RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

Sopra il problema di Nicoletti per una particolare classe di equazioni differenziali a derivate parziali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 14 (1943), p. 17-36

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1943__14__17_0>

SOPRA IL PROBLEMA DI NICOLETTI PER UNA PARTICOLARE CLASSE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI A DERIVATE PARZIALI

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER *a Padova.*

Il NICOLETTI, in una sua Nota, ha considerato il problema

$$
\mathrm{I)} \qquad \begin{aligned} & y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ & y(x_1) = c_1, \; y(x_2) = c_2, \ldots, \; y(x_n) = c_n, \end{aligned}
$$

dimostrando - nell'ipotesi che la $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ sia continua e lipschitziana - che ammette una ed una sola soluzione purchè l'ampiezza dell'intervallo (x_1, x_n) *sia abbastanza piccola* (1).

Nello stesso lavoro il NICOLETTI dimostra poi anche l'esistenza di un integrale dell'equazione a derivate parziali

$$
\mathrm{II)} \qquad \frac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n \, \partial y^m} = \varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{h+k} z}{\partial x^h \, \partial y^k} \ldots\right)
$$

$$
(h = 0, 1, \ldots, n; \; k = 0, 1, \ldots, m; \; h + k \leq n + m - 1),
$$

che lungo le linee caratteristiche

$$
x = x_1, x_2, \ldots, x_r; \; (y = y_1, y_2, \ldots, y_s),
$$

(1) O. NICOLETTI: *Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie* [Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXXIII (1897-98), pp. 746-759].

debba ridursi a funzioni prescritte della y (e della x) insieme con le sue derivate parziali rispetto alla x (alla y) fino all'ordine $\nu_1 - 1, \nu_2 - 1, \ldots, \nu_r - 1$ ($\mu_1 - 1, \mu_2 - 1, \ldots, \mu_s - 1$), con $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r = n$ ($\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_s = m$), ed essendo, s'intende, i dati assegnati in modo compatibile.

Anche in questo caso però il NICOLETTI prova - nell'ipotesi che la $\varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{h+k} z}{\partial x^h \partial y^k} \ldots\right)$ sia continua e lipschitziana - che il problema ammette una ed una sola soluzione finchè le linee caratteristiche $x = x_\alpha$, $y = y_\beta$ e il punto variabile (x, y) rimangono in un'area rettangolare *convenientemente piccola.*

Ora mentre recentemente, alcuni Autori ([2]), hanno studiato e risolto il problema I) «in grande», determinando cioè un estremo superiore delll'intervallo (x_1, x_n) entro il quale il problema ammette almeno una soluzione, rimane ancora da risolvere l'analoga questione per il secondo problema trattato dal NICOLETTI. Anche in tal caso bisognerebbe determinare un rettangolo entro il quale fosse lecito garantire l'esistenza di almeno una soluzione.

In questa Nota tratto appunto questo argomento nell'ipotesi però che la funzione $\varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{h+k} z}{\partial x^h \partial y^k}, \ldots\right)$ contenga le derivate parziali fino all'ordine $n-1$ rispetto a x e fino all'ordine $m-1$ rispetto a y ed ammettendo per la φ la sola continuità rispetto a tutti i suoi argomenti.

([2]) R. CACCIOPPOLI: *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un'osservazione sui problemi ai limiti* [Rend. R. Accademia dei Lincei, vol. XIII (1931), pp. 498-502]; S. CINQUINI: *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali d'ordine n* [Annali R. Sc. Normale Superiore di Pisa, vol. IX (1940), pp. 61-77]; G. ZWIRNER: *Su un problema di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie d'ordine n* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova, vol. XII (1941), pp. 114-122]; *Un criterio d'esistenza relativo a un problema al contorno per un'equazione differenziale ordinaria d'ordine n* [Atti della R. Accademia d'Italia, Rendiconti di Scienze fis. mat. e nat., vol. III (1942), pp. 217-222]; G. SCORZA DRAGONI: *Un'osservazione su un problema al contorno per le equazioni differenziali ordinarie* [Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, t. CI, Parte II (1941-42), pp. 203-212].

Estendo poi le considerazioni svolte per una sola equazione ad un sistema di equazioni dello stesso tipo e do anche, nell'ultima parte di questo lavoro, un criterio di unicità relativo sempre allo stesso problema.

L'argomento del presente lavoro è stato proposto dal Prof. G. Sansone *al Convegno Internazionale di Matematica* tenutosi a Roma nel novembre scorso.

§ 1.

