nelle espressioni delle $\xi_{\rho\sigma}$ si tien conto soltanto dei termini che contengono le u^ρ e le loro derivate prime al primo, secondo, ... n-simo grado (4).

3. *Riferimento a coordinate cartesiane ortogonali.* Le espressioni (23) delle $\xi_{\rho\sigma}$ si semplificano notevolmente, se identifichiamo le coordinate curvilinee x^λ ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali y^λ. In tal caso, avendosi

$$a_{\rho\sigma} = \begin{cases} 1 \text{ per } \rho = \sigma, \\ 0 \quad \text{»} \quad \rho \neq \sigma, \end{cases}$$

si ha

$$u_\rho = u^\rho, \qquad \nabla_\rho u_\sigma = \frac{\partial u_\sigma}{\partial y^\rho},$$

e quindi le (23) si riducono alle seguenti

$$2\,\xi_{\rho\sigma} = \frac{\partial u_\rho}{\partial y^\sigma} + \frac{\partial u_\sigma}{\partial y^\rho} + \frac{\partial u_\mu}{\partial y^\rho}\frac{\partial u_\mu}{\partial y^\sigma},$$

che sono ben note nella teoria delle deformazioni finite in coordinate cartesiani ortogonali.

4. *Trasformazione delle* (23) *in forma tensoriale.* Con riferimento alle linee coordinate x^λ passanti per P, denotiamo con v^λ le componenti contravarianti dello spostamento PP_1. (Ricordiamo che allora i prodotti $\sqrt{a_{\lambda\lambda}}\,v^\lambda$ rappresentano le componenti di PP_1 secondo le linee coordinate passanti per P).

Per trovare la relazione che passa fra le u^λ e le v^λ, si osservi che denotando con Y^λ, y^λ rispettivamente le coordinate

(4) Cfr. la Nota del Dupont citata in (*) dell' Introduzione.

cartesiane dei punti P_1 e P, si ha

$$v^\lambda = (Y^\rho - y^\rho)\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\rho},$$

od anche, se diciamo

$$y^\lambda = y^\lambda\,(x^1,\ x^2,\ x^3)$$

le formule di trasformazione fra le coordinate cartesiane y^λ e le curvilinee x^λ nel mezzo iniziale,

$$v^\lambda = \{\, y^\rho\,(X^\mu) - y^\rho\,(x^\mu)\,\}\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\rho} = \{\, y^\rho\,(x^\mu + u^\mu) - y^\rho\,(x^\mu)\,\}\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\rho} =$$

$$= \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\rho}\,u^\mu + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu}\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\rho}\,u^\mu\,u^\nu .$$

Con riferimento alla forma (1), è notorio che si ha

$$\frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} = \left\{ {\omega \atop \mu\ \nu} \right\} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\omega} .$$

Sostituendo nella precedente e tenendo conto delle identità

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\rho}\,\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu} = \delta^\lambda_\mu\ ,\quad \delta^\lambda_\mu = \begin{cases} 1 & \text{per } \lambda = \mu, \\ 0 & \text{»} \quad \lambda \neq \mu . \end{cases}$$

si deducono le formule definitive

$$v^\lambda = u^\lambda + \frac{1}{2}\left\{ {\lambda \atop \mu\ \nu} \right\} u^\mu\,u^\nu ,$$

donde

$$v_\lambda = u_\lambda + \frac{1}{2}\left[{\lambda \atop \mu\ \nu} \right] u^\mu\,u^\nu .$$

Da queste si traggono le equivalenti

$$(24)\qquad \begin{cases} u^\lambda = v^\lambda - \dfrac{1}{2}\begin{Bmatrix}\lambda \\ \mu\ \nu\end{Bmatrix} v^\mu v^\nu , \\[2ex] u_\lambda = v_\lambda - \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\lambda \\ \mu\ \nu\end{bmatrix} v^\mu v^\nu . \end{cases}$$

Ponendo le (24) nelle (23) e trascurando i termini che sono di grado superiore al secondo nelle v^λ e le loro derivate prime, si ottiene

$$(25)\qquad 2\,\xi_{\rho\sigma} = \nabla_\rho\, v_\sigma + \nabla_\sigma\, v_\rho + \nabla_\rho\, v_\mu\, \nabla_\sigma\, v^\mu +$$
$$+ \left\{ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} - \begin{bmatrix}\omega \\ \mu\ \rho\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\omega \\ \nu\ \sigma\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}\omega \\ \mu\ \nu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\omega \\ \rho\ \sigma\end{Bmatrix} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\begin{bmatrix}\sigma \\ \mu\ \nu\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\begin{bmatrix}\rho \\ \mu\ \nu\end{bmatrix}\right\} v^\mu\, v^\nu .$$

Ora si osservi che i simboli di Riemann relativi alla forma (1) sono tutti nulli, perciò possiamo scrivere

$$(\mu\sigma,\nu\rho) = \frac{\partial}{\partial x^\rho}\begin{bmatrix}\sigma \\ \mu\ \nu\end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\begin{bmatrix}\sigma \\ \mu\ \rho\end{bmatrix} + \begin{Bmatrix}\lambda \\ \mu\ \rho\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda \\ \nu\ \sigma\end{bmatrix} - \begin{Bmatrix}\lambda \\ \mu\ \nu\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda \\ \rho\ \sigma\end{bmatrix} = 0.$$

$$(\mu\rho,\nu\sigma) = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\begin{bmatrix}\rho \\ \mu\ \nu\end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\begin{bmatrix}\rho \\ \mu\ \sigma\end{bmatrix} + \begin{Bmatrix}\lambda \\ \mu\ \sigma\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda \\ \nu\ \rho\end{bmatrix} - \begin{Bmatrix}\lambda \\ \mu\ \nu\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda \\ \sigma\ \rho\end{bmatrix} = 0.$$

Sommando e ricordando che

$$\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} = \begin{bmatrix}\sigma \\ \nu\ \rho\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\rho \\ \nu\ \sigma\end{bmatrix},$$

si ricava

$$(26)\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\begin{bmatrix}\sigma \\ \mu\ \nu\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\begin{bmatrix}\rho \\ \mu\ \nu\end{bmatrix} - \begin{Bmatrix}\lambda \\ \mu\ \nu\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda \\ \rho\ \sigma\end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} - \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\lambda \\ \mu\ \rho\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda \\ \nu\ \sigma\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\lambda \\ \mu\ \sigma\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda \\ \nu\ \rho\end{bmatrix}.$$

Se infine osserviamo che si ha

$$\left\{ {\lambda \atop \nu\ \rho} \right\} \left[{\lambda \atop \mu\ \sigma} \right] = \left[{\lambda \atop \nu\ \rho} \right] \left\{ {\lambda \atop \mu\ \sigma} \right\},$$

e si scambiano gli indici di sommatoria μ e ν, si vede dalle (26) che è nullo nelle (25) il coefficiente del prodotto $v^\mu v^\nu$. Si ricava pertanto la formula tensoriale definitiva

$$2\,\xi_{\rho\sigma} = \nabla_\rho v_\sigma + \nabla_\sigma v_\rho + \nabla_\rho v_\mu \nabla_\sigma v^\mu . \tag{27}$$

§ 2. - *Variazioni che subiscono gli elementi lineari del mezzo iniziale e variazioni dell'angolo di due elementi lineari uscenti da uno stesso punto per effetto della deformazione. Dilatazione cubica. Invarianti principali di deformazione.*

1. *Coefficiente di dilatazione lineare.* Nella formula (21) identifichiamo PQ' con PP' e di conseguenza $P_1 Q_1'$ con $P_1 P_1'$: si trae, per la (6),

$$ds_1^2 - ds^2 = 2\,\xi_{\rho\sigma}(x^\lambda)\, dx^\rho\, dx^\sigma = 2\,\psi . \tag{28}$$

Si chiama *quadrica differenziale di deformazione* la quadrica che ha per coefficienti le caratteristiche di deformazione, cioè la

$$\psi = \xi_{\rho\sigma}(x^\lambda)\, dx^\rho\, dx^\sigma .$$

Siano λ^ν i parametri di direzione dell' elemento lineare $ds = PP'$, cioè i rapporti

$$\lambda^\nu = \frac{dx^\nu}{ds} .$$

In forza della (1), essi sono vincolati fra loro dalla relazione quadratica

$$a_{\rho\sigma}\lambda^\rho \lambda^\sigma = 1 .$$

Chiameremo *coefficiente di dilatazione lineare* relativo al punto P e alla direzione individuata dai parametri λ^ν, il rapporto

$$\varepsilon = \frac{ds_1 - ds}{ds} = \frac{ds_1}{ds} - 1 .$$

La sua espressione in funzione delle $\xi_{\rho\sigma}$ e delle λ^ν si ottiene subito dalla (28), ed è la seguente:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 2\,\xi_{\rho\sigma}\lambda^\rho\lambda^\sigma} - 1 . \tag{29}$$

2. *Scorrimenti.* Si chiama *scorrimento mutuo dei due elementi lineari PP'* e *PQ'*, la differenza $\Theta - \Theta_1$ degli angoli che essi formano prima e dopo la deformazione. Per calcolarlo, denotiamo con μ^ν i parametri di direzione dell'elemento PQ', e sia ε_1 il coefficiente di dilatazione lineare relativo all'elemento PQ'. Dalle formule (8) e (21) si ricavano le altre

$$\cos\Theta = a_{\rho\sigma}\lambda^\rho\mu^\sigma , \tag{30}$$

$$\cos\Theta_1 = \frac{(a_{\rho\sigma} + 2\,\xi_{\rho\sigma})\,\lambda^\rho\mu^\sigma}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)} , \tag{31}$$

dalle quali si calcola la differenza $\Theta - \Theta_1$.

Supponiamo ortogonali i due elementi PP' e PQ'; essendo allora $\Theta = \frac{\pi}{2}$, dalla (31) si trae

$$\cos\Theta_1 = \frac{2\,\xi_{\rho\sigma}\lambda^\rho\mu^\sigma}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)} .$$

Posto

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \Theta_1 ,$$

si vede che lo scorrimento φ relativo alle due direzioni ortogonali $ds = PP'$ e $\delta s = PQ'$ spiccate dallo stesso punto P, si ottiene dalla formula

$$(32) \qquad \frac{ds_1}{ds}\,\frac{\delta s_1}{\delta s}\,\operatorname{sen}\varphi = 2\,\xi_{\rho\sigma}\,\lambda^{\rho}\,\mu^{\sigma}\,.$$

Supponiamo ortogonali le linee coordinate x^{λ} e denotiamo con λ^{μ}_{h} i parametri di direzione della congruenza $[h]$ individuata dalla intersezione delle superficie coordinate $x^{h+1} =$ cost., $x^{h+2} =$ cost. Abbiamo allora

$$\lambda^{\mu}_{h} = \frac{1}{\sqrt{a_{hh}}}\,\delta^{\mu}_{h}\,, \qquad \delta^{\mu}_{h} = \begin{cases} 1 & \text{per } \mu = h\,, \\ 0 & \text{»} \quad \mu \neq h\,. \end{cases}$$

Ne consegue che il coefficiente ε_h di dilatazione lineare dell'elemento ds_h della linea h passante per P che appartiene alla congruenza $[h]$, è dato da

$$(33) \qquad \varepsilon_h = \sqrt{1 + 2\,\frac{\xi_{hh}}{a_{hh}}} - 1\,.$$

Diciamo φ_h lo scorrimento relativo agli elementi lineari ds_{h+1} e ds_{h+2} uscenti da un medesimo punto P delle linee $h+1$, $h+2$ appartenenti alle congruenze $[h+1]$, $[h+2]$, e teniamo presente che, in base alla (33), si ha

$$\frac{ds_{1\,h+1}}{ds_{h+1}} = \sqrt{1 + 2\,\frac{\xi_{h+1\,h+1}}{a_{h+1\,h+1}}}\,,$$

$$\frac{ds_{1\,h+2}}{ds_{h+2}} = \sqrt{1 + 2\,\frac{\xi_{h+2\,h+2}}{a_{h+2\,h+2}}}\,.$$

Dalla (32) si ricava allora

$$(34) \qquad \sqrt{1 + 2\,\frac{\xi_{h+1\,h+1}}{a_{h+1\,h+1}}}\;\sqrt{1 + 2\,\frac{\xi_{h+2\,h+2}}{a_{h+2\,h+2}}}\;\operatorname{sen}\varphi_h = \frac{2\,\xi_{h+1\,h+2}}{\sqrt{a_{h+1\,h+1}\,a_{h+2\,h+2}}}\,.$$

Le (33), (34) giustificano l'appellativo di caratteristiche di deformazione dato alle funzioni $\xi_{\rho\sigma}$.

Con riferimento a coordinate cartesiane ortogonali y^λ, si ha $a_{\rho\sigma} = 1$ per $\rho = \sigma$ e $a_{\rho\sigma} = 0$ per $\rho \neq \sigma$; inoltre le λ^ν relative all'elemento ds si identificano con i coseni direttori α_ν di questo elemento. Le (29), (33), (34) si riducono pertanto alle formule ben note

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 2\xi_{\rho\sigma}\alpha_\rho\alpha_\sigma} - 1\,,$$

$$\varepsilon_h = \sqrt{1 + 2\xi_{hh}} - 1\,,$$

$$\sqrt{1 + 2\xi_{h+1\,h+1}}\,\sqrt{1 + 2\xi_{h+2\,h+2}}\,\operatorname{sen}\varphi_h = 2\xi_{h+1\,h+2}\,.$$

3. *Dilatazione cubica. Invarianti principali di deformazione.*

Sia dS l'elemento di volume relativo al punto P del corpo nello stato iniziale e dS_1 il corrispondente elemento di volume relativo al punto P_1 del corpo nello stato finale. Si chiama *coefficiente di dilatazione cubica* relativo al punto P il rapporto

$$\Theta = \frac{dS_1 - dS}{dS}\,. \tag{35}$$

Con riferimento alle forme (1), (5) abbiamo rispettivamente

$$dS = \sqrt{a(x^\lambda)}\;dx^1\,dx^2\,dx^3\,,$$

$$dS_1 = \sqrt{b(x^\lambda)}\;dx^1\,dx^2\,dx^3\,,$$

avendo denotato con $b(x^\lambda)$ il discriminante

$$\|\,b(x^\lambda)\,\| = \|\,a_{\rho\sigma}(x^\lambda) + 2\xi_{\rho\sigma}(x^\lambda)\,\|\,.$$

Consideriamo i due determinanti $a = \|\,a_{\rho\sigma}\,\|$, $\xi = \|\,\xi_{\rho\sigma}\,\|$; diciamo $A_{\rho\sigma}$, $\Xi_{\rho\sigma}$ i complementi algebrici degli elementi $a_{\rho\sigma}$, $\xi_{\rho\sigma}$ nei determinanti suddetti; facciamo le posizioni

$$\Xi^{\rho\sigma} = \frac{\Xi_{\rho\sigma}}{a}\,,$$

e dimostriamo che le $\Xi^{\rho\sigma}$ costituiscono un tensore doppio contravariante (simmetrico). Infatti, sia $\varepsilon^{\rho\sigma\omega}$ il tensore triplo di Ricci con referenza alla forma (1); valgono le identità

$$\Xi^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\rho} \varepsilon^{\mu\nu\sigma} \xi_{\alpha\mu} \xi_{\beta\nu} .$$

Il principio della saturazione degli indici prova la verità di quanto abbiamo asserito.

Avendosi

$$b(x^\lambda) = a + 2 \xi_{\rho\sigma} A_{\rho\sigma} + 4 a_{\rho\sigma} \Xi_{\rho\sigma} + 8 \xi ,$$

risulta dalla (35)

$$(36) \quad \Theta = \frac{d S_1}{dS} - 1 = \sqrt{\frac{b(x^\lambda)}{a(x^\lambda)}} - 1 = \sqrt{1 + 2 I_1 + 4 I_2 + 8 I_3} - 1 ,$$

avendo posto

$$(37) \qquad I_1 = a^{\rho\sigma} \xi_{\rho\sigma} , \quad I_2 = a_{\rho\sigma} \Xi^{\rho\sigma} , \quad I_3 = \frac{1}{3} \xi_{\rho\sigma} \Xi^{\rho\sigma} .$$

Queste funzioni sono degli invarianti e si chiamano *invarianti principali di deformazione.*

Con riferimento a coordinate cartesiane ortogonali, si hanno dalle (37) le espressioni ben note

$$I_1 = \xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33} ,$$
$$I_2 = \xi_{11} \xi_{22} + \xi_{22} \xi_{33} + \xi_{33} \xi_{11} - \xi_{12}^2 - \xi_{23}^2 - \xi_{31}^2 ,$$
$$I_3 = \xi_{11} \xi_{22} \xi_{33} - \xi_{11} \xi_{23}^2 - \xi_{22} \xi_{31}^2 - \xi_{33} \xi_{12}^2 + 2 \xi_{12} \xi_{23} \xi_{31} .$$

§. III. - *Direzioni e dilatazioni principali. Terna principale di congruenze di linee.*

Fissiamo nella configurazione iniziale del mezzo una terna ortogonale di congruenze di linee di parametri λ^ν_h e di momenti

$\underset{h}{\lambda}_{\nu}$ (con referenza alla forma (1)). Come è notissimo, queste funzioni sono vincolate dalle relazioni

$$(38)\qquad \underset{h}{\lambda}_{\mu}\,\underset{k}{\lambda}^{\mu}=\delta_h^k\,,\qquad \underset{h}{\lambda}_{\mu}\,\underset{h}{\lambda}^{\nu}=\delta_{\mu}^{\nu}\,,$$

ogni gruppo essendo conseguenza dell'altro.