1. - Per risolvere il problema che mi sono proposto mi servirò anche del seguente lemma, conseguenza di una notissima formula d'interpolazione:

Sieno: $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$; $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ *due gruppi di numeri interi e positivi e indichiamo con* n *e* m *rispettivamente le somme* $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r$, $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_s$; $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$; $y_1 < y_2 < \ldots < y_s$ *due gruppi di punti appartenenti rispettivamente agli intervalli* $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ *e* $z(x, y)$ *una funzione continua, assieme alle sue derivate parziali* $\dfrac{\partial^{h+k} z}{\partial x^h\, \partial y^k}$ (*con* $h = 0, 1, \ldots, n$; $k = 0, 1, \ldots, m$), *nel rettangolo*

$$R : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

e soddisfacente ivi alle condizioni:

$$(1) \qquad \begin{gathered} z(x_i, y) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} z(x_i, y) = 0, \ldots \\ \ldots, \frac{\partial^{\nu_i - 1}}{\partial x^{\nu_i - 1}} z(x_i, y) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, r)\,. \end{gathered}$$

$$(2) \qquad \begin{gathered} z(x, y_j) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} z(x, y_j) = 0, \ldots \\ \ldots, \frac{\partial^{\mu_j - 1}}{\partial y^{\mu_j - 1}} z(x, y_j) = 0\,, \quad (j = 1, 2, \ldots, s)\,. \end{gathered}$$

Risultano allora, in tutto R, verificate le relazioni:

$$(3) \qquad |z(x,\ y)| \leq \frac{(b-a)^n\,(d-c)^m}{n!\ m!}\,M,$$

$$(4) \qquad \left|\frac{\partial^{h+k} z}{\partial x^h\, dy^k}\right| \leq \frac{(b-a)^{n-h}\,(d-c)^{m-k}}{(n-h)!\,(m-k)!}\,M,$$

$$(h=0,\ 1,\ldots,n;\ k=0,\ 1,\ldots,\ m)\,,$$

ove M indica il massimo modulo di $\dfrac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n\,\partial y^m}$ *in R* (³).

Infatti per la funzione $z(x,\ y)$, soddisfacente alle condizioni (1), vale la formula:

$$(5) \qquad z(x,\ y) = \frac{(x-x_1)^{\nu_1}\ldots(x-x_r)^{\nu_r}}{n!}\cdot\frac{\partial^n}{\partial x^n} z(u,\ y)\,,$$

$$(a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d)\,,$$

dove u indica un conveniente valore intermedio fra a e b, dipendente dal punto $(x,\ y)$ (⁴).

Inoltre, dalle (2) si deduce:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} z(x,\ y_j) = 0\,,\quad \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^n\,\partial y} z(x,\ y_j) = 0\,,\ldots$$

$$\ldots,\ \frac{\partial^{n+\mu_j-1}}{\partial x^n\,\partial y^{\mu_j-1}} z(x,\ y_j) = 0,\quad (j=1,\ 2,\ldots\ s)$$

e quindi, sempre per la già ricordata formula d'interpolazione, si ha:

(³) Intenderemo sempre, nel corso del presente lavoro,

$$\frac{\partial^{0+k} z}{\partial x^0\,\partial y^k} = \frac{\partial^k z}{\partial y^k}\,,\quad \frac{\partial^{h+0} z}{\partial x^h\,\partial y^0} = \frac{\partial^h z}{\partial x^h}\,,\quad \frac{\partial^0 z}{\partial x^0\,\partial y^0} = z.$$

(⁴) Cfr. F. Severi e G. Scorza Dragoni: *Lezioni di Analisi* [Zanichelli, Bologna] II_1 n. 58.

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} z(x, y) = \frac{(y-y_1)^{\mu_1} \dots (y-y_s)^{\mu_s}}{m!} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} z(x, v)$$
$$(a \leq x \leq b, \; c \leq y \leq d),$$

con v valore conveniente compreso tra c e d e dipendente dal punto (x, y). Di qui e dalla (5) si deduce subito la (3).

In modo perfettamente analogo si dimostrano poi le (4) osservando che la $\frac{\partial^{h+k} z}{\partial x^h \partial y^k}$ si annulla per $n-h$ valori convenienti di x dell'intervallo $a \leq x \leq b$, per ogni dato $y \, (c \leq y \leq d)$ e per $m-k$ valori di y dell'intervallo $c \leq y \leq d$, per ogni dato $x \, (a \leq x \leq b)$.

Dimostrato ciò ricordiamo ora anche che l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n \partial y^m} = 0$$

ha l'integrale generale

$$z = \sum_{0}^{n-1}{}_h \, x^h \, Y_h(y) + \sum_{0}^{m-1}{}_k \, y^k \, X_k(x)$$

con le $X_k(x)$, $Y_h(y)$ funzioni arbitrarie dei loro argomenti.