Facciamo le posizioni

$$(39)\qquad \omega_{hk}=\xi_{\rho\sigma}\,\underset{h}{\lambda}^{\rho}\,\underset{k}{\lambda}^{\sigma}\,.$$

Da queste si ottiene, in virtù del secondo gruppo delle (38),

$$(40)\qquad \xi_{\rho\sigma}=\omega_{hk}\,\underset{h}{\lambda}_{\rho}\,\underset{k}{\lambda}_{\sigma}\,.$$

Per $h=k$, si trae

$$(41)\qquad \omega_{hh}=\xi_{\rho\sigma}\,\underset{h}{\lambda}^{\rho}\,\underset{h}{\lambda}^{\sigma}\,.$$

Se quindi ricordiamo le (29), abbiamo per il coefficiente di dilatazione lineare ε_h dell'elemento $ds_h=PP'$ della linea h (che appartiene alla congruenza $[h]$ di parametri $\underset{h}{\lambda}^{\nu}$) e che passa per il punto P, l'espressione

$$(42)\qquad \varepsilon_h=\sqrt{1+2\,\omega_{hh}}-1\,.$$

Dalle (39) si trae ancora

$$(43)\qquad \omega_{h+1\,h+2}=\xi_{\rho\sigma}\,\underset{h+1}{\lambda}^{\rho}\,\underset{h+2}{\lambda}^{\sigma}\,.$$

Perciò, detto φ_h lo scorrimento relativo agli elementi lineari ds_{h+1}, ds_{h+2} delle linee $h+1$, $h+2$ passanti per uno stesso punto P, ricordando la (32) si trae

$$(44)\qquad \omega_{h+1\,h+2}=\frac{1}{2}\,\frac{ds_{1\,h+1}}{ds_{h+1}}\,\frac{ds_{1\,h+2}}{ds_{h+2}}\,\mathrm{sen}\,\varphi_h\,.$$

Nella prima delle (37) sostituiamo al posto delle $\xi_{\rho\sigma}$ le (40): tenendo conto che

$$a^{\rho\sigma} \lambda_{h\rho} \lambda_{h\sigma} = 1 ,$$

si ricava

(45) $$I_1 = \Sigma_{hk}\, \omega_{hk} .$$

Per trasformare la seconda delle (37), osserviamo dapprima che, posto

(46) $$\Omega_{hk} = \Xi^{\rho\sigma} \lambda_{h\rho} \lambda_{k\sigma} ,$$

donde

(47) $$\Xi^{\rho\sigma} = \Omega_{hk}\, \lambda_h^{\rho} \lambda_k^{\sigma} ,$$

le funzioni Ω_{hk} si identificano con i complementi algebrici degli elementi ω_{hk} nel determinante $|\omega_{hk}|$ ([5]).

([5]) Per dimostrare questa proposizione, cominciamo ad introdurre nei calcoli le componenti e_{hkl} relative alla terna λ_h^{ν} del tensore ternario ε di Ricci, cioè poniamo

$$e_{hkl} = \varepsilon^{\alpha\mu\nu} \lambda_{h\alpha} \lambda_{k\mu} \lambda_{l\nu} ,$$

donde

(α) $$\varepsilon^{\alpha\mu\nu} = e_{hkl}\, \lambda_h^{\alpha} \lambda_k^{\mu} \lambda_l^{\nu} .$$

Le e_{hkl} sono pertanto eguali a zero, se almeno due degli indici h, k, l sono eguali tra loro, e valgono invece $+1$, oppure -1, secondo che hkl essendo una permutazione ad indici tutti differenti di 1, 2, 3, essa è rispettivamente di classe pari o dispari rispetto alla permutazione fondamentale 1 2 3. Avremo quindi dimostrato l' asserto, se proviamo che

(β) $$\Omega_{hk} = \frac{1}{2}\, e_{irh}\, e_{jsk}\, \omega_{ij}\, \omega_{rs} .$$

A questo scopo sostituiamo nelle (36) al posto delle componenti del tensore ternario $\varepsilon^{\alpha\mu\nu}$ e del tensore doppio $\xi_{\rho\sigma}$ rispettivamente le (α) e le

Ponendo nella seconda delle (37) al posto delle $\Xi^{\rho\sigma}$ le (47), e ricordando le solite relazioni fra le λ^{ν}_{h}, si ha

$$I_2 = \Sigma_{hk}\, \Omega_{hk}\,. \tag{48}$$

Infine, per I_3 otteniamo

$$I_3 = \frac{1}{3}\, \Sigma_{hk}\, \omega_{hk}\, \Omega_{hk}\,. \tag{49}$$

Dalle (43) consegue che, se sono nulle le tre funzioni $\omega_{h+1\,h+2}$, sono anche nulli i tre scorrimenti φ_h e viceversa. Ora è ben noto che, essendo simmetrico il sistema covariante $\xi_{\rho\sigma}$, è sempre possibile fissare nel mezzo iniziale almeno una terna di congruenze di linee mutuamente ortogonali tali che, con referenza ad esse, si ha

$$\omega_{h+1\,h+2} = 0\,. \tag{50}$$

Concludiamo pertanto che da ogni punto P del mezzo nella sua configurazione iniziale escono tre elementi lineari costituenti un triedro trirettangolo i quali si trasformano nel mezzo deformato in altri tre elementi lineari uscenti da P_1 e che formano ancora un triedro trirettangolo.

Gli elementi lineari in discorso sono quelli delle tre linee h passanti per P delle tre congruenze $[h]$ per le quali valgono le (50). Essi individuano le *direzioni principali della deformazione* relative al punto P. La terna di congruenze $[h]$ di linee

(40). Si ricava, ricorrendo alle relazioni (38),

$$\Xi^{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\, e_{mul}\, e_{nvr}\, \omega_{mn}\, \omega_{uv}\, \lambda^{\rho}_{l}\, \lambda^{\sigma}_{r}\,.$$

Poniamo queste espressioni di $\Xi^{\rho\sigma}$ nelle (41); si ottiene, sempre avuto riguardo alle (38),

$$\Omega_{hk} = \frac{1}{2}\, e_{muh}\, e_{nvk}\, \omega_{mn}\, \omega_{uv}\,,$$

le quali, a meno del formale cambiamento degli indici, coincidono con le (β).

mutuamente ortogonali costituisce la *terna principale di congruenze di linee della deformazione.*

La determinazione dei parametri λ_h^{ν} di queste congruenze si effettua, come è noto, risolvendo il sistema di equazioni lineare ed omogeneo

$$(51)\qquad (\xi_{\rho\sigma} - \omega_h\, a_{\rho\sigma})\, \lambda_h^{\sigma} = 0\,,$$

ω_h essendo le radici (sempre reali) della equazione

$$(52)\qquad D(\omega) = \|\, \xi_{\rho\sigma} - \omega\, a_{\rho\sigma} \,\| = 0\,.$$

Dalle (51) si trae

$$(53)\qquad \omega_h = \xi_{\rho\sigma}\, \lambda_h^{\rho}\, \lambda_h^{\sigma}\,,$$

donde

$$(54)\qquad \xi_{\rho\sigma} = \omega_h\, \lambda_{h\rho}\, \lambda_{h\sigma}\,.$$

Quindi, per i coefficienti di dilatazione degli elementi lineari delle linee delle congruenze principali uscenti da P, abbiamo le espressioni

$$(55)\qquad \varepsilon_h = \sqrt{1 + 2\,\omega_h} - 1\,.$$

Queste ε_h si chiamano *coefficienti di dilatazione principali della deformazione.*

Sempre con riferimento alle congruenze in discorso, dalle (48), (49), per gli invarianti principali di deformazione si traggono le semplici espressioni

$$(56)\qquad I_1 = \Sigma_h\, \omega_h\,,\quad I_2 = \Sigma_h\, \omega_h\, \omega_{h+1}\,,\quad I_3 = \frac{1}{3}\, \Sigma_h\, \omega_h\, \omega_{h+1}\, \omega_{h+2}\,.$$

Fissiamo l'attenzione sulle radici ω_h dell'equazione (52), considerando i tre casi seguenti:

a) $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$. Avendosi

$$a_{\rho\sigma} = \lambda_{h\rho}\, \lambda_{h\sigma}\,,$$

risulta dalle (54)

$$\xi_{\rho\sigma} = \omega \, a_{\rho\sigma} \,. \tag{57}$$

In tal caso il sistema (51) è soddisfatto da ogni terna λ^{σ}_{h} (per ogni h) e pertanto concludiamo: se le tre radici dell'equazione (52) sono eguali tra loro, ogni terna ortogonale di congruenze di linee tracciata nel mezzo iniziale è principale. In tale deformazione, i coefficienti di dilatazione lineare intorno ad un punto P sono tutti eguali, perchè dalle (29) si trae

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 2\omega} - 1 \,, \tag{58}$$

in virtù delle (56) e dell'identità quadratica

$$a_{\rho\sigma} \, \lambda^{\rho}_{h} \, \lambda^{\sigma}_{h} = 1 \,.$$

Gli scorrimenti mutui di due direzioni ortogonali quali si vogliono uscenti da un medesimo punto sono sempre nulli.

b) $\omega_1 \neq \omega_2$, $\omega_2 = \omega_3$ In tal caso la matrice del determinante $D(\omega_1)$ è di caratteristica 2, mentre la caratteristica della matrice del determinante $D(\omega_2)$ è uno. Pertanto il sistema (51), fattovi

$$\omega_h = \omega_1 \,,$$

ammette una sola soluzione indipendente λ^{σ}_{1}.

Associando a questa congruenza una coppia qualsiasi di congruenze ortogonali fra loro e alla precedente, avremo costruito una terna di congruenze principali. Adunque, nell'ipotesi che l'equazione (52) abbia una radice doppia, esistono ancora infinite terne di congruenze principali che si ottengono nel modo che abbiamo ora precisato. Ne consegue, che il piano π determinato dalle tangenti alle linee delle due congruenze arbitrarie (purchè, beninteso, soddisfacenti alle condizioni ora dichiarate) passanti per un medesimo punto P è tale, che presi in esso due elementi lineari qualsiasi ortogonali fra di loro e uscenti da P, il loro scorrimento è sempre nullo. Il coefficiente di dilatazione lineare è sempre il medesimo per tutte le direzioni uscenti da P e giacenti nel piano π.

c) $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3$. Il sistema (51) ammette una sola soluzione indipendente per ogni radice ω_h e quindi nel caso delle radici distinte dell'equazione (52) esiste una ed una sola terna di congruenze principali.

§. IV. – *Condizioni di congruenza del* De Saint-Venant.

Assegnata una deformazione del mezzo continuo $S_p \to S_{p_1}$, resta completamente individuata la quadrica di deformazione

$$\varphi = \xi_{\rho\sigma}(x^\lambda)\, dx^\rho\, dx^\sigma ,$$

in quanto sono determinati i suoi coefficienti $\xi_{\rho\sigma}(x^\lambda)$ in funzione delle coordinate lagrangiane x^λ. Inversamente, domandiamoci: assegnata la quadrica φ, cioè i suoi coefficienti $\xi_{\rho\sigma}$ come funzioni del posto x^λ, esiste una deformazione del mezzo S_p che ammette queste funzioni come caratteristiche di deformazione? A questa domanda si deve rispondere negativamente, perchè, e lo vedremo subito, le funzioni $\xi_{\rho\sigma}$ devono soddisfare ad un sistema di sei equazioni differenziali a derivate parziali del second' ordine.

Per trovare queste equazioni sono stati proposti varî metodi, ma il più semplice ed il più naturale è indubbiamente quello del Crudeli (6) che noi ora esporremo in coordinate generali x^λ. Tenendo presente quanto abbiamo esposto nel § 1, le condizioni necessarie e sufficienti perchè sei funzioni $\xi_{\rho\sigma}(x^\lambda)$ siano atte a rappresentare una deformazione del mezzo S_p, sono quelle che si richiedono per l'equivalenza delle due forme differenziali quadratiche

$$ds_1^2 = a_{\rho\sigma}(X^\lambda)\, dX^\rho\, dX^\sigma , \tag{59}$$

$$ds_1^2 = \{ a_{\rho\sigma}(x^\lambda) + 2\,\xi_{\rho\sigma}(x^\lambda) \}\, dx^\rho\, dx^\sigma , \tag{60}$$

(6) Crudeli, *Sopra le deformazioni finite. Le equazioni del* De Saint-Venant, [Rend. r. Acc. dei Lincei, serie 5a, Vol. XX, (1911)].

le quali esprimono il quadrato dell'elemento lineare dello spazio S_{P_1}, la prima in funzione delle variabili euleriane X^λ e la seconda in variabili lagrangiane x^λ, con l'aggiunta, nel caso della sufficienza, che le formule di trasformazione soddisfino alle condizioni che abbiamo precisato nel n.° 1 del § 1. Ora, se esiste la deformazione $S_P \longrightarrow S_{P_1}$ caratterizzata dalle formule

$$X^\lambda = f^\lambda (x^1, x^2, x^3),$$

le due forme sono equivalenti, e poichè la prima ha nulli i sei simboli di Riemann, in quanto rappresenta il quadrato dell'elemento lineare dello spazio deformato, che è uno spazio euclideo, nulli saranno eziandio anche quelli della seconda forma. Inversamente, se i simboli di Riemann della forma (60) sono nulli, poichè lo sono anche quelli della prima, le due forme sono equivalenti, e quindi esistono delle funzioni $X^\lambda = f^\lambda (x^1, x^2, x^3)$, le quali, nell'ipotesi che esse soddisfino alle condizioni precisate nel n.° 1 del § 1, individuano una deformazione $S_P \longrightarrow S_{P_1}$, che ha le assegnate $\xi_{\rho\sigma}(x^\lambda)$ come caratteristiche di deformazione. Adunque, per avere le condizioni in discorso, basterà scrivere i sei simboli di Riemann della forma

$$(61) \qquad g_{\rho\sigma}(x^\lambda)\, dx^\rho\, dx^\sigma, \quad g_{\rho\sigma}(x^\lambda) = a_{\rho\sigma}(x^\lambda) + 2\,\xi_{\rho\sigma}(x^\lambda),$$

ed eguagliarli a zero. Le equazioni che così si ottengono si chiamano *equazioni del* De Saint-Venant, od anche *condizioni di congruenza, o di compatibilità del* De Saint-Venant. Posto, con riférimento alla forma (61),

$$(rt, su) = \frac{\partial}{\partial x^u}\begin{bmatrix} t \\ r\,s \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^s}\begin{bmatrix} t \\ r\,u \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} h \\ r\,u \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ s\,t \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} h \\ r\,s \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ t\,u \end{bmatrix},$$

esse sono le seguenti:

$$(62) \qquad (r+1\;r+2,\; s+1\;s+2) = 0, \quad (r, s = 1, 2, 3),$$

ricordando che

$$(s+1\,s+2,\; r+1\,r+2) = (r+1\,r+2,\; s+1\,s+2).$$

Per avere le equazioni del De Saint-Venant in coordinate cartesiane, basterà nelle (62) tener conto che $a_{\rho\rho} = 1$, $a_{\rho\sigma} = 0$, $\rho \neq \sigma$.

§ V. – *Riferimento a coordinate cartesiane. Analisi della deformazione. Conseguenze. Ricerche del* Signorini.

1. *Spostamenti rigidi.* Supponiamo dapprima tutte nulle le $\xi_{\rho\sigma}$ e riferiamoci a coordinate cartesiane ortogonali x^λ. Considerazioni geometriche (7) mostrerebbero agevolmente che in tale caso le X^λ sono date dalle formule

$$X^\lambda = b^\lambda + b^\lambda_\rho \, x^\rho \,, \tag{63}$$

ove le b^λ sono costanti arbitrarie e le b^λ_ρ sono i coefficienti, pure arbitrari, di una sostituzione ortogonale destrosa, dovendo essere positivo il determinante Δ. Si può arrivare alle (63) con eguale facilità per via analitica, osservando che in forza dei ragionamenti fatti nel § precedente, deve essere ora

$$dX^{1 2} + dX^{2 2} + dX^{3 2} = dx^{1 2} + dx^{2 2} + dx^{3 2} \,,$$

e quindi, come è notissimo, valgono le (63). Inversamente, si vede subito che le (63) individuano una deformazione che ha nulle tutte le sue sei caratteristiche. Adunque, le deformazioni per le quali sono nulle le relative componenti $\xi_{\rho\sigma}$, sono tutte e soltanto quelle che lasciano invariata la forma $dx^{1 2} + dx^{2 2} + dx^{3 2}$, e quindi esse si identificano con un spostamento rigido del mezzo S_p (8).

(7) Appell, *Traité de mécanique rationelle*, [Gauthier-Villars, Parigi, 3a ed., (1921)], Cap. XXXII, pag. 243-245.

(8) Si deve escludere che la deformazione in discorso sia una simmetria, la quale pure conserva inalterati angoli e distanze, perchè in tal caso il determinante Δ avrebbe il valore negativo -1.

2. *Deformazioni omogenee.* Supponiamo che le $\xi_{\rho\sigma}$ siano costanti non tutte nulle. Anche qui (9) semplici ragionamenti geometrici portano a concludere che alle X^λ si può dare la forma

$$(64) \qquad X^\lambda = b^\lambda + (\delta^\lambda_\mu + b^\lambda_\mu)\, x^\mu , \qquad \delta^\lambda_\mu = \begin{cases} 1 & \text{per } \lambda = \mu , \\ 0 & \text{»} \quad \lambda \neq \mu , \end{cases}$$

ove le b^λ sono costanti e le b^λ_μ pure costanti vincolate alle $\xi_{\rho\sigma}$ dalle relazioni

$$(65) \qquad 2\,\xi_{\rho\sigma} = b^\rho_\sigma + b^\sigma_\rho + b^\mu_\rho b^\mu_\sigma ,$$

e tali da rendere positivo il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 + b^1_1 & b^1_2 & b^1_3 \\ b^2_1 & 1 + b^2_2 & b^2_3 \\ b^3_1 & b^3_2 & 1 + b^3_3 \end{vmatrix} .$$

Si può pervenire alle (64) con altrettanta facilità con procedimento analitico, osservando che nel caso attuale dev'essere

$$(66) \qquad \delta^\sigma_\rho\, dX^\rho\, dX^\sigma = \{ \delta^\sigma_\rho + 2\,\xi_{\rho\sigma} \}\, dx^\rho\, dx^\sigma .$$

Se ora si ricorda che le derivate seconde delle X^λ rispetto alle x^λ si esprimono linearmente a mezzo dei simboli di CHRISTOFFEL calcolati con referenza alle due forme che stanno nel primo e nel secondo membro della (66), i quali, nel caso nostro, sono tutti nulli, segue che le derivate in discorso sono tutte eguali a zero in ogni punto del mezzo S_P, e quindi le X^λ sono quelle assegnate dai secondi membri delle (64). Inversamente, le (65) ci dicono che le (64) individuano una deformazione che ha costanti le relative caratteristiche.

(9) APPELL, loc. cit. (7); pag. 253-256.

Nelle espressioni (65) delle $\xi_{\rho\sigma}$ le costanti b^λ non figurano; si può pertanto, senza modificare la deformazione, assumerle eguali a zero. Possiamo quindi scrivere le (64) sotto la forma

$$X^\lambda = c^\lambda_\mu x^\mu, \quad c^\lambda_\mu = \begin{cases} 1 + b^\mu_\mu & \text{per } \lambda = \mu, \\ b^\lambda_\mu & \text{»} \quad \lambda \neq \mu. \end{cases} \tag{67}$$

La deformazione definita dalle (67) si chiama *deformazione omogenea*, ed in particolare, *omogenea pura*, quando si ha

$$c^\lambda_\mu = c^\mu_\lambda .$$

Ovviamente si riconosce che il coefficiente di dilatazione lineare del mezzo S_P dipende soltanto dalla sola orientazione di questo elemento e non dalla posizione di P; altrettanto dicasi del coefficiente di dilatazione cubica. Anche gli scorrimenti mutui di due elementi lineari spiccati da un medesimo punto P non dipendono da esso, ma soltanto dalle direzioni degli elementi in discorso.

In una deformazione qualunque abbiamo visto che ad ogni punto del mezzo nella configurazione iniziale si può associare una terna di elementi lineari mutuamente ortogonali la quale si trasforma nel mezzo deformato in un'altra terna di elementi lineari che sono ancora ortogonali due a due. Nel caso della deformazione omogenea la direzione di questi elementi non dipende dalla scelta del punto P, e poichè ogni retta del mezzo S_P si trasforma in una retta del mezzo S_{P_1}, possiamo concludere che in tale deformazione ad ogni punto P del mezzo iniziale si può associare un triedro trirettangolo $P\xi^\lambda$ i cui spigoli si trasformano nel mezzo deformato in quelli di un altro triedro trirettangolo $P_1\xi^\lambda_1$. Nel caso della deformazione omogenea pura gli assi $P_1\xi^\lambda_1$ sono ordinatamente paralleli agli assi $P\xi^\lambda$ ([10]).

Con riferimento alle (64) possiamo scrivere

$$X^\lambda = b^\lambda + \alpha^\lambda_\rho \xi^\rho . \tag{68}$$

([10]) Appell, loc. cit. (7); pag. 258-263.

$$\xi^\rho = (\delta^\rho_\mu + {}^*b^\rho_\mu)\, x^\mu = {}^*c^\rho_\mu\, x^\mu, \tag{69}$$

ove le α^λ_ρ sono i coefficienti costanti di una sostituzione ortogonale destrorsa, e le ${}^*c^\lambda_\mu$ delle costanti tali che

$$c^\lambda_\mu = \alpha^\lambda_\rho\, {}^*c^\rho_\mu. \tag{70}$$

Aggiungiamo le ulteriori condizioni

$$ {}^*c^\rho_\mu = {}^*c^\mu_\rho. \tag{71}$$

Dalle (70) si ricava

$$ {}^*c^{\rho 2}_\mu = 1 + 2\,\xi_{\mu\mu}, \qquad {}^*c^\rho_{\mu+1}\, {}^*c^\rho_{\mu+2} = 2\,\xi_{\mu+1\,\mu+2}, \tag{72}$$

le quali, unitamente alle (71), determinano le ${}^*c^\rho_\mu$.

Dterminata la *deformazione pura* definita dalle (69), (71), si passa poi alla determinazione delle α^λ_ρ, cioè della *rotazione locale* inerente allo spostamento rigido definito dalle (68) [11].

Concludiamo pertanto: ogni deformazione omogenea può essere ottenuta mediante uno spostamento rigido seguito da una deformazione pura.

Si osservi che in base ai due gruppi (72) le ${}^*c^\lambda_\rho$ si esprimono soltanto per le $\xi_{\lambda\mu}$, e quindi la deformazione pura è completamente determinata dalla sola conoscenza delle caratteristiche $\xi_{\lambda\mu}$ della deformazione omogenea assegnata. Non altrettanto avviene per la determinazione della rotazione locale inerente allo spostamento rigido (68), la cui espressione contiene le derivate $\dfrac{\partial u^\lambda}{\partial x^\mu}$ anche fuori delle combinazioni $\xi_{\lambda\mu}$ [12].

[11] Cfr. COSSERAT, Eugène et François, *Sur la théorie de l'Élasticité*. [Ann. de Toulouse, X, 1896]. Cap. I, pag. 19-25.

[12] Cfr. la Memoria citata in [11] dei COSSERAT.

Supponiamo ora che la deformazione omogenea definita dalle (67) sia pura.

Con referenza al punto 0 - origine degli assi $0x^\lambda$ - poichè a questo punto del mezzo iniziale corrisponde sè stesso nel mezzo deformato (formule (67)), gli assi $0\xi^\lambda$ (di cui si è parlato a pag. 29 rispetto al punto generico P) coincideranno ora ordinatamente con gli assi $0\xi_1^\lambda$ e danno le direzioni principali della deformazione pura relative al punto 0. Assumiamoli come assi di riferimento, e diciamo ξ^λ e Ξ^λ le coordinate dei due punti corrispondenti P e P_1 della deformazione in discorso. Poichè essa è omogenea, possiamo scrivere

$$\Xi^\lambda = C^\lambda_\mu \, \xi^\mu , \tag{73}$$

ove le C^λ_μ sono costanti. Al punto P, che supponiamo situato sull'asse delle ξ^λ, e quindi di coordinate ξ^λ, $\xi^{\lambda+1} = 0$, $\xi^{\lambda+2} = 0$, corrisponderà il punto P_1, situato sul medesimo asse, e quindi di coordinate Ξ^λ, $\Xi^{\lambda+1} = 0$, $\Xi^{\lambda+2} = 0$; ciò per la scelta che abbiamo fatto degli assi di riferimento. Dovendo questo fatto aver luogo qualunque sia la posizione di P sull'asse $0\xi^\lambda$ e qualunque sia l'asse $0\xi^\lambda$, dalle (73) si trae

$$C^\lambda_\mu = 0 \quad \text{per} \quad \lambda \neq \mu ,$$

e quindi le (73) si riducono alle seguenti

$$\Xi^\lambda = C^\lambda_\lambda \, \xi^\lambda = (1 + B^\lambda_\lambda) \, \xi^\lambda , \tag{74}$$

ove le B^λ_λ sono manifestamente i coefficienti di dilatazione principali. Possiamo quindi affermare: Ogni deformazione pura consta di tre dilatazioni secondo tre assi mutuamente ortogonali, i quali sono i tre assi principali della deformazione.

Associando questo risultato con quello stabilito in precedenza, possiamo concludere col teorema definitivo:

ogni deformazione omogenea può essere ottenuta mediante:

una traslazione,
una rotazione,
tre dilatazioni secondo tre assi ortogonali, i quali sono gli assi principali della deformazione.

3. *Analisi della deformazione.* Si consideri un intorno abbastanza piccolo Ω_P del punto P del mezzo S_P di coordinate cartesiane x^λ ed un altro punto P' vicinissimo a P di coordinate $x^\lambda + dx^\lambda$. La deformazione (1) fa corrispondere a P il punto P_1 di coordinate

$$X^\lambda = x^\lambda + u^\lambda ,$$

e al punto P' il punto P'_1 di coordinate

$$(75)\qquad \begin{gathered} X^\lambda + dX^\lambda = x^\lambda + u^\lambda + \\ + d\,(x^\lambda + u^\lambda) = x^\lambda + dx^\lambda + u^\lambda + \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\mu} dx^\mu + \ldots, \end{gathered}$$

ove le derivate indicate vanno calcolate nel punto P. Assumiamo una seconda terna cartesiana di assi paralleli ai primitivi con l'origine in P e denotiamo con x_1^λ, X_1^λ rispettivamente le coordinate di P' e di P'_1 con referenza a questo sistema di assi. Essendo ora $dx^\lambda = x_1^\lambda$, abbiamo dalle (75), trascurando i termini non scritti nei secondi membri,

$$(76)\qquad X_1^\lambda = u^\lambda + \left(\delta_\mu^\lambda + \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\mu} \right) x_1^\mu .$$

Queste formule ci danno le coordinate X_1^λ del punto P'_1 del mezzo deformato in funzione delle coordinate x_1^λ del punto P' del mezzo nella configurazione iniziale. Esse definiscono pertanto la deformazione dell'intorno Ω_P del punto P; poichè i secondi membri sono funzioni lineari a coefficienti costanti nelle coordinate x_1^λ, la deformazione è omogenea. La si chiama *deformazione omogenea tangente* (alla proposta) *nel punto* P, o, più brevemente, *deformazione al punto P*. I coefficienti b^λ_μ della teoria esposta al n. 2 hanno attualmente i valori

$$b^\lambda_\mu = \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\mu} \quad \text{nel punto } P,$$

e le caratteristiche di deformazione $\xi'_{\rho\sigma}$ relative alle (76) sono

$$\xi'_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u^\rho}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial u^\sigma}{\partial x^\rho} + \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\rho}\,\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\sigma}\right]_P.$$

Questi valori coincidono con quelli che hanno in P le caratteristiche $\xi_{\rho\sigma}$ della deformazione generale definita dalle formule (1). In virtù dei risultati ottenuti al n. 2, possiamo quindi concludere con il teorema seguente:

Con referenza ad una particella Ω_P del mezzo continuo nella sua configurazione iniziale, ogni deformazione della medesima può essere ottenuta mediante uno spostamento rigido di Ω_P seguito da una deformazione pura, od anche, mediante una traslazione, una rotazione e tre dilatazioni secondo le direzioni principali di deformazione.

Poichè nello spostamento rigido della particella Ω_P gli elementi lineari non si alterano, come pure non cambiano gli angoli che formano tra loro due elementi lineari uscenti da un medesimo punto di Ω_P, dev' essere possibile esprimere la deformazione di Ω_P, mediante elementi che si riferiscono alla sola deformazione pura della particella in discorso. Ciò si vede subito prendendo in esame le formule (29), (31). In esse figurano le caratteristiche $\xi_{\rho\sigma}$ calcolate nel punto P relative alla deformazione generale (1). Come abbiamo visto, questi valori coincidono in P con quelli che hanno le caratteristiche $\xi'_{\rho\sigma}$ della deformazione omogenea tangente alla proposta in P. Ma questi valori sono altresì eguali a quelli $\xi^*_{\rho\sigma}$ in P della deformazione pura la quale, a meno d'uno spostamento rigido, dà la deformazione di Ω_P; quindi possiamo nelle formule in discorso sostituire alle $\xi_{\rho\sigma}$ le caratteristiche $\xi^*_{\rho\sigma}$ ed i primi membri restano inalterati.

4. *Coefficiente di dilatazione areale.* Anche il coefficiente di dilatazione areale può esprimersi mediante le sole caratteristiche $\xi^*_{\rho\sigma}$. Infatti, poichè in qualsiasi deformazione omogenea definita dalle formule (64) i piani si trasformano in piani e due segmenti di rette parallele si trasformano in due segmenti di rette parallele, segue che, con referenza alle formule (76), il parallelogrammo infinitesimo di area $d\sigma$ appartenente ad Ω_P costruito sugli elementi $ds = PP'$ e $\delta s = PQ'$, si trasformerà nel parallelogrammo infinitesimo di area $d\sigma_1$ appartenente ad Ω_{P_1} e costruito sugli elementi $ds_1 = P_1 P_1'$ e $\delta s_1 = P_1 Q_1'$. Il *coefficiente di dilatazione areale* è dato da

$$\sigma = \frac{d\sigma_1 - d\sigma}{d\sigma} = \frac{d\sigma_1}{d\sigma} - 1\,. \tag{77}$$

Chiamando Θ e Θ_1 rispettivamente gli angoli che formano tra loro gli elementi ds, δs e ds_1, δs_1, abbiamo

$$d\sigma = ds\, \delta s \operatorname{sen} \Theta\,,$$

$$d\sigma_1 = ds_1\, \delta s_1 \operatorname{sen} \Theta_1\,.$$

Quindi

$$\sigma = \frac{ds_1\, \delta s_1 \operatorname{sen} \Theta_1}{ds\, \delta s \operatorname{sen} \Theta} - 1\,. \tag{78}$$

Si ha

$$ds^2\, \delta s^2 \operatorname{sen}^2 \Theta = \begin{vmatrix} ds^2 & ds\, \delta s \cos \Theta \\ ds\, \delta s \cos \Theta & \delta s^2 \end{vmatrix},$$

ovvero, con riferimento al sistema cartesiano Px^λ,

$$ds^2\, \delta s^2 \operatorname{sen}^2 \Theta = \begin{vmatrix} dx_1^{1\,2} + dx_1^{2\,2} + dx_1^{3\,2} & dx_1^1\, \delta x_1^1 + dx_1^2\, \delta x_1^2 + dx_1^3\, \delta x_1^3 \\ dx_1^1\, \delta x_1^1 + dx_1^2\, \delta x_1^2 + dx_1^3\, \delta x_1^3 & \delta x_1^{1\,2} + \delta x_1^{2\,2} + \delta x_1^{3\,2} \end{vmatrix} =$$

$$= \Sigma_\lambda\, (dx_1^{\lambda+1}\, \delta x_1^{\lambda+2} - dx_1^{\lambda+2}\, \delta x_1^{\lambda+1})^2\,.$$

Analogamente

$$ds_1^2\,\delta s_1^2 \operatorname{sen}^2\Theta_1 = \Sigma_\lambda\,(dX_1^{\lambda+1}\,\delta X_1^{\lambda+2} - dX_1^{\lambda+2}\,\delta X_1^{\lambda+1})^2 .$$

Poichè

$$dX_1^\lambda = \frac{\partial X_1^\lambda}{\partial x_1^\mu}\,dx_1^\mu, \qquad \delta X_1^\lambda = \frac{\partial X_1^\lambda}{\partial x_1^\mu}\,\delta x_1^\mu,$$

segue dalla (77)

$$(79) \qquad (1+\sigma)^2 = \frac{[\Delta_\mu^\lambda\,(dx_1^{\mu+1}\,\delta x_1^{\mu+2} - dx_1^{\mu+2}\,\delta x_1^{\mu+1})]^2}{[dx_1^{\mu+1}\,\delta x_1^{\mu+2} - dx_1^{\mu+2}\,\delta x_1^{\mu+1}]^2},$$

avendo denotato con Δ_μ^λ il complemento algebrico dell'elemento $\frac{\partial X_1^\lambda}{\partial x_1^\mu}$ nel determinante $\left\| \frac{\partial X_1^\lambda}{\partial x_1^\mu} \right\|$. Siano ∂x_1^μ le variazioni che subiscono le x_1^λ del punto P per uno spostamento infinitesimo ∂s di esso nel verso positivo della normale a P all'elemento $d\sigma$.

Dovremo avere

$$\Sigma_\mu\,dx_1^\mu\,\partial x_1^\mu = 0, \qquad \Sigma_\mu\,\delta x_1^\mu\,\partial x_1^\mu = 0,$$

e quindi

$$\partial x_1^\mu = K \begin{vmatrix} dx_1^{\mu+1} & dx_1^{\mu+2} \\ \delta x_1^{\mu+1} & \delta x_1^{\mu+2} \end{vmatrix},$$

ove

$$K^2 = \frac{\partial s^2}{\Sigma_\mu \begin{vmatrix} dx_1^{\mu+1} & dx_1^{\mu+2} \\ \delta x_1^{\mu+1} & \delta x_1^{\mu+2} \end{vmatrix}^2}.$$

Dalla (79) si ricava allora

$$(80) \qquad (1+\sigma)^2 = \Sigma_\lambda \{ \Sigma_\mu\,\Delta_\mu^\lambda\,n^\mu \}^2,$$

ove n^μ sono i coseni direttori della normale n.

Trasformiamo ora questa formula in modo che nella trasformata figurino solo elementi relativi alla deformazione pura della particella Ω_P. A questo scopo, continuiamo a denotare ancora con α^λ_μ e $*c^\lambda_\mu$ rispettivamente i coefficienti dello spostamento rigido e quelli della deformazione pura di Ω_P. Si ha

$$\frac{\partial X^\lambda_1}{\partial x^\mu_1} = \alpha^\lambda_\sigma \, {*c}^\sigma_\mu . \tag{81}$$

Tenendo conto che ogni elemento α^λ_σ del determinante $\| \alpha^\lambda_\sigma \|$ è eguale al proprio complemento algebrico, valgono le formule

$$\Delta^\lambda_\mu = \alpha^\lambda_\sigma \, {*\Delta}^\sigma_\mu , \tag{82}$$

ove $*\Delta^\sigma_\mu$ è il complemento algebrico dell'elemento $*c^\sigma_\mu$ nel determinante $\| *c^\sigma_\mu \|$. Sostituendo le (82) nella (80) e tenendo conto delle relazioni di ortogonalità fra le α^λ_σ, si ricava la formula definitiva

$$\sigma = \sqrt{\Sigma_\lambda \, | \Sigma_\mu \, {*\Delta}^\lambda_\mu \, n^\mu |^2} - 1 , \tag{83}$$

la quale prova quanto avevamo asserito, perchè le $*c^\lambda_\mu$, e quindi le $*\Delta^\lambda_\mu$, si esprimono mediante le caratteristiche $*\xi_{\mu\nu}$ della deformazione pura di Ω_P.