Inoltre, con operazioni lineari e di derivazione, una soluzione risulta univocamente determinata se lungo le linee caratteristiche

$$x = x_1, \; x_2, \dots, x_r; \quad [y = y_1, \; y_2, \dots, y_s]$$

l'integrale $z(x, y)$ debba ridursi a funzioni prescritte della y (e della x) insieme alle sue derivate parziali rispetto alla x (alla y) fino all'ordine $\nu_1 - 1, \; \nu_2 - 1, \dots, \nu_r - 1$ $[\mu_1 - 1, \; \mu_2 - 1, \dots, \mu_s - 1]$ con

$$\nu_1 + \dots + \nu_r = n, \quad \mu_1 + \dots + \mu_s = m,$$

essendo beninteso i dati assegnati in modo compatibile.

§ 2.

2. - Teorema. *Sieno*: $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$; $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ *due gruppi di numeri interi e positivi e indichiamo con* n *e* m *rispettivamente le somme* $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r$, $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_s$; $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$; $y_1 < y_2 < \ldots < y_s$ *due gruppi di punti appartenenti rispettivamente agli intervalli* $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$; *e sieno*

$$\varphi_{i,0}(y),\ \varphi_{i,1}(y), \ldots,\ \varphi_{i,\nu_i - 1}(y), \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$
$$\psi_{j,0}(x),\ \psi_{j,1}(x), \ldots,\ \psi_{j,\mu_j - 1}(x), \quad (j = 1, 2, \ldots, s),$$

due gruppi di funzioni continue arbitrariamente prefissate, purchè le derivate delle φ *fino all'ordine* m *e le derivate delle* ψ *fino all'ordine* n *sieno continue, definite rispettivamente in* $c \leq y \leq d$, $a \leq x \leq b$, *e soddisfacenti alle relazioni*

$$\varphi_{i,h}^{(k)}(y_j) = \psi_{j,k}^{(h)}(x_i)$$

$(i = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s;\ h = 0, 1, \ldots, \nu_i - 1;\ k = 0, 1, \ldots, \mu_j - 1)$,

e

$Q(x, y)$ *l'integrale dell'equazione*

$$\frac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n \partial y^m} = 0,$$

verificante le condizioni:

$$Q(x_i, y) = \varphi_{i,0}(y),\ \frac{\partial}{\partial x} Q(x_i, y) = \varphi_{i,1}(y), \ldots$$
$$\ldots, \frac{\partial^{\nu_i - 1}}{\partial x^{\nu_i - 1}} Q(x_i, y) = \varphi_{i,\nu_i - 1}(y),$$

$$Q(x, y_j) = \psi_{j,0}(x),\ \frac{\partial}{\partial y} Q(x, y_j) = \psi_{j,1}(x), \ldots$$
$$\ldots, \frac{\partial^{\mu_j - 1}}{\partial y^{\mu_j - 1}} Q(x, y_j) = \psi_{j,\mu_j - 1}(x),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s).$$

Supponiamo inoltre che la funzione $f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots \right.$
$\left. \ldots, \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q} \ldots\right)$ (*con* $p = 0, 1, \ldots, n-1$; $q = 0, 1, \ldots, m-1$)
sia continua rispetto a tutti i suoi argomenti nell'iperstrato

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad \left| \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q} \right| < +\infty,$$

$$(p = 0, 1, \ldots, n-1; \; q = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Allora il problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n \partial y^m} = f\left(x, y, z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \ldots, \dfrac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q} \ldots\right), \\ z(x_i, y) = \varphi_{i,0}(y), \; \dfrac{\partial}{\partial x} z(x_i, y) = \varphi_{i,1}(y), \ldots, \dfrac{\partial^{\nu_i - 1}}{\partial x^{\nu_i - 1}} z(x_i, y) = \\ \qquad = \varphi_{i, \nu_i - 1}(y), \\ z(x, y_j) = \psi_{j,0}(x), \; \dfrac{\partial}{\partial y} z(x, y_j) = \psi_{j,1}(x), \ldots, \dfrac{\partial^{\mu_j - 1}}{\partial y^{\mu_j - 1}} z(x, y_j) = \\ \qquad = \psi_{j, \mu_j - 1}(x), \\ (i = 1, 2, \ldots, r; \; j = 1, 2, \ldots, s) \end{cases}$$