5. *Ricerche* del Signorini. Abbiamo visto che ogni deformazione di una generica particella Ω_P del mezzo nella sua configurazione iniziale si può sempre ottenere mediante uno spostamento rigido della medesima, seguito da una deformazione pura. Per quanto abbiamo detto al n. 2 con referenza alle deformazioni omogenee, possiamo dire che, nel caso della deformazione di Ω_P, la determinazione della deformazione pura si può conseguire con la sola conoscenza in P delle caratteristiche $\xi_{\mu\nu}$ di deformazione.

Invece la sola conoscenza in P di queste componenti, non basta ad individuare la rotazione in P inerente allo spostamento rigido, perchè per tale determinazione intervengono le derivate $\frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\nu}$ in P anche fuori delle combinazioni $\xi_{\mu\nu}$.

Il Signorini ha dimostrato che questa deduzione si può conseguire integrando il sistema (completo) ai differenziali totali nelle variabili x^λ e nella funzione incognita $\boldsymbol{Y}$

$$(84) \qquad d\boldsymbol{Y} = \frac{1}{2} \Sigma_\lambda \left\{ \boldsymbol{V}_\lambda + \boldsymbol{V}_\lambda \times \boldsymbol{Y} \, . \, \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Y} \wedge \boldsymbol{V}_\lambda \right\} dx^\lambda ,$$

ove i vettori $\boldsymbol{V}_\lambda$ sono funzioni note in P delle $\xi_{\mu\nu}$ e delle loro derivate prime rispetto alle x^λ. Il significato cinematico del vettore $\boldsymbol{Y}$ è dato da

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{u} \cdot tg \frac{\varphi}{2} ,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è il versore dell'asse di rotazione inerente allo spostamento rigido e φ è l'ampiezza della rotazione in discorso [13].

§ VI. *Riferimento euleriano.*

Le quistioni esaminate nei precedenti paragrafi sono state svolte con referenza alle variabili lagrangiane x^λ. Le stesse quistioni possono essere trattate assumendo come variabili di riferimento le euleriane X^λ. Facciamo intanto la seguente convenzione: ogni notazione usata nei § precedenti con referenza alle variabili x^λ, sarà mantenuta nel presente § con l'aggiunta del segno ' posto in alto e a sinistra della notazione stessa.

Assumiamo come forma fondamentale il quadrato dell'elemento lineare $'ds = P_1P_1'$ dello spazio S_{P_1}, cioè la (4), che in conformità alla convenzione ora stabilita, scriveremo così:

([13]) Uno studio dettagliato del sistema (84), sia con referenza alle deformazioni finite, sia con riferimento alla sua integrabilità per quadrature, si trova esposto nella Memoria Ia del Signorini che abbiamo citato nell'Introduzione (Cap. I, § 4).

$$'ds^2 = 'a_{\rho\sigma}\,(X^\lambda)\,dX^\rho\,dX^\sigma\,.$$

Il quadrato dell'elemento lineare $ds = PP'$ dello spazio S_P è dato da

$$ds^2 = a_{\rho\sigma}\,(x^\lambda)\,dx^\rho\,dx^\sigma\,,$$

ove le $a_{\rho\sigma}\,(x^\lambda)$ altro non sono che le $'a_{\rho\sigma}\,(X^\lambda)$ nelle quali al posto delle X^λ sono state poste le x^λ, poichè P, P_1; P', P'_1 sono punti corrispondenti dei due spazî S_P e S_{P_1}. Facciamo le posizioni

$$'\vartheta^\rho_\mu = \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\mu}\,,$$

$$'b_{\rho\sigma}\,(X^\lambda) = a_{\mu\nu}\,(x^\lambda)\;'\vartheta^\mu_\rho\;'\vartheta^\nu_\sigma\,,$$

$$2\;'\xi_{\rho\sigma}\,(X^\lambda) = 'b_{\rho\sigma}\,(X^\lambda) - 'a_{\rho\sigma}\,(X^\lambda)\,,$$

ove al posto delle x^λ nelle $a_{\mu\nu}\,(x^\lambda)$ vanno surrogate le loro espressioni in funzione delle X^λ, cioè le (3).

Si ricava

$$ds^2 - 'ds^2 = 2\;'\xi_{\rho\sigma}\,(X^\lambda)\,dX^\rho\,dX^\sigma\,.$$

Le $'\xi_{\rho\sigma}\,(X^\lambda)$ sono le caratteristiche di deformazione in coordinate X^λ.

Ponendo

$$'u^\lambda = x^\lambda - X^\lambda\,,$$

un calcolo analogo a quello sviluppato nel § 1, conduce alle formule

$$(85)\quad 2\;'\xi_{\rho\sigma} = \nabla_\rho\,'u_\sigma + \nabla_\sigma\,'u_\rho + \nabla_\rho\,'u_\mu\;\nabla_\sigma\,'u^\mu + \left\{'\begin{bmatrix}\sigma\\ \mu\;\nu\end{bmatrix}\frac{\partial' u^\nu}{\partial X^\rho} + \right.$$

$$\left. + '\begin{bmatrix}\rho\\ \mu\;\nu\end{bmatrix}\frac{\partial' u^\nu}{\partial X^\sigma}\right\}'u^\mu + \left\{\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\,'a_{\rho\sigma}}{\partial X^\mu\,\partial X^\nu} - '\begin{bmatrix}\omega\\ \mu\;\rho\end{bmatrix}'\begin{Bmatrix}\omega\\ \nu\;\sigma\end{Bmatrix}\right\}'u^\mu\;'u^\nu + \ldots\ldots,$$

ove, beninteso, i simboli di Christoffel di prima e di seconda specie ed il simbolo ∇ vanno riferiti alla forma che dà il $'ds^2$, cioè alla (4).

Limitandosi nelle (85) soltanto ai termini che contengono come fattori le $'u^\mu$ e i prodotti $'u^\mu \, 'u^\nu$, si può dare a tali espressioni forma tensoriale, introducendo invece delle $'u^\mu$ le componenti contravarianti $'v^\mu$ (con referenza alle linee coordinate x^λ passanti per P_1) dello spostamento $P_1 P$.

Le (85) si trasformano allora nelle seguenti

$$(86) \qquad 2\, '\xi_{\rho\sigma} = \nabla_\rho \, 'v_\sigma + \nabla_\sigma \, 'v_\rho + \nabla_\rho \, 'v_\mu \, \nabla_\sigma \, 'v^\mu \, .$$

L'analoga della (21) è

$$ds \, \delta s \cos \Theta = 'ds \, '\delta s \cos {'\Theta} + 2\, '\xi_{\rho\sigma} \, dX^\rho \, \delta X^\sigma \, ,$$

con manifesto significato delle notazioni adoperate.

Identificando le X^λ a coordinate cartesiane Y^λ, si ottengono dalle precedenti (86) le ben note espressioni

$$2\, '\xi_{\rho\sigma} = \frac{\partial \, 'u_\rho}{\partial Y^\sigma} + \frac{\partial \, 'u_\sigma}{\partial Y^\rho} + \frac{\partial \, 'u_\mu}{\partial Y^\rho} \, \frac{\partial \, 'u_\mu}{\partial Y^\sigma} \, .$$

Poniamo:

$$'\lambda^\nu = \frac{dX^\nu}{'ds} \, ,$$

$$'\varepsilon = \frac{ds - 'ds}{'ds} = \frac{ds}{'ds} - 1 \, .$$

Per il coefficiente di dilatazione lineare relativo al punto P_1 e alla direzione individuata dai parametri $'\lambda^\nu$, ovviamente si trova

$$'\varepsilon = \sqrt{1 + 2\, '\xi_{\rho\sigma} \, '\lambda^\rho \, '\lambda^\sigma} - 1 \, .$$

Per lo scorrimento $'\varphi$

$$'\varphi = \frac{\pi}{2} - \Theta \, ,$$

relativo alle due direzioni ortogonali $'ds = P_1 P_1'$, $'\delta s = P_1 Q_1'$. spiccate dallo stesso punto P_1, si ottiene la formula

$$\frac{'ds}{ds} \frac{'\delta s}{\delta s} \operatorname{sen} '\varphi = 2 \, '\xi_{\rho\sigma} \, '\lambda^\rho \, '\mu^\sigma ,$$

avendo posto

$$'\mu^\nu = \frac{\delta X^\nu}{'\delta s} .$$

Per la dilatazione cubica $'\Theta$

$$'\Theta = \frac{dS - 'dS}{'dS} ,$$

con manifesto significato delle notazioni, sussiste la formula

$$1 + '\Theta = \sqrt{1 + 2 \, 'I_1 + 4 \, 'I_2 + 8 \, 'I_3} ,$$

ove gli invarianti hanno le espressioni

$$'I_1 = 'a^{\rho\sigma} \, '\xi_{\rho\sigma} , \qquad 'I_2 = 'a_{\rho\sigma} \, '\Xi^{\rho\sigma} , \qquad 'I_3 = \frac{1}{3} \, '\xi_{\rho\sigma} \, '\Xi^{\rho\sigma} ,$$

con $'\Xi^{\rho\sigma}$ denotando il rapporto fra il complemento algebrico dell'elemento $'\xi_{\rho\sigma}$ nel determinante $'\xi = \| \, '\xi_{\rho\sigma} \, \|$ ed il determinante $'a$ della forma (4).

La teoria delle terne principali di congruenze tracciate nel mezzo S_{P_1} si svolge inalterata nelle variabili X^λ.

Le condizioni di congruenza del De Saint-Venant si possono pure esprimere nelle variabili X^λ : basta osservare che si può scrivere

$$ds^2 = a_{\rho\sigma} (x^\lambda) \, dx^\rho \, dx^\sigma = \Big\{ 'a_{\rho\sigma} (X^\lambda) + $$

$$+ 2 \, '\xi_{\rho\sigma} (X^\lambda) \Big\} \, dX^\rho \, dX^\sigma ,$$

per concludere che le condizioni in discorso si ottengono scrivendo che sono nulli i sei simboli di RIEMANN della forma

$$'g_{\rho\sigma} \, (X^\lambda) \, dX^\rho \, dX^\sigma \; ,$$

avendo posto

$$'g_{\rho\sigma} \, (X^\lambda) = {}'a_{\rho\sigma} \, (X^\lambda) + 2 \, '\xi_{\rho\sigma} \, (X^\lambda) \; .$$

PARTE SECONDA

Statica delle deformazioni finite

§ 1. *Espressione delle variazioni che subiscono le caratteristiche di deformazione per spostamenti virtuali infinitesimi dei punti del mezzo deformato.*

Riprendiamo la formula

$$ds_1^2 = a_{\rho\sigma} \left(X^\lambda \right) dX^\rho \, dX^\sigma \, . \tag{1}$$

Diamo ai punti X^λ del mezzo deformato S_{P_1} uno spostamento virtuale infinitesimo δX^λ e calcoliamo dapprima la variazione δds_1^2 che subisce il ds_1^2 per effetto di questo spostamento. Supporremo le δX^λ funzioni continue e derivabili delle X^λ. Abbiamo

$$2\, ds_1 \, \delta ds_1 = a_{\rho\sigma} \left\{ dX^\rho \, d\delta X^\sigma + dX^\sigma \, d\delta X^\rho \right\} + \delta a_{\rho\sigma} \, dX^\rho \, dX^\sigma =$$

$$= a_{\rho\omega} \left\{ \frac{\partial \delta X^\omega}{\partial X^\sigma} + \frac{\partial \delta X^\omega}{\partial X^\rho} \right\} dX^\rho \, dX^\sigma + \frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial X^\omega} dX^\rho \, dX^\sigma \, \delta X^\omega \, . \tag{2}$$

Con referenza alla forma (1) possiamo scrivere

$$\frac{\partial \delta X^\omega}{\partial X^\sigma} = \nabla_\sigma \, \delta X^\omega - \left\{ \begin{matrix} \omega \\ \mu \, \sigma \end{matrix} \right\} \delta X^\mu \, , \tag{3}$$

$$\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial X^\sigma} = \left[\begin{matrix} \sigma \\ \omega \, \rho \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} \rho \\ \omega \, \sigma \end{matrix} \right] \, . \tag{4}$$

Tenendo conto che

$$\delta X_\rho = a_{\rho\omega} \, \delta X^\omega \quad ,$$

$$\nabla_\sigma \, \delta X_\rho = a_{\rho\omega} \, \nabla_\sigma \, \delta X^\omega \quad , \tag{5}$$

si ricava dalla (2) in virtù delle (3), (4), (5),

(6) $$2\, ds_1\, \delta ds_1 = \left\{ \nabla_\rho\, \delta X_\sigma + \nabla_\sigma\, \delta X_\rho \right\} dX^\rho\, dX^\sigma \,,$$

od anche

(7) $$ds_1\, \delta ds_1 = \frac{1}{2} \left\{ \nabla_\mu\, \delta X_\nu + \nabla_\nu\, \delta X_\mu \right\} \vartheta^\mu_\rho\, \vartheta^\nu_\sigma\, dx^\rho\, dx^\sigma \,,$$

avendo posto

$$\vartheta^\mu_\rho = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\rho} \,,$$

Noi possiamo esprimere la variazione δds_1^2 in un altro modo. Abbiamo visto che si può scrivere (Parte prima, formula (6))

(8) $$ds_1^2 = \left\{ a_{\rho\sigma} + 2\, \xi_{\rho\sigma} \right\} dx^\rho\, dx^\sigma \,.$$

Nello spostamento δX^λ del punto P_1, le variabili x^λ ed i differenziali dx^λ restano invariati. Se quindi diciamo $\delta\xi_{\rho\sigma}$ le alterazioni che subiscono le $\xi_{\rho\sigma}$ per effetto di tale spostamento, dovremo avere anche

(9) $$ds_1\, \delta ds_1 = \delta\xi_{\rho\sigma}\, dx^\rho\, dx^\sigma \,.$$

Eguagliando i coefficienti dei prodotti $dx^\rho\, dx^\sigma$ nelle (7), (9), si trae

(10) $$\delta\xi_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left\{ \nabla_\mu\, \delta X_\nu + \nabla_\nu\, \delta X_\mu \right\} \vartheta^\mu_\rho\, \vartheta^\nu_\sigma \,,$$

la quale formula ci sarà utile in seguito.

Osservazione. Eguagliando a zero i coefficienti della forma che figura nel secondo membro della (6), cioè scrivendo

$$\nabla_\rho\, \delta X_\sigma + \nabla_\sigma\, \delta X_\rho = 0 \,,$$

si hanno le *equazioni di* KILLING, scritte con le notazioni del Calcolo Assoluto, e che danno le condizioni necessarie e sufficienti affinchè lo spostamento virtuale infinitesimo δX^λ sia uno spostamento rigido.

§ 2. *Equazioni di equilibrio in coordinate generali euleriane.*

1. *Equazioni di equilibrio di* Cauchy *sotto forma tensoriale.* Denotiamo con dS_P, dS_{P_1} due elementi di volume corrispondenti relativi ai punti $P(x^\lambda)$, $P_1(X^\lambda)$, con $k\ (x^\lambda)$, $k_1\,(X^\lambda)$ le densità del mezzo in tali punti, con $d\Sigma$, $d\Sigma_1$ due elementi d'area corrispondenti delle frontiere complete che limitano il corpo nelle sue configurazioni S_P e S_{P_1}, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}_1$ i relativi versori delle normali a $d\Sigma$ e $d\Sigma_1$, $\boldsymbol{F}k_1\,dS_{P_1} = \boldsymbol{F}k\,dS_P$ la forza di massa agente sull'elemento di volume dS_{P_1}, e infine con $\boldsymbol{Q}d\Sigma_1$ la forza superficiale esterna applicata all'elemento $d\Sigma_1$. In questo numero la forma differenziale di riferimento sarà costantemente la (1). Siano $F_\rho\, k_1\, dS_{P_1}$ le componenti covarianti (con referenza alle linee coordinate x^λ che passano per il punto P_1) della forza di massa $\boldsymbol{F}k_1\,dS_{P_1}$ ed analogo significato abbiano le scritture $Q_\rho\, d\Sigma_1$ per la forza superficiale $\boldsymbol{Q}\,d\Sigma_1$.

Sotto l'azione di tali forze esterne, si supponga che il corpo sia in equilibrio nella sua configuraziono S_{P_1}. Per trovare le equazioni di equilibrio, immaginiamo che ogni punto X^λ subisca lo spostamento virtuale infinitesimo δX^λ considerato nel § precedente, e calcoliamo, con referenza ad esso, il lavoro virtuale delle forze esterne ed interne. Quello delle forze esterne di massa è dato da ([14])

$$\int_{S_1} k_1\ F_\rho\ \delta X^\rho\ dS_1\ , \tag{11}$$

e quello delle forze superficiali è dato da

$$\int_{\Sigma_1} Q_\rho\ \delta X^\rho\ \delta\Sigma_1\ . \tag{12}$$

([14]) Ora, e nel seguito, indicheremo con S_1 e con dS_1 lo spazio occupato dal corpo deformato S_{P_1} ed il suo elemento di volume dS_{P_1}.

Per trovare l'espressione del lavoro virtuale delle forze interne, si osservi dapprima che esse sviluppano lavoro solo in quanto la deformazione virtuale dovuta agli spostamenti δX^λ alteri le lunghezze degli elementi lineari ds_1. Ora, poichè la deformazione δX^λ è infinitesima, le relative caratteristiche di deformazione sono date dalle formole (22) della Parte prima, cioè, nel caso attuale, dalle sei funzioni

$$\frac{1}{2}\left\{ \nabla_\rho \, \delta X_\sigma + \nabla_\sigma \, \delta X_\rho \right\} .$$

Appare quindi giustificato ammettere che il lavoro virtuale delle forze interne δl, con referenza all'elemento di volume dS_1, sia esprimibile nella forma

$$\delta l = \frac{1}{2}\left\{ \nabla_\rho \, \delta X_\sigma + \nabla_\sigma \, \delta X_\rho \right\} \Phi^{\rho\sigma} dS_1 \ , \tag{13}$$

ove le

$$\Phi^{\rho\sigma} = \Phi^{\sigma\rho}$$

sono funzioni delle variabili X^λ che dipendono dallo stato di tensione del corpo S_1 deformato ed equilibrato. Noi le assumeremo come componenti contravarianti di un tensore doppio simmetrico, che chiameremo il *tensore degli sforzi*.

Il principio dei lavori virtuali conduce all'equazione

$$\frac{1}{2}\int_{S_1} \Phi^{\rho\sigma}\left\{ \nabla_\rho \, \delta X_\sigma + \nabla_\sigma \, \delta X_\rho \right\} dS_1 + \tag{14}$$
$$+\int_{S_1} k_1 \, F_\rho \, \delta X^\rho \, dS_1 + \int_{\Sigma_1} Q_\rho \, \delta X^\rho \, d\Sigma_1 = 0 \ .$$

Sempre con riferimento alla forma (1), introduciamo le componenti miste Φ^σ_ρ del tensore degli sforzi: abbiamo

$$\frac{1}{2}\int_{S_1} \Phi^{\rho\sigma}\left\{ \nabla_\rho \, \delta X_\sigma + \nabla_\sigma \, \delta X_\rho \right\} dS_1 = \int_{S_1} \Phi^{\rho\sigma} \, \nabla_\rho \, \delta X_\sigma \, dS_1 =$$

$$= \int_{S} \Phi^\sigma_\rho \, \nabla_\sigma \, \delta X^\rho \, dS_1 = \int_{S_1} \nabla_\sigma \left\{ \Phi^\sigma_\rho \, \delta X^\rho \right\} dS_1 - \int_{S_1} \delta X^\rho \, \nabla_\sigma \, \Phi^\sigma_\rho \, dS_1 \ ,$$

Al primo integrale del secondo membro applichiamo il teorema di Green generalizzato; si ricava

$$\frac{1}{2}\int_{S_1} \Phi^{\rho\sigma}\left\{\nabla_\rho\, \delta X_\sigma + \nabla_\sigma\, \delta X_\rho\right\} dS_1 = -\int_{S_1} \delta X^\rho\, \nabla_\sigma\, \Phi_\rho^\sigma\, dS_1 -$$

$$-\int_{\Sigma_1} \delta X^\rho\, \Phi_\rho^\sigma\, n_{1|\sigma}\, d\Sigma_1 \,,$$

ove abbiamo denotato con $n_{1|\sigma}$ le componenti covarianti del versore diretto secondo la normale interna a Σ_1. Sostituendo in (14) si trae

$$\int_{S_1} \left\{\nabla_\sigma\, \Phi_\rho^\sigma - k_1\, F_\rho\right\} \delta X^\rho\, dS_1 + \tag{15}$$

$$+\int_{\Sigma_1} \left\{\Phi_\rho^\sigma\, n_{1|\sigma} - Q_\rho\right\} \delta X^\rho\, d\Sigma_1 = 0 \,.$$

Ragionamenti ben noti della meccanica dei mezzi continui permettono di asserire che l'equazione ora scritta è altresì valida in ogni campo $S_1{}^*$ del mezzo S_1, di cui indichiamo con $\Sigma_1{}^*$ la superficie chiusa che lo limita, purchè, con referenza ad un generico elemento $d\Sigma_1{}^*$ di normale interna $n_1{}^*$, rappresentino $Q_\rho\, d\Sigma^*$ le componenti covarianti, rispetto alle linee coordinate passanti per il punto di applicazione, dello sforzo specifico che si esercita su questo elemento da quella parte del corpo S_1 che giace nella regione opposta ad $n_1{}^*$. Dovendo allora sussistere la (15) per ogni campo $S_1{}^*$ di contorno $\Sigma_1{}^*$, e per quale si voglia scelta degli spostamenti δX^λ, si avranno le equazioni indefinite

$$k_1\, F_\rho = \nabla_\sigma\, \Phi_\rho^\sigma \qquad \text{in } S_{P_1} \,, \tag{I$_1$}$$

e le equazioni al contorno

$$Q_\rho = \Phi_\rho^\sigma\, n_{1|\sigma} \qquad \text{sopra } \Sigma_1 \,. \tag{I$'_1$}$$

Le (I$_1$) e (I$'_1$) sono le *equazioni di equilibrio di* Cauchy sotto forma tensoriale.

2. *Interpretazione meccanica delle funzioni* $\Phi^{\rho\sigma}$. Dalle (I_1') possiamo trarre l'interpretazione meccanica delle funzioni $\Phi^{\rho\sigma}$ che giustifica il loro nome di componenti contravarianti del tensore degli sforzi.

Fissiamo la linea coordinata x^ρ che passa per un punto dell'elemento $d\Sigma_1$ e sia $\varphi_\rho \, d\Sigma_1$ la componente secondo tale linea della forza superficiale $Q d\Sigma_1$ ivi applicata. Abbiamo, sempre con referenza alla (1),

$$(16) \qquad \varphi_\rho = \sqrt{a_{\rho\rho}\,(X^\lambda)}\; Q^\rho = \sqrt{a_{\rho\rho}\,(X^\lambda)}\; a^{\rho\sigma}\,(X^\lambda)\; Q_\sigma \,.$$

Poniamo al posto delle Q_σ le loro espressioni (I_1'), facciamo le posizioni

$$(17) \qquad \varphi_{\rho\sigma} = \sqrt{a_{\rho\rho}\,(X^\lambda)}\;\sqrt{a_{\sigma\sigma}\,(X^\lambda)}\;\Phi^{\rho\sigma} \,,$$

e ricordiamo che

$$n_{1\sigma} = \sqrt{a_{\sigma\sigma}\,(X^\lambda)}\,\cos n_1\, x^\sigma \,.$$

Dalle (16) si traggono allora le equazioni

$$(18) \qquad \varphi_\rho = \varphi_{\rho\sigma} \cos n_1\, x^\sigma \qquad \text{sopra } \Sigma_1 \,,$$

le quali, formalmente, sono identiche a quelle ben note dell'ordinaria teoria dell'equilibrio dei mezzi continui in coordinate cartesiane. Da queste emerge subito il significate meccanico delle $\varphi_{\rho\sigma}$ e quindi, in base alle (17), delle funzioni $\Phi^{\rho\sigma}$, ove si ricordi che esse valgono per ogni elemento di $\Sigma_1{}^*$ di normale $n_1{}^*$ immaginato nell'interno del corpo S_1, qualora le $\varphi_\rho \, d\Sigma_1{}^*$ rappresentino le componenti dello sforzo specifico che abbiamo precisato poc'anzi. Si fissi, a tale scopo, un punto P_1 e sia $d\Sigma_1{}^*$ l'elemento del piano tangente della superficie coordinata $x^\sigma = \text{cost.}$, che passa per esso; denotiamo con $\varphi_1{}^*$, $\varphi_2{}^*$, $\varphi_3{}^*$ i valori corrispondenti delle funzioni φ_ρ. Scegliendo come normale $n_1{}^*$ all'elemento $d\Sigma_1^*$ quella che forma un angolo acuto con la direzione positiva della linea coordinata x^σ , talchè sia

$$\cos n_1^* x^\sigma = \frac{1}{\sqrt{a_{\sigma\sigma}(X^\lambda)\, a^{\sigma\sigma}(X^\lambda)}} ,$$

si trae dalle (18)

$$\varphi_1^* = \frac{\varphi_{1\sigma}}{\sqrt{a_{\sigma\sigma}(X^\lambda)}\sqrt{a^{\sigma\sigma}(X^\lambda)}} ,$$

$$\varphi_2^* = \frac{\varphi_{2\sigma}}{\sqrt{a_{\sigma\sigma}(X^\lambda)}\sqrt{a^{\sigma\sigma}(X^\lambda)}} ,$$

$$\varphi_3^* = \frac{\varphi_{3\sigma}}{\sqrt{a_{\sigma\sigma}(X^\lambda)}\sqrt{a^{\sigma\sigma}(X^\lambda)}} .$$

Abbiamo pertanto

$$\varphi_{\rho\sigma} = \varphi_\rho^* \sqrt{a_{\sigma\sigma}(X_\lambda)}\sqrt{a^{\sigma\sigma}(X^\lambda)} ,$$

la quale formula ci dà il significato meccanico delle funzioni $\varphi_{\rho\sigma}$ ([15]).

Osservazione. Poichè $\varphi_{\rho\sigma} = \varphi_{\sigma\rho}$, dalla precedente relazione si trae

$$\varphi_\rho^* \sqrt{a_{\sigma\sigma}(X^\lambda)}\sqrt{a^{\sigma\sigma}(X^\lambda)} = \varphi_\sigma^* \sqrt{a_{\rho\rho}(X^\lambda)}\sqrt{a^{\rho\rho}(X^\lambda)},$$

dalla quale fa ricava

([15]) A parte la forma tensoriale, le equazioni (I_1) furono date da BELTRAMI nella Memoria: *Sull'uso delle coordinate curvilinee nella teoria del potenziale e dell'elasticità,* Opere Matematiche (Ulrico Hoepli, Milano, 1920), Vol. IV, pag. 174, Le equazioni (18), che sono le trasformate delle (I_1'), sono identiche a quelle ottenute dal BELTRAMI (pag. 168).

$$\varphi_\rho{}^* = \varphi_\sigma{}^* \quad ,$$

quando le coordinate x^λ sono ortogonali.

3. *Riferimento a coordinate cartesiane ortogonali.* Identifichiamo le coordinate curvilinee x^λ alle coordinate cartesiane ortogonali y^λ ; le X^λ si identificano allora con le Y^λ e la forma (1) diventa

$$ds_1^2 = dY^{1^2} + dY^{2^2} + dY^{3^2} = dX^{1^2} + dX^{2^2} + dX^{3^2} \; .$$

Pertanto:

$$\Phi_\rho^\sigma = \Phi^{\rho\sigma} = \Phi_{\rho\sigma} \, , \quad \nabla^\sigma \, \Phi^{\rho\sigma} = \frac{\partial}{\partial Y^\sigma} \, \Phi^{\rho\sigma} \, , \quad n_{1|\sigma} = \cos n_1 \, y^\sigma \; ,$$

$$\varphi_{\rho\sigma} = \Phi^{\rho\sigma} \; , \quad \varphi_\rho = Q^\rho = Q_\rho \quad .$$

Le equazioni (I_1) e (I_1') assumono la forma

$$(J_1) \left\{ \begin{aligned} & k_1 \, F_\rho = \frac{\partial}{\partial Y^\sigma} \, \Phi_{\rho\sigma} && \text{in } S_{P_1} \, , \\ & \; Q_\rho = \Phi_{\rho\sigma} \cos n_1 \, y^\sigma && \text{sopra } \Sigma_1 \; , \end{aligned} \right.$$

e sono notissime nella meccanica classica dei sistemi continui.

§ 3. *Equazioni di equilibrio in coordinate generali lagrangiane.*

1. *Lavoro virtuale delle forze interne.* Dalla formula (10), ricordando che $X^\lambda = x^\lambda + u^\lambda$, si trae

$$2 \, \delta\xi_{\rho\sigma} = \left\{ \nabla_\mu \, \delta X_\nu + \nabla_\nu \, \delta X_\mu \right\} \left\{ \delta_\rho^\mu + \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\rho} \right\} \left\{ \delta_\sigma^\nu + \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\sigma} \right\} \; .$$

Se la deformazione $X^\lambda = x^\lambda + u^\lambda$ è infinitesima, nella approssimazione della teoria di tali deformazioni, possiamo assumere

$$2\,\delta\xi_{\rho\sigma} = \left\{ \nabla_\rho\, \delta X_\sigma + \nabla_\sigma\, \delta X_\rho \right\},$$

Perciò, in forza della (13), il lavoro virtuale δl delle forze interne con referenza all'elemento di volume dS_1 e allo spostamento virtuale δX^λ, è esprimibile nella forma

$$\delta l = \Phi^{\rho\sigma}\, \delta\xi_{\rho\sigma}\, dS_1\ . \tag{19}$$

Tale non è però l'espressione del lavoro in discorso, quando la deformazione $X^\lambda = x^\lambda + u^\lambda$ è finita. Troveremo che in tale caso questo lavoro δl è pure dato da una espressione formalmente identica alla (19), ma dove però le $\Phi^{\rho\sigma}$ sono sostituite da altre funzioni le quali sono legate alle precedenti da relazioni che stabiliremo. Riprendiamo la formula

$$\delta\xi_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left\{ \nabla_\mu\, \delta X_\nu + \nabla_\nu\, \delta X_\mu \right\} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\rho}\, \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\sigma}\ , \tag{20}$$

indichiamo con $\Delta_{\mu\nu}$ il complemento algebrico dell'elemento $\dfrac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}$ del determinante Δ, e poniamo ([16])

$$\Delta_\mu^\nu = \frac{\Delta_{\mu\nu}}{\Delta}\ .$$

Avendosi

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}\, \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\lambda} = \delta_\lambda^\mu\ , \tag{21}$$

si ricava dalla (20)

$$\nabla_\mu\, \delta X_\nu + \nabla_\nu\, \delta X_\mu = 2\,\delta\xi_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\mu}\, \frac{\partial x^\sigma}{\partial X^\nu}\ ,$$

([16]) Per simmetria di formule facciamo questa variante alle notazioni usate al n. 4 del § V della Parte prima.

od anche

$$(22) \qquad \nabla_\mu \, \delta X_\nu + \nabla_\nu \, \delta X_\mu = 2 \, \Delta^\rho_\mu \, \Delta^\sigma_\nu \, \delta\xi_{\rho\sigma} \quad ,$$

perchè dalle (21) si trae

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial X^\lambda} = \Delta^\nu_\lambda \quad .$$

Ne consegue dalla (13), in forza delle (22), che il lavoro virtuale δl è esprimibile nella forma

$$(23) \qquad \delta l = \Delta^\rho_\mu \, \Delta^\sigma_\nu \, \Phi^{\mu\nu} \, \delta\xi_{\rho\sigma} \, dS_1 \; .$$

Con referenza alle forme (1) e (5) della Parte prima, abbiamo

$$dS = \sqrt{a(x^\lambda)} \; dx^1 \, dx^2 \, dx^3 \; , \qquad dS_1 = \sqrt{b(x^\lambda)} \; dx^1 \, dx^2 \, dx^3 \; ,$$

donde

$$dS_1 = D \, dS \quad ,$$

avendo posto

$$D = \sqrt{\frac{b\,(x^\lambda)}{a\,(x^\lambda)}} \quad .$$

Se quindi poniamo

$$(24) \qquad \Psi^{\rho\sigma} = \Delta^\rho_\mu \, \Delta^\sigma_\nu \, \Phi^{\mu\nu} = \Psi^{\sigma\rho} \quad ,$$

e sostituiamo nella (23) al posto del dS_1 la ottenuta espressione DdS, otteniamo per δl l'espressione definitiva [17]

$$(25) \qquad \delta l = D \, \Psi^{\rho\sigma} \, \delta\xi_{\rho\sigma} \, dS \quad .$$

Osservazione. Poichè

$$k_1 \, dS_1 = k dS \quad ,$$

[17] Cfr. Brillouin, Memoria citata in (*) dell' Introduzione, n. 11.

risulta anche

$$D = \frac{k}{k_1} .$$

2. *Significato meccanico delle* $\Psi^{\rho\sigma}$. Facciamo intanto osservare che, denotando con y^λ, Y^λ le coordinate cartesiane dei punti di S e S_1, e con $\Phi_1{}^{\rho\sigma}$, $\Psi_1{}^{\rho\sigma}$ le relative funzioni $\Phi^{\rho\sigma}$, $\Psi^{\rho\sigma}$, valgono le formule analoghe alle (24)

$$\Psi_1{}^{\rho\sigma} = \frac{\partial y^\rho}{\partial Y^\mu} \frac{\partial y^\sigma}{\partial Y^\nu} \Phi_1{}^{\mu\nu} .$$

Lasciando invariate le Y^λ e riferendo S_1 alle solite coordinate curvilinee x^λ, le (24) equivalgono alle seguenti

$$\Psi^{\rho\sigma} = \frac{\partial x^\rho}{\partial Y^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial Y^\nu} \Phi_1{}^{\mu\nu} .$$

Pertanto, essendo $\Phi_1{}^{\mu\nu}$ le componenti del tensore degli sforzi in coordinate cartesiane Y^λ, le $\Psi_1{}^{\rho\sigma}$ e le $\Psi^{\rho\sigma}$ denotano le componenti dello stesso tensore quando si riferisce S_1 alle coordinate y^λ e x^λ. Siano ora ξ_ρ, η_ρ i momenti di due direzioni arbitrarie uscenti da P_1, e si consideri la forma bilineare invariante

$$\Psi = \Psi^{\rho\sigma} \xi_\rho \eta_\sigma .$$

Essa rappresenta la componente secondo la direzione ξ (oppure η) dello sforzo specifico (che abbiamo precisato alla fine del n. 1 del § 2) che si esercita in P_1 sull'elemento superficiale $d\Sigma^*$ passante per tale punto e normale alla direzione η (oppure a ξ). In particolare, se le direzioni ξ ed η coincidono rispettivamente con quelle delle normali alle superficie coordinate $x^\rho = \text{cost.}$, $x^\sigma = \text{cost.}$, passanti per P_1, avendosi

$$\xi_\rho = \frac{1}{\sqrt{b^{\rho\rho}(x^\lambda)}} , \quad \xi_{\rho+1} = 0 , \quad \xi_{\rho+2} = 0 ,$$

$$\eta_\sigma = \frac{1}{\sqrt{b^{\sigma\sigma}(x^\lambda)}} \quad , \quad \eta_{\sigma-1} = 0 \quad , \quad \eta_{\sigma+2} = 0 \ ,$$

si trae dalla precedente

$$\Psi = \frac{\Psi^{\rho\sigma}}{\sqrt{b^{\rho\rho}(x^\lambda)}\sqrt{b^{\sigma\sigma}(x^\lambda)}} \ ,$$

dalla quale emerge il significato meccanico delle funzioni $\Psi^{\rho\sigma}$.

3. *Equazioni di* Kirchhoff-Brillouin *sotto forma tensoriale. Prima forma.* Prendiamo in considerazione le formule (27) della Parte prima, ed osserviamo che nello spostamento infinitesimo δX^λ di cui si è fatto parola all'inizio del § 1 della Parte seconda, le x^λ restano immutate. Ricaviamo allora dalle espressioni in discorso

$$2\,\delta\xi_{\rho\sigma} = \nabla_\sigma \delta v_\rho + \nabla_\rho \delta v_\sigma + \nabla_\rho v_\mu \nabla_\sigma \delta v^\mu + \nabla_\sigma v^\mu \nabla_\rho \delta v_\mu \ ,$$

donde, moltiplicando per $\Psi^{\rho\sigma}$ e sommando rispetto ai due indici, otteniamo

$$\Psi^{\rho\sigma}\,\delta\xi_{\rho\sigma} = \Psi^{\rho\sigma}\,\nabla_\sigma \delta v_\rho + \Psi^{\rho\sigma}\,\nabla_\rho v_\mu \nabla_\sigma \delta v^\mu \ .$$

Ponendo

$$\Omega^{\rho\sigma} = D\left\{ \Psi^{\rho\sigma} + \Psi^{\mu\sigma}\,\nabla_\mu v^\rho \right\} \ , \tag{26}$$

si trae

$$\delta l = D\Psi^{\rho\sigma}\,\delta\xi_{\rho\sigma}\,dS = \Omega^{\rho\sigma}\,\nabla_\sigma \delta v_\rho\,dS \ .$$

Possiamo scrivere

$$\int_S D\Psi^{\rho\sigma}\,\delta\xi_{\rho\sigma}\,dS = \int_S \Omega^{\rho\sigma}\nabla_\sigma \delta v_\rho\,dS = \int_S \Omega^\sigma_\rho\,\nabla_\sigma \delta v^\rho\,dS \ . \tag{27}$$

Il primo membro di questa eguaglianza dà l'espressione del lavoro totale delle forze interne nello spostamento virtuale δX^λ

dei punti X^λ del corpo dalla sua configurazione deformata ed equilibrata. Assumiamo la (1) della Parte prima come forma differenziale di riferimento, e indichiamo con $H_\rho\, k_1\, dS_1$ le componenti covarianti (con referenza alle linee coordinate x^λ passanti per il punto P di dS) della forza di massa $\boldsymbol{F} k_1\, dS_1$, ed analogo significato abbiano le scritture $G_\rho\, d\Sigma_1$ per la forza superficiale esterna $\boldsymbol{Q} d\Sigma_1$. Il lavoro elementare delle forze di massa e delle forze superficiali esterne nello spostamento δX^λ è dato rispettivamente da

$$H^\rho\, \delta v_\rho\, k_1 dS_1 = H_\rho\, \delta v^\rho\, k dS \quad ,$$

$$G_\rho\, \delta v^\rho\, d\Sigma_1 = P_\rho\, \delta v^\rho\, d\Sigma \quad ,$$

avendo posto

$$P_\rho\, d\Sigma = G_\rho\, d\Sigma_1 \quad . \tag{28}$$

Pertanto, al lavoro totale delle forze di massa e delle forze superficiali, si può attribuire rispettivamente la forma

$$\text{(29)} \quad \int_S k\, H_\rho\, \delta v^\rho\, dS \quad , \qquad \text{(30)} \quad \int_\Sigma P_\rho\, \delta v^\rho\, d\Sigma \quad .$$

In virtù delle (27), (29), (30), il principio dei lavori virtuali conduce all'equazione

$$\int_S \Omega^\sigma_\rho\, \nabla_\sigma\, \delta v^\rho\, dS + \int_S k H_\rho\, \delta v^\rho\, dS + \int_\Sigma P_\rho\, \delta v^\rho\, d\Sigma = 0. \tag{31}$$

Possiamo scrivere

$$\int_S \Omega^\sigma_\rho\, \nabla_\sigma\, \delta v^\rho\, dS = \int_S \nabla_\sigma\, (\Omega^\sigma_\rho\, \delta v^\rho)\, dS - \int_S \delta v^\rho\, \nabla_\sigma\, \Omega^\sigma_\rho\, dS \ .$$

Al primo integrale del secondo membro applichiamo il teorema di Green generalizzato, si ricava dalla (31)

$$\int_S (k H_\rho - \nabla_\sigma\, \Omega^\sigma_\rho)\, \delta v^\rho\, dS + \int_\Sigma (P_\rho - \Omega^\sigma_\rho\, n_\sigma)\, \delta v^\rho\, d\Sigma = 0 \quad ,$$

ove abbiamo denotato con n_σ le componenti covarianti del versore diretto secondo la normale interna a $d\Sigma$. Da questa equazione, per l'arbitrarietà delle variazioni δr^ρ e del volume d'integrazione, scendono le relazioni

$$\left.\begin{aligned} &(I_2) \qquad kH_\rho = \nabla_\sigma \Omega^\sigma_\rho \qquad \text{in } S_P \\ &(I'_2) \qquad P_\rho = \Omega^\sigma_\rho n_\sigma \qquad \text{sopra } \Sigma\,. \end{aligned}\right.$$

Le (I_2), (I'_2) sono le equazioni di KIRCHHOFF-BRILLOUIN sotto forma tensoriale.

4. *Significato meccanico delle* $\Omega^{\rho\sigma}$. Fissiamo le linee coordinate x^λ che passano per un punto dell'elemento $d\Sigma$ e siano $\phi_\rho\, d\Sigma$ le componenti secondo tali linee della forza superficiale esterna $Q\, d\Sigma$; abbiamo

$$\phi_\rho = \sqrt{a_{\rho\rho}(x^\lambda)}\; P^\rho = \sqrt{a_{\rho\rho}(x^\lambda)}\; a^{\rho\sigma}\; P_\rho\ .$$

Sostituendo al posto delle P_ρ le loro espressioni (I'_2), facendo le posizioni

$$X^{\rho\sigma} = \sqrt{a_{\rho\rho}(x^\lambda)}\;\sqrt{a_{\sigma\sigma}(x^\lambda)}\;\Omega^{\rho\sigma}\,, \tag{32}$$

e ricordando che

$$n_\sigma = \sqrt{a_{\sigma\sigma}(x^\lambda)}\; \cos n x^\sigma\,,$$

le (I'_2) si trasformano nelle seguenti

$$\phi_\rho = X_{\rho\sigma} \cos n x^\sigma\ . \tag{33}$$

Da queste emerge subito il significato meccanico delle $X_{\rho\sigma}$ e quindi, in base alle (32), delle $\Omega^{\rho\sigma}$, ove si ricordi che esse valgono per ogni elemento $d\Sigma^*$ di normale n^* immaginato nell'interno del corpo S_P, qualora la $\phi_\rho\, d\Sigma$ rappresentino le componenti dello sforzo specifico che abbiamo precisato alla fine del n. 1 del § 2. Si fissi, a tale scopo, un punto P di S_P e sia $d\Sigma^*$ l'elemento del piano tangente della superficie coordinata x^σ = cost. che passa per esso; denotiamo con $\psi_1{}^*$, $\psi_2{}^*$, $\psi_3{}^*$ i valori corrispondenti delle funzioni ψ_1, ψ_2, ψ_3. Scegliendo come normale n^* all'elemento $d\Sigma^*$ quella che forma un angolo acuto con la direzione positiva della linea x^σ, talchè sia

$$\cos n^* x^\sigma = \frac{1}{\sqrt{a_{\sigma\sigma}(x^\lambda)}\sqrt{a^{\sigma\sigma}(x^\lambda)}} ,$$

si trae dalle (33)

$$\psi_1{}^* = \frac{X_{1\sigma}}{\sqrt{a_{\sigma\sigma}(x^\lambda)}\sqrt{a^{\sigma\sigma}(x^\lambda)}} ,$$

$$\psi_2{}^* = \frac{X_{2\sigma}}{\sqrt{a_{\sigma\sigma}(x^\lambda)}\sqrt{a^{\sigma\sigma}(x^\lambda)}} ,$$

$$\psi_3{}^* = \frac{X_{3\sigma}}{\sqrt{a_{\sigma\sigma}(x^\lambda)}\sqrt{a^{\sigma\sigma}(x^\lambda)}} .$$

Abbiamo pertanto

$$X_{\rho\sigma} = \psi_\rho^* \sqrt{a_{\sigma\sigma}(x^\lambda)}\sqrt{a^{\sigma\sigma}(x^\lambda)} ,$$

la quale formula ci dà il significato meccanico dello $X_{\rho\sigma}$.

5. *Riferimento a coordinate cartesiane ortogonali.* – Identifichiamo le coordinate curvilinee x^λ alle cartesiane y^λ : abbiamo

$$ds^2 = dy^{12} + dy^{22} + dy^{32} = dx^{12} + dx^{22} + dx^{32} .$$

Pertanto

$$v^\lambda = u^\lambda = X^\lambda - x^\lambda = Y^\lambda - y^\lambda ,$$

$$\nabla_\mu v^\lambda = \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\mu} = \frac{\partial Y^\lambda}{\partial y^\mu} - \delta^\lambda_\mu \quad ,$$

$$\Omega^{\rho\sigma} = D \left\{ \Psi^{\rho\sigma} + \Psi^{\mu\sigma} \nabla_\mu v^\rho \right\} =$$

$$= D \left\{ \Psi^{\rho\sigma} + \Psi^{\mu\sigma} \left[\frac{\partial Y^\rho}{\partial y^\mu} - \delta^\rho_\mu \right] \right\} ,$$

ossia, in definitiva,

$$\Omega^{\rho\sigma} = D \Psi^{\mu\sigma} \frac{\partial Y^\rho}{\partial y^\mu} \quad .$$

Si ha ancora dalle (**24**)

$$\Psi^{\rho\sigma} = \frac{\partial y^\rho}{\partial Y^\mu} \frac{\partial y^\sigma}{\partial Y^\nu} \Phi^{\mu\nu} \quad .$$

Sostituendo nelle precedenti e tenendo conto che

$$\frac{\partial Y^\rho}{\partial y^\mu} \frac{\partial y^\mu}{\partial Y^\alpha} = \delta^\rho_\alpha \quad ,$$

si ricava

$$\Omega^{\rho\sigma} = D \Phi^{\rho\nu} \frac{\partial y^\sigma}{\partial Y^\nu} = \Phi^{\rho\nu} \Delta_{\nu\sigma} \quad ,$$

perchè

$$\frac{\partial y^\sigma}{\partial Y^\nu} = \Delta^\sigma_\nu = \frac{\Delta_{\nu\sigma}}{D} \quad .$$

Le equazioni (I_2) e (I'_2) diventano le seguenti

$$(J_2) \qquad \begin{cases} kH^\rho = \dfrac{\partial \Omega^{\rho\sigma}}{\partial y^\sigma} & \text{in } S_t \; , \\[2ex] p^\rho = \Omega^{\rho\sigma} \cos n y^\sigma & \text{sopra } \Sigma \; , \end{cases}$$

che sono le classiche equazioni di KIRCHHOFF-BRILLOUIN in coordinate cartesiane ortogonali.

Osservazione. Dai ragionamenti fatti alla fine del n. precedente, risulta che $\Omega^{1\sigma}$, $\Omega^{2\sigma}$, $\Omega^{3\sigma}$ rappresentano le componenti secondo gli assi coordinati dello sforzo che si esercita nel punto P_1 sopra un elemento di superficie il quale, prima della deformazione, aveva per normale nel punto corrispondente P la parallela all'asse Oy^σ, questo sforzo essendo riferito all'unità di area della superficie non deformata.

6. *Trasformazione delle equazioni* (I_2), (I_2'). *Seconda forma delle equazioni di* KIRCHHOFF-BRILLOUIN. Denotiamo con y^λ, Y^λ le coordinate cartesiane ortogonali dei punti P e P_1 del corpo nelle sue configurazioni S_P e S_{P_1}, e siano

$$y^\lambda = y^\lambda\,(x^1, x^2, x^3)$$

le formule di trasformazione fra le coordinate cartesiane y^λ e le curvilinee x^λ. Abbiamo

$$v^\rho = (Y^\nu - y^\nu)\,\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu}\ ,$$

donde

$$(34)\qquad \nabla_\mu v^\rho = \frac{\partial v^\rho}{\partial x^\mu} + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \tau\ \mu \end{matrix} \right\} v^\tau = (Y^\nu - y^\nu)\,\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial y^\nu\,\partial y^\tau}\,\frac{\partial y^\tau}{\partial x^\mu} + \\ + \left(\frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}\right)\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu} + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \tau\ \mu \end{matrix} \right\} (Y^\nu - y^\nu)\,\frac{\partial x^\tau}{\partial y^\nu}\ .$$

Le formule di CHRISTOFFEL ci danno nel nostro caso

$$(35)\qquad \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial y^\nu\,\partial y^\tau} = -\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha\ \beta \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\nu}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\tau}\ .$$

Sostituendo nelle (34) e tenendo presente che

$$(36)\qquad \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\tau}\,\frac{\partial y^\tau}{\partial x^\mu} = \delta^\beta_\mu \quad ,$$

col solito significato del simbolo δ^β_μ, si riconosce che si ha in definitiva

$$(37)\qquad \nabla_\mu\, v^\rho = \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu} - \delta^\rho_\mu \quad .$$

In virtù delle (37), dalle (26) si trae ovviamente

$$(38)\qquad \Omega^{\rho\sigma} = D\Psi^{\mu\sigma}\,\frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu} \quad .$$

Le equazioni (I_2) sono equivalenti alle seguenti

$$(39)\qquad k\, H^\rho = \nabla_\sigma\, \Omega^{\rho\sigma} \quad .$$

Il secondo membro di queste altro non è che la divergenza del tensore $\Omega^{\rho\sigma}$; possiamo quindi scrivere

$$\nabla_\sigma\, \Omega^{\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\sqrt{a}\;\Omega^{\rho\sigma}\right) + \left\{ {\rho \atop \mu\,\nu} \right\} \Omega^{\mu\nu} \quad .$$

Sostituendovi le (38) si ottiene

$$(40)\qquad \nabla_\sigma\, \Omega^{\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\sqrt{b}\;\Psi^{\mu\sigma}\,\frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu}\right) +$$

$$+ D \left\{ {\rho \atop \mu\,\nu} \right\} \Psi^{\tau\nu}\,\frac{\partial Y^\alpha}{\partial x^\tau}\,\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \quad .$$

Possiamo scrivere

$$(41)\ \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\sqrt{b}\;\Psi^{\mu\sigma}\,\frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu}\right) = \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu}\,\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\sqrt{b}\;\Psi^{\mu\sigma}\,\frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu}\right) +$$

$$+\sqrt{b}\,\Psi^{\mu\sigma}\frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial y^\nu\,\partial y^\alpha}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\sigma}\ .$$

Sostituendo al posto delle derivate seconde le loro espressioni (35) e tenendo conto delle relazioni (36), si riconosce che il secondo termine del secondo membro delle (41), con ovvî mutamenti di indici, è uguale a

$$-\sqrt{b}\left\{\begin{matrix}\rho\\ \mu\ \nu\end{matrix}\right\}\Psi^{\tau\nu}\frac{\partial Y^\alpha}{\partial x^\tau}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\ .$$

Ponendo allora le (41) nelle (40), si ottengono le formule

$$\sqrt{a}\,k\,H^\rho=\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\sqrt{b}\,\Psi^{\mu\sigma}\frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu}\right)\ .$$

E da queste, moltiplicandole per $\dfrac{\partial y^\tau}{\partial x^\rho}$ e sommando rispetto a ρ, si traggono le formule definitive

$$(I_3)\qquad \sqrt{a}\,k\,\bar{F}^\rho=\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\sqrt{b}\,\Psi^{\mu\sigma}\frac{\partial Y^\rho}{\partial x^\mu}\right)\qquad\text{in } S_l,$$

ove con $\bar{F}^\rho$ denotiamo la componente cartesiana secondo l'asse Oy^ρ del vettore $\boldsymbol{F}$.

Per trasformare le (I_2'), si osservi dapprima che in forza delle (38) risulta

$$P^\rho=D\Psi^{\mu\sigma}\frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu}n_\sigma\ .$$

Da queste, moltiplicando per $\dfrac{\partial y^\tau}{\partial x^\rho}$ e sommando rispetto a ρ, si trae, dopo mutamento di indici,

$$(I_3')\qquad \bar{Q}^\rho=D\Psi^{\mu\sigma}\frac{\partial Y^\rho}{\partial x^\mu}n_\sigma\qquad\text{sopra } \Sigma\ ,$$

ove con $\bar{Q}^\rho$ denotiamo la componente cartesiana secondo l'asse Oy^ρ del vettore $\boldsymbol{Q}$.

Le (I_3), (I'_3) costituiscono una nuova forma lagrangiana delle equazioni di KIRCHHOFF-BRILLOUIN in coordinate generali ([18]).

7. *Riferimento a coordinate cartesiane ortogonali* Col solito riferimento cartesiano Oy^ρ, poichà $a = 1$, $b = D^2$, le equazioni (I_3) e (I'_3) diventano le seguenti

$$(J_3) \quad \begin{cases} k\bar{F}^\rho = \dfrac{\partial}{\partial y^\sigma}\left(D\Psi^{\mu\sigma}\dfrac{\partial Y^\rho}{\partial y^\mu}\right) & \text{in } S_p \;, \\[2ex] \bar{Q}^\rho = D\Psi^{\mu\sigma}\dfrac{\partial Y^\rho}{\partial y^\mu}\cos ny^\sigma & \text{sopra } \Sigma \;, \end{cases}$$

8. *Equazioni del* BOUSSINESQ. Nelle equazioni (I_3) poniamo al posto delle $\Psi^{\mu\sigma}$ le (24): si trae ovviamente

$$(42) \qquad \sqrt{a}\; k\, F^\rho = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\sqrt{b}\,\frac{\partial Y^\rho}{\partial X^\mu}\,\frac{\partial x^\sigma}{\partial X^\nu}\,\Phi^{\mu\nu}\right).$$

Abbiamo

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial X^\nu} = \Delta_\nu^\sigma = \frac{\Delta_{\nu\sigma}}{\Delta} .$$

Sostituiamo nelle (42) e notiamo che essendo

$$ds_1^2 = a_{\rho\sigma}\,(X^\lambda)\,dX^\rho\,dX^\sigma = b_{\rho\sigma}\,(x^\lambda)\,dx^\rho\,dx^\sigma \quad ,$$

([18]) Le equazioni di KIRCHHOFF-BRILLOUIN nelle due forme che abbiamo dato si devono attribuire al TOLOTTI, il quale me le ha comunicate per lettera nel Gennaio 1943. Esse sono pubblicate nella Nota citata in (*). Egli le ottiene scrivendo in coordinate generali lagrangiane delle equazioni che hanno carattere tensoriale e facendo poi vedere che tali equazioni si identificano con quelle classiche di KIRCHHOFF-BRILLOUIN quando le variabili di riferimento sono le coordinate cartesiane.

si ha

$$b(x^\lambda) = a(X^\lambda)\,\Delta^2 \quad .$$

Perciò

$$\sqrt{a}\,k\,\bar{F}^\sigma = -\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\sqrt{a(X^\lambda)}\,\frac{\partial Y^\rho}{\partial X^\mu}\,\Delta_{\nu\sigma}\,\Phi^{\mu\nu}\right) .$$

Esplicitando la derivazione, considerando come fattori $\Delta_{\nu\sigma}$ e $\sqrt{a(X^\lambda)}\,\dfrac{\partial Y^\rho}{\partial X^\mu}\,\Phi^{\mu\nu}$ e notando che

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\,\Delta_{\nu\sigma} = 0 \quad , \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

si perviene alle equazioni definitive

$$(I_4) \qquad \sqrt{a}\,k\,\bar{F}^\rho = \Delta_{\nu\sigma}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\sqrt{a(X^\lambda)}\,\frac{\partial Y^\rho}{\partial X^\mu}\,\Phi^{\mu\nu}\right) \qquad \text{in } S_P \ .$$

Un analogo procedimento trasforma le (I'_3) nelle seguenti

$$(I'_4) \qquad \Delta\,\bar{Q}^\rho = D\,\frac{\partial Y^\rho}{\partial X^\mu}\,\Phi^{\mu\nu}\,\Delta_{\nu\sigma}\,n_\sigma \qquad \text{sopra } \Sigma \ .$$

Le (I_4), (I'_4) sono le *equazioni del* Boussinesq in coordinate curvilinee generali.

9. *Riferimento alle coordinate cartesiane* y^λ. Identifichiamo le variabili x^λ alle y^λ ed osserviamo che

$$\frac{\partial Y^\rho}{\partial X^\mu} = \frac{\partial Y^\rho}{\partial Y^\mu} = \delta^\rho_\mu \quad .$$

Inoltre $a(x^\lambda) = a(X^\lambda) = 1$; $\Delta = D$. Le (I_4), (I'_4) diventano allora le seguenti

$$(J_4) \qquad \left\{ \begin{aligned} & k\,\bar{F}^\rho = \Delta_{\nu\sigma}\frac{\partial}{\partial y^\sigma}\,\Phi^{\rho\nu} && \text{in } S_P \ , \\ & \bar{Q}^\rho = \Delta_{\nu\sigma}\,\Phi^{\rho\nu}\cos n\,y^\sigma && \text{sopra } \Sigma \ . \end{aligned} \right.$$

Esse sono le note *equazioni del* Boussinesq in coordinate cartesiane y^λ.

10. *Equazioni del* Signorini *sotto forma tensoriale.* Poniamo

$$(43)\qquad \begin{cases} V_\mu^\rho = \delta_\mu^\rho + \nabla_\mu v^\rho , \\ V_{\mu\rho} = a_{\mu\rho} + \nabla_\mu v_\rho . \end{cases}$$

Moltiplicando e sommando rispetto a ρ, si ottiene

$$(44)\qquad V_\mu^\rho \; V_{\nu\rho} = a_{\mu\nu} + 2\,\xi_{\mu\nu} .$$

Facilmente si stabilisce la seguente identità, ove si ricordi che negli spazi euclidei sono invertibili le derivate seconde covarianti dei vettori v_ρ e v^ρ e sono nulle le derivate covarianti di $a_{\mu\nu}$ e di δ_μ^ρ:

$$(45)\qquad \nabla_\sigma \, \xi_{\mu\nu} + \nabla_\mu \, \xi_{\nu\sigma} - \nabla_\nu \, \xi_{\sigma\mu} = V_{\nu\rho} \, \nabla_\sigma \, V_\mu^\rho .$$

Per la prima delle (43) le (26) diventano

$$(46)\qquad \Omega^{\rho\sigma} = D\Psi^{\mu\sigma} \, V_\mu^\rho ,$$

donde

$$\nabla_\sigma \, \Omega^{\rho\sigma} = D\Psi^{\mu\sigma} \, \nabla_\sigma \, V_\mu^\rho + V_\mu^\rho \, \nabla_\sigma \, D\Psi^{\mu\sigma} .$$

Moltiplicando per $V_{\nu\rho}$ e sommando rispetto a ρ, tenendo conto delle (44) e (45), si ricava

$$(47)\qquad \begin{aligned} V_{\nu\rho} \, \nabla_\sigma \, \Omega^{\rho\sigma} &= (a_{\mu\nu} + 2\,\xi_{\mu\nu}) \, \nabla_\sigma \, D\Psi^{\mu\sigma} + \\ &+ (\nabla_\sigma \, \xi_{\mu\nu} + \nabla_\mu \, \xi_{\nu\sigma} - \nabla_\nu \, \xi_{\sigma\mu}) \, D\Psi^{\mu\sigma} . \end{aligned}$$

Le equazioni (I_2) di Kirchhoff-Brillouin equivalgono alle seguenti

$$k\,H^\rho = \nabla_\sigma \, \Omega^{\rho\sigma} \qquad \text{in } S_P .$$

Moltiplicandole per $V_{\nu\rho}$, sommando rispetto a ρ, tenendo conto delle (47), con ovvio scambio di indici, si trae

$$(I_5) \qquad k H^\nu \, V_{\rho\nu} = (a_{\mu\rho} + 2\xi_{\mu\rho}) \, \nabla_\sigma \, D\Psi^{\mu\sigma} +$$
$$+ (\nabla_\sigma \, \xi_{\mu\rho} + \nabla_\mu \, \xi_{\rho\sigma} - \nabla_\rho \, \xi_{\sigma\mu}) \, D\Psi^{\mu\sigma} \; .$$

Sono queste le *equazioni del* SIGNORINI *sotto forma tensoriale.* Esse sono del tipo lagrangiano.

Osservazione. Facciamo notare che in assenza di forze di massa le (I_5) contengono soltanto le caratteristiche di deformazione e loro derivate prime, le funzioni $\Psi^{\rho\sigma}$ e loro derivate prime.

11. *Riferimento alle coordinate cartesiane ortogonali* y^λ . In tale coordinate, avendosi

$$\nabla_\sigma \, D\Psi^{\mu\sigma} = \frac{\partial}{\partial y^\sigma} D\Psi^{\mu\sigma} \, , \qquad \nabla_\sigma \, \xi_{\mu\rho} = \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \, \xi_{\mu\rho} \, , \text{ ecc.}$$

$$V_{\rho\nu} = \delta^\nu_\rho + \frac{\partial u^\nu}{\partial y^\rho} = \frac{\partial X^\nu}{\partial y^\rho} = \frac{\partial Y^\nu}{\partial y^\rho} \, ,$$

le (I_5) diventano

$$(J_5) \qquad k \, H^\nu \, \frac{\partial Y^\nu}{\partial y^\rho} = \left(\delta^\mu_\rho + 2\,\xi_{\mu\rho} \right) \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \, D\Psi^{\mu\sigma} +$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial y^\sigma} \, \xi_{\mu\rho} + \frac{\partial}{\partial y^\mu} \, \xi_{\rho\sigma} - \frac{\partial}{\partial y^\rho} \, \xi_{\sigma\mu} \right) D\Psi^{\mu\sigma} \; ,$$

la qualo coincidono con le equazioni del SIGNORINI [19] in coordinate cartesiane y^λ .

12. *Riducibilità delle equazioni* (I_2) *ad un sistema di tre equazioni a derivate parziali del second'ordine a tre incognite.* Prendiamo in esame un qualsiasi spostamento virtuale infinitesimo δX^λ dato ai punti X^λ del mezzo nella sua configurazione

[12] Cfr. A. SIGNORINI, *Sulla meccanica dei sistemi continui.* [Rend. dell' Accad. dei Lincei, Vol. XII, serie 6ª, (1930)], oppure la Memoria citata (*) della Introduziona, Cap. II, n. 8.

deformata S_{ν_1}, che supponiamo in equilibrio. Con referenza all'elemento di volume dS_1, che ha per corrispondente l'elemento dS della configurazione iniziale, indicate con $\delta\xi_{\rho\sigma}$ le variazioni che subiscono le componenti di deformazione $\xi_{\rho\sigma}$ nello spostamento δX^λ, abbiamo visto che al lavoro virtuale δl delle forze interne si può dare la forma

$$\delta l = D\Psi^{\rho\sigma}\,\delta\xi_{\rho\sigma}\,dS = \frac{k}{k_1}\,\Psi^{\rho\sigma}\,\delta\xi_{\rho\sigma}\,dS\,. \tag{48}$$

Si supponga ora che il mezzo continuo sia privo di ogni vincolo interno e soggetto a trasformazioni reversibili isoterme o isoentropiche. In tal caso i due classici principi della termodinamica, permettono di affermare l'esistenza di una funzione W delle sole componenti di deformazione - *potenziale termodinamico* [20],

$$W = W\,(\xi_{11},\,\xi_{22},\,\xi_{33},\,\xi_{12},\,\xi_{23},\,\xi_{31})\,,$$

tale che per ogni elemento di volume dS e per ogni spostamento virtuale δX^λ, si ha

$$\delta l = k\,\delta W\,dS = - \tag{49}$$

$$= -\left(k\,\frac{\partial W}{\partial\xi_{\rho\rho}}\,\delta\xi_{\rho\rho} + k\,\frac{\partial W}{\partial\xi_{\rho-1\,\rho-2}}\,\delta\xi_{\rho-1\,\rho-2}\right)dS\,.$$

Con l'introduzione di questa funzione W, vedremo come si possa trasformare il sistema (I_2), che è formato di tre equazioni con nove incognite, cioè le v^ρ e le $\Psi^{\rho\sigma}$, in un altro sistema nelle stesse variabili lagrangiane x^λ, ma composto di tre equazioni a derivate parziali del second'ordine nelle sole tre incognite v^λ. Infatti, dal confronto della (48) con la (49), si trova

[20] Cfr. la Memoria citata del SIGNORINI, Cap. III, § 1, oppure la Memoria citata in [11] del COSSERAT, Cap. III, n. 24. V. anche BRILLOUIN, Memoria citata in (*) della introduzione, n. 13.

$$(50)\qquad \psi^{\rho\rho} = -k_1 \frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho\rho}} , \quad \psi^{\rho+1\,\rho+2} = \psi^{\rho+2\,\rho+1} = -$$

$$= -\frac{k_1}{2} \frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho+1\,\rho+2}} .$$

Scriviamo le (I_2) in questo modo:

$$k H^\rho = \nabla_\rho \Omega^{\rho\rho} + \nabla_{\rho+1} \Omega^{\rho\rho+1} + \nabla_{\rho+2} \Omega^{\rho\rho+2} .$$

Alle (46), in virtù delle (50), possiamo attribuire la forma seguente

$$(51)\quad \left\{ \begin{aligned} -\Omega^{\rho\rho} &= k \frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho\rho}} V^\rho_\rho + \frac{k}{2} \frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho\rho+1}} V^\rho_{\rho+1} + \\ &\quad + \frac{k}{2} \frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho\rho+2}} V^\rho_{\rho+2} , \\ -\Omega^{\rho\rho+1} &= \frac{k}{2} \frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho+1\rho}} V^\rho_\rho + k \frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho+1\,\rho+1}} V^\rho_{\rho+1} + \\ &\quad + \frac{k}{2} \frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho+1\,\rho+2}} V^\rho_{\rho+2} , \\ -\Omega^{\rho\rho+2} &= \frac{k}{2} \frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho+2\,\rho}} V^\rho_\rho + \frac{k}{2} \frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho+2\,\rho+1}} V^\rho_{\rho+1} + \\ &\quad + k \frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho+2\,\rho+2}} V^\rho_{\rho+2} . \end{aligned} \right.$$

Per ciò che segue, conviene fare le posizioni

$$v_{\rho|\sigma} = \nabla_\sigma v_\rho ,$$

e scrivere in conformità il doppio delle componenti di deformazione in questo modo

$$2\,\xi_{\rho\rho} = 2\,v_{\rho|\rho} + a^{\rho\rho} v^2_{\rho|\rho} + a^{\rho+1\,\rho+1} v^2_{\rho+1|\rho} +$$

$$+ a^{\rho+2\,\rho+2} v^2_{\rho+2|\rho} + 2\,a^{\rho\rho+1} v_{\rho|\rho} v_{\rho+1|\rho} +$$

$$+ 2\, a^{\rho-1\,\rho-2}\, v_{\rho-1|\rho}\, v_{\rho-2|\rho} + 2\, a^{\rho-2\,\rho}\, v_{\rho-2|\rho}\, v_{\rho\,\rho}\ ,$$

$$2\, \xi_{\rho+1\,\rho-2} = v_{\rho+1|\rho-2} + v_{\rho-2|\rho+1} + a^{\rho\rho}\, v_{\rho|\rho+1}\, v_{\rho\,\rho-2} +$$

$$+ a^{\rho-1\,\rho+1}\, v_{\rho+1|\rho-1}\, v_{\rho+1|\rho-2} + a^{\rho+2\,\rho+2}\, v_{\rho+2|\rho+1}\, v_{\rho+2|\rho-2} +$$

$$+ a^{\rho\rho-1}\, v_{\rho|\rho+1}\, v_{\rho+1|\rho+2} + a^{\rho-1\,\rho}\, v_{\rho+1|\rho-1}\, v_{\rho|\rho-2} +$$

$$+ a^{\rho-1\,\rho-2}\, v_{\rho+1|\rho+1}\, v_{\rho-2|\rho+2} + a^{\rho+2\,\rho+1}\, v_{\rho+2|\rho-1}\, v_{\rho-1|\rho-2} +$$

$$+ a^{\rho+2\,\rho}\, v_{\rho-2|\rho-1}\, v_{\rho|\rho-2} + a^{\rho\rho-2}\, v_{\rho\,\rho-1}\, v_{\rho-2\,\rho-2}\ .$$

Indichiamo con W^* la funzione nella quale si trasforma W quando al posto delle $\xi_{\rho\sigma}$ poniamo i secondi membri delle (52), cioè, poniamo

$$W^* = W^*\,(v_{1|1}\,, v_{1|2}\,, v_{1|3}\,, v_{2|1}\,, v_{2|2}\,, v_{2|3}\,, v_{3|1}\,, v_{3|2}\,, v_{3|3})\ .$$

Si verifica agevolmente che le (51) equivalgono alle seguenti (21)

$$(52) \qquad \Omega^{\rho\rho} = -k\, \frac{\partial W^*}{\partial v_{\rho|\rho}}\ , \quad \Omega^{\rho\rho+1} = -k\, \frac{\partial W^*}{\partial v_{\rho|\rho+1}}\ ,$$
$$\Omega^{\rho\rho+2} = -k\, \frac{\partial W^*}{\partial v_{\rho|\rho+2}}\ .$$

(21) Ad esempio, abbiamo

$$(\alpha) \quad \frac{\partial W^*}{\partial v_{\rho|\rho}} = \frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho\rho}}\, \frac{\partial \xi_{\rho\rho}}{\partial v_{\rho|\rho}} + \frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho+1\,\rho+1}}\, \frac{\partial \xi_{\rho+1\,\rho+1}}{\partial v_{\rho|\rho}} +$$
$$+ \frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho+2\,\rho+2}}\, \frac{\partial \xi_{\rho+2\,\rho+2}}{\partial v_{\rho|\rho}} + \frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho\,\rho+1}}\, \frac{\partial \xi_{\rho\,\rho+1}}{\partial v_{\rho|\rho}} +$$
$$+ \frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho+1\,\rho+2}}\, \frac{\partial \xi_{\rho+1\,\rho+2}}{\partial v_{\rho|\rho}} + \frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho+2\,\rho}}\, \frac{\partial \xi_{\rho+2\,\rho}}{\partial v_{\rho|\rho}}\ .$$

Dalle date espressioni delle $\xi_{\rho\sigma}$ risulta ovviamente

Ponendo infine

$$\Pi^{\rho\sigma}(v_{1|1},\ v_{1|2},\ \ldots\ldots,\ v_{3|3}) = -\,k\frac{\partial W^*}{\partial v_{\rho|\sigma}}\ , \tag{53}$$

ed osservando che le equazioni (I_2), (I'_2) sono equivalenti alle

$$\begin{cases} k\,H^\rho = \nabla_\sigma\ \Omega^{\rho\sigma} & \text{in } S_P\ , \\ P^\rho = \Omega^{\rho\sigma}\ n_\sigma & \text{sopra } \Sigma\ , \end{cases}$$

per le (52), (53), si trovano le equazioni definitive

$$\begin{cases} k\,H^\rho = \nabla_\sigma\ \Pi^{\rho\sigma} & \text{in } S_P\ , & (I_6) \\ P^\rho = \Pi^{\rho\sigma}\ n_\sigma & \text{sopra } \Sigma\ . & (I'_6) \end{cases}$$

(segue nota di pag. 67)

$$\frac{\partial \xi_{\rho\rho}}{\partial v_{\rho|\rho}} = 1 + a^{\rho\rho}\, v_{\rho|\rho} + a^{\rho\rho+1}\, v_{\rho+1|\rho} + a^{\rho\rho+2}\, v_{\rho+2|\rho} =$$
$$= 1 + \nabla_\rho\, v^\rho = V^\rho_\rho\ ,$$

$$\frac{\partial \xi_{\rho+1\,\rho+1}}{\partial v_{\rho|\rho}} = 0\ , \qquad \frac{\partial \xi_{\rho+2\,\rho+2}}{\partial v_{\rho|\rho}} = 0\ ,$$

$$2\,\frac{\partial \xi_{\rho\rho+1}}{\partial v_{\rho|\rho}} = a^{\rho\rho}\, v_{\rho|\rho+1} + a^{\rho\rho+1}\, v_{\rho+1|\rho+1} +$$
$$+ a^{\rho\rho+2}\, v_{\rho+2|\rho+1} = \nabla_{\rho+1}\, v^\rho = V^\rho_{\rho+1}\ ,$$

$$\frac{\partial \xi_{\rho+1\,\rho+2}}{\partial v_{\rho|\rho}} = 0\ ,$$

$$2\,\frac{\partial \xi_{\rho+2\,\rho}}{\partial v_{\rho|\rho}} = a^{\rho\rho}\, v_{\rho|\rho+2} + a^{\rho\rho+1}\, v_{\rho+1|\rho+2} + a^{\rho\rho+2}\, v_{\rho-2|\rho-2}$$
$$= \nabla_{\rho+2}\, v^\rho = V^\rho_{\rho+2}\ .$$

Quindi, sostituendo in (α), risulta

$$\frac{\partial W^*}{\partial v_{\rho|\rho}} = \frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho\rho}}\, V^\rho_\rho + \frac{1}{2}\,\frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho\rho+1}}\, V^\rho_{\rho+1} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial W}{\partial \xi_{\rho\rho+2}}\, V^\rho_{\rho+2} =$$
$$= -\,\frac{\Omega^{\rho\rho}}{k}\ , \quad \text{c. d. d.}$$

Osservazione I. Le funzioni $\Pi^{\rho\sigma}$ contengono le derivate covarianti $v_{\rho|\sigma}$ rispetto alla forma (1) della Parte prima, le quali si esprimono linearmente a mezzo delle derivate parziali ordinarie $\frac{\partial v_\rho}{\partial x_\sigma}$ e delle funzioni v_ρ : il simbolo di derivazione ∇_σ che figura nei secondi membri delle (I_6) è riferito alla forma in discorso: perciò, esplicitando questa derivazione, figureranno le derivate prime ordinarie $\frac{\partial \Pi^{\rho\sigma}}{\partial x^\lambda}$ e le funzioni stesse $\Pi^{\rho\sigma}$, cioè in definitiva, le derivate seconde rispetto alle x^λ delle funzioni v_ρ, le derivate prime, e le v_ρ. Le (I_6) sono pertanto tre equazicni alle derivate parziali del second'ordine in coordinate lagrangiane x^λ nelle tre funzioni incognire v_ρ.

Osservazione II. Facciame notare che in virtù delle (49), e nell'ipotesi di assenza di forza di massa, le equazioni indefinite (I_5) del Signorini si esplicitano in tre equazioni a derivate parziali del primo ordine nelle sole caratteristiche dì deformazione.

13. *Riferimento a coordinate cartesiane* y^λ. In tale riferimento, abbiamo

$$v_{\rho\sigma} = \frac{\partial v_\rho}{\partial y^\sigma} = \frac{\partial u^\rho}{\partial y^\sigma} .$$

Poniamo :

$$u_{\rho,\sigma} = \frac{\partial u^\rho}{\partial y^\sigma} ,$$

$$W^* = W^* \left(u_{1|1}, u_{1|2}, u_{1\,3}, u_{2\,1}, u_{2\,2}, u_{2|3}, u_{3|1}\, u_{3\,2}, u_{3|3}\right),$$

e si osservi che il simbolo di derivazione ∇_σ si identifica con quello di derivazione ordinaria rispetto alla variabile x^σ. Le equazioni (I_6), (I_6') diventano allora le seguenti

$$(J_6) \qquad \begin{cases} k\,H^\rho = \dfrac{\partial}{\partial y^\sigma}\, \Pi^{\rho\sigma} & \text{in } S_P , \\ P^\rho = \Pi^{\rho\sigma} \cos n y^\sigma & \text{sopra } \Sigma , \end{cases}$$

le quali, sostanzialmente, equivalgono a delle equazioni già ottenute dal KIRCHHOFF.

§ 3. *Mezzi isotropi.*

Chiameremo *isotropo* nella configurazione S_P un mezzo continuo a trasformazioni revisibili esente da ogni vincolo interno, nel quale il potenziale termodinamico W dipende dalle caratteristiche di deformazione solo per il tramite degli invarianti principali di deformazione I_1, I_2, I_3. In forza delle (56) della Parte prima, possiamo considerare W sia come funzione delle ω_h, sia come funzione delle dilatazioni principali ε_h. Facciamo le posizioni:

$$W\,(I_1,\ I_2,\ I_3) = W_1\,(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3) = W_2\,(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3)\ .$$

Consideriamo la formula

$$ds^2 - {}'ds^2 = 2\,{}'\xi_{\rho\sigma}\,(X^\lambda)\,dX^\rho\,dX^\sigma$$

del § VI della Parte prima; dividiamola per ds^2 e facciamo uso delle notazioni seguenti

$$(54)\qquad \varepsilon = \frac{'ds - ds}{ds}\ ,\quad \zeta_{\rho\sigma} = -\,\xi_{\rho\sigma}\ ,\quad {}'\lambda^\rho = \frac{dX^\rho}{'ds}\ .$$

Si ottiene

$$(55)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon\,(2+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2} = \zeta_{\rho\sigma}\,(X^\lambda)\,{}'\lambda^\rho\,{}'\lambda^\sigma\ .$$

Poniamo

$$(56)\qquad E = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon\,(2+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2}\ ,$$

ed osserviamo che in una deformazione infinitesima $S_P \rightarrow S_{P_1}$, dovendo ε essere trattato come quantità del prim' ordine di cui si trascurano i quadrati, si trae dalla (56)

$$(57)\qquad E = \varepsilon\ .$$

Consideriamo in P_1 le tangenti alle linee delle congruenze principali: esse costituiscono una terna trirettangola $P_1\,X^\lambda$ con referenza alla quale adotteremo ancora la notazione X^λ per indicare le coordinate cartesiane dei punti di S_{P_1}. Si osservi che con tale riferimento, i parametri $'\lambda^\rho$ della direzione $'ds$ si identificano con i coseni direttori della medesima rispetto alla terna $P_1\,X^\rho$: porremo $'\lambda^\rho = \cos\,('ds,\ \rho)$.

Riferiamoci ora alla terna principale in discorso: essendo allora nulle in P_1 le $\zeta_{\rho\sigma}\,(X^\lambda)$, con $\rho \neq \sigma$, si trae dalla (55), con la posizione (56),

$$E = \zeta_{\rho\rho}\ '\lambda^{\rho 2}\ ,$$

cioè

$$E = E_1 \cos^2('ds,\,1) + E_2\cos^2('ds,\,2) + E_3\cos^2('ds\,,\,3) = \\ = E_h\ \cos^2\,('ds\,,\ h)\ , \tag{58}$$

avendo indicato con E_h la componente principale di deformazione (con segno cambiato) $-\xi_{hh}$, la quale si identifica con il valore della funzione E in P_1, quando l'elemento $'ds$ coincide con l'elemento $'ds_h$ della linea principale h passante per P_1.

Si supponga ([22]) che a partire dalla configurazione S_{P_1} il corpo solido si deformi in modo continuo: noi potremo stabilire le nuove posizioni assunte dai punti P_1 nei vari stati di deformazione del mezzo mediante le formule

$$\Xi^\lambda = X^\lambda + U^\lambda\ ,$$

convenendo che le U^λ , oltre che essere funzioni continue derivabili del punto X^λ, dipendano anche da un parametro τ, con l'ulteriore condizione di annullarsi per un fissato valore di τ, ad es., per $\tau = o$. Consideriamo in S_{P_1} una linea materiale l passante per P_1 e gli angoli che la sua tangente in P_1 forma

([22]) E. Almansi, *Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi*. Nota I^a^, [Rend. della r. Accad. dei Lincei, Vol. XX, serie V, (1911)].

con gli assi $P_1\ X^\lambda$: per ogni valore di τ sarà valida la (58); derivandola rapporto a tale parametro, si ottiene

$$(59)\qquad \frac{\partial E}{\partial \tau} = -2\, E_h \cos\,('ds,\, h) \sin\,('ds,\, h)\, \frac{\partial\,('ds, h)}{\partial\, \tau} + \\ + \cos^2('ds,\, h)\, \frac{\partial E_h}{\partial\, \tau} \quad .$$

Dalla (56) si ha ovviamente

$$(60)\qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = \frac{d\varepsilon}{dE}\, \frac{\partial E}{\partial \tau} = (1 - 2\,E)^{-3|2}\, \frac{\partial E}{\partial \tau}\ ,\quad (1 - 2E > o)\,.$$

Ed in conformità, con referenza alle linee principali di P_1,

$$(61)\qquad \frac{\partial \varepsilon_h}{\partial \tau} = \frac{d\varepsilon_h}{dE_h}\, \frac{\partial E_h}{\partial \tau} = (1 - 2\,E_h)^{-3|2}\, \frac{\partial E_h}{\partial \tau}\ ,\quad (1 - 2\,E_h > o)\ .$$

Facciamo ora l' ipotesi che nella configurazione S_{P_1} la linea l sia tangente in P_1 alla linea h, cioè all'asse $P_1\ X^h$: dalla (59) si ricava allora

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = \frac{\partial E_h}{\partial \tau} \quad \text{per } \tau = o\ .$$

Perciò dalle (60), (61), essendo $E = E_h$ per $\tau = o$, si trae anche

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = \frac{\partial \varepsilon_h}{\partial \tau} \quad \text{per } \tau = o\quad ,$$

dalla quale, moltiplicando per $\delta\tau$, si ottiene

$$(62)\qquad \delta\varepsilon_h = \delta\varepsilon\quad ,$$

cioè, la variazione che subisce il coefficiente di dilatazione principale ε_h per effetto d'una deformazione infinitesima del mezzo della sua configurazione S_{P_1} è eguale alla variazione che subisce il coefficiente di dilatazione lineare ε dell'elemento d'una linea materiale l passante per P_1 che nella configurazione S_{P_1} è ivi tangente alla linea principale h. Denotando ora $'ds$ l'elemento di linea l attiguo al punto P_1 e con ds il suo corrispondente nella configurazione iniziale S_P, si ricava dalla (54)

$$\delta\varepsilon = \frac{\delta\ 'ds}{ds} = \frac{'ds}{ds}\ \frac{\delta\ 'ds}{'ds} = (1+\varepsilon)\frac{\delta\ 'ds}{'ds} \quad ,$$

od anche, per $\tau = o$, essendo allora $\varepsilon = \varepsilon_h$, $\delta\varepsilon = \delta\varepsilon_h$,

$$\delta\varepsilon_h = (1+\varepsilon_h)\ \eta_h \tag{63}$$

avendo posto ([23])

$$\eta_h = \frac{\delta\ 'ds}{'ds} \quad .$$

Riprendiamo ora le coordinate curvilinee X^λ. Nello spostamento δX^λ il lavoro δl delle forze interne con riferimento all'elemento di volume dS_1, o al corrispondente dS, è dato da

$$\delta l = -k\,\delta\, W dS = -k\frac{\partial W_2}{\partial\varepsilon_h}\delta\varepsilon_h\, dS = -k\frac{\partial W_2}{\partial\varepsilon_h}\,\delta\varepsilon_h\frac{dS_1}{1+\Theta} \quad , \tag{64}$$

perchè, denotando con Θ il coefficiente di dilatazione cubica, si ha

$$dS_1 = (1+\Theta)\ dS \ .$$

Poniamo

$$\chi_h = -k\frac{1+\varepsilon_h}{1+\Theta}\ \frac{\partial W_2}{\partial\varepsilon_h} \quad , \tag{65}$$

e ricordiamo le (63): si ricava allora dalla (64)

$$\delta l = \chi_h\ \eta_h\ dS_1 \quad . \tag{66}$$

Poichè lo spostamento δX^λ è infinitesimo, le relative caratteristiche di deformazione sono date dalle formule spettanti

([23]) Abbiamo posto l' indice h alla lettera η, perchè $'ds$ è l' elemento di una linea che è tangente in P_1 alla linea principale h.

all' elasticità di primo grado [Parte prima, formule (22)], cioè, nel caso nostro, da

$$\frac{1}{2}(\nabla_\rho \, \delta X_\sigma + \nabla_\sigma \, \delta X_\rho) \; ,$$

ove il simbolo di derivazione covariante si riferisce adesso alla forma (1) della Parte seconda.

Per la η_h abbiamo l'espressione

$$(67) \quad \eta_h = \frac{1}{2}(\nabla_\rho \, \delta X_\sigma + \nabla_\sigma \, \delta X_\rho) \, '\lambda_h^\rho \, \lambda_h^\sigma = \nabla_\rho \, \delta X_\sigma \, '\lambda_h^\rho \, \lambda_h^\sigma \; ,$$

analoga alla (55), ove si tenga conto che nel caso attuale la deformazione è infinitesima, e quindi sussiste la (57).

Sostituendo nella (66) la (67), si trae

$$(68) \qquad \delta l = \Phi_1^{\rho\sigma} \, \nabla_\rho \, \delta X_\sigma \, dS_1 \quad ,$$

avendo posto

$$\Phi_1^{\rho\sigma} = \chi_h \, '\lambda_h^\rho \, '\lambda_h^\sigma \quad .$$

Ma in precedenza (formula 12), abbiamo visto che al lavoro δl si può dare la forma

$$(69) \qquad \delta l = \Phi^{\rho\sigma} \, \nabla_\rho \, \delta X_\sigma \, dS_1 \quad ;$$

perciò, dal confronto della (68) con la (69), concludiamo che dev' essere

$$(70) \qquad \Phi^{\rho\sigma} = \chi_h \, '\lambda_h^\rho \, '\lambda_h^\sigma \quad .$$

Poichè le $\Phi^{\rho\sigma}$ costituiscono un tensore doppio simmetrico contravarianti, sappiamo che si può sempre trovare in S_{p_1} almeno una terna di congruenze mutuamente ortogonali con referenza alle quali valgono le (70).

Concludiamo pertanto:

a) nei mezzi solidi isotropi la terna in discorso è la terna (o una delle terne) delle congruenze principali.

b) Le tensioni principali χ_h sono date dalle *formule dell'* ALMANSI [24].

$$\chi_h = -k \frac{1+\varepsilon_h}{1+\Theta} \frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon_h} ,$$

le quali sono equivalenti alle seguenti

$$(71) \qquad \chi_h = -\frac{k}{(1+\varepsilon_{h+1})(1+\varepsilon_{h+2})} \frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon_h} ,$$

ove si ricordi [Parte prima, formula (36)] che

$$1+\Theta = \sqrt{1+2\,I_1+4\,I_2+8\,I_3} ,$$

ovvero, sostituendo al posto delle I_1, I_2, I_3 le espressioni (56) della Parte prima,

$$1+\Theta = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) ,$$

perchè [Parte prima, formule (55)]

$$1+\varepsilon_h = \sqrt{1+2\,\omega_h} .$$

[24] Cfr. E. ALMANSI, nota citata [22]. Facciamo rilevare che la determinazione delle tensioni principali χ_h in base alla (71) presuppone, oltre che la conoscenza della funzione *W*, anche la determinazione delle direzioni principali. Nella Nota III *Sulle deformazioni finite dei corpi solidi elastici isotropi*, [Ibidem], l'ALMANSI ha trasformato le (71) in modo da far dipendere il calcolo delle tensioni principali dalla deformazione del solido e dal potenziale termodinamico. [Cfr. anche la Memoria citata del SIGNORINI, Cap. III, § 3, n. 12].