ammette almeno una soluzione $z(x, y)$ *continua, assieme alle sue derivate parziali* $\frac{\partial^{h+k} z}{\partial x^h \partial y^k}$ *fino all'ordine* n *rispetto alla* x *e fino all'ordine* m *rispetto alla* y, *nel rettangolo*

$$R: \; a \leq x < b, \quad c \leq y \leq d,$$

se esiste una costante positiva H *tale che, per*

$$T: a \leq x \leq b, \; c \leq y \leq d,$$

$$\left| \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q} - \frac{\partial^{p+q} Q}{\partial x^p \partial y^q} \right| \leq \frac{(b-a)^{n-p}}{(n-p)!} \frac{(d-c)^{m-q}}{(m-q)!} H,$$

$$(p = 0, 1, \ldots, n-1; \; q = 0, 1, \ldots, m-1),$$

risulti:

$$(6)\qquad \left| f\left(x,\, y,\, z,\, \frac{\partial z}{\partial x},\, \frac{\partial z}{\partial y},\ldots,\, \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q}\ldots\right)\right| \leq H \text{ (5)}.$$

Per dimostrare il teorema enunciato osserviamo innanzi tutto che possiamo sempre supporre, per semplicità di dimostrazione,

$$\varphi_{i,0}(y) = \ldots = \varphi_{i,\nu_i-1}(y) = 0\,,$$
$$\psi_{j,0}(x) = \ldots = \psi_{j,\mu_j-1}(x) = 0\,,$$
$$(i = 1,\, 2,\ldots,\, r;\; j = 1,\, 2,\ldots,\, s),$$

nel qual caso risulta $Q(x,\, y) \equiv 0$ ed il campo T si riduce al campo

$$(7)\quad a \leq x \leq b,\; c \leq y \leq d,\; \left|\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q}\right| \leq \frac{(b-a)^{n-p}(d-c)^{m-q}}{(n-p)!\,(m-q)!} H.$$

Indichiamo poi con Σ lo spazio metrico delle funzioni $z(x,\, y)$, continue in R assieme alle loro derivate parziali $\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q}$, fino all'ordine $n-1$ rispetto alla x e fino all'ordine $m-1$ rispetto alla y; la distanza di due elementi, $z_1(x,\, y)$, $z_2(x,\, y)$, di Σ essendo data dalla somma dei massimi delle funzioni

$$|z_1(x,\, y) - z_2(x,\, y)|,$$
$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{\partial z_2}{\partial x}\right|,\; \left|\frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{\partial z_2}{\partial y}\right|,\ldots,\; \left|\frac{\partial^{p+q} z_1}{\partial x^p \partial y^q} - \frac{\partial^{p+q} z_2}{\partial x^p \partial y^q}\right|,$$
$$(p = 0,\, 1,\ldots,\, n-1;\; q = 0,\, 1,\ldots,\, m-1),$$

in R.

(5) Si potrebbe, più in generale, sostituire l'equazione del problema considerato con la

$$D\,\frac{\partial^{n+m-2} z}{\partial x^{n-1} \partial y^{m-1}} = f\left(x,\, y,\, z,\, \frac{\partial z}{\partial x},\, \frac{\partial z}{\partial y},\ldots,\, \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q},\ldots\right),$$

dove $D\,\frac{\partial^{n+m-2} z}{\partial x^{n-1} \partial y^{m-1}}$ indica la derivata totale della funzione $\frac{\partial^{n+m-2} z}{\partial x^{n-1} \partial y^{m-1}}$, e supporre le φ continue con le loro derivate soltanto fino all' ordine $m-1$. e le ψ continue con le loro derivate soltanto fino all' ordine $n-1$.

Per ogni elemento $\lambda(x, y)$ di Σ esiste allora un altro elemento $\tau(x, y)$ di Σ stesso verificante, in R, l'equazione

$$\frac{\partial^{n+m} \tau(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} = f\left(x, y, \lambda(x, y), \ldots, \frac{\partial^{p+q} \lambda(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} \ldots\right)$$

e le condizioni

$$\tau(x_i, y) = 0, \frac{\partial}{\partial x} \tau(x_i, y) = 0, \ldots, \frac{\partial^{\nu_i - 1}}{\partial x^{\nu_i - 1}} \tau(x_i, y) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

$$\tau(x, y_j) = 0, \frac{\partial}{\partial y} \tau(x, y_j) = 0, \ldots, \frac{\partial^{\mu_j - 1}}{\partial y^{\mu_j - 1}} \tau(x, y_j) = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

La funzione $\tau(x, y)$, ove si ponga

$$\tau^*(x, y) = \int_a^x \int_c^y \frac{(x-u)^{n-1}(y-v)^{m-1}}{(n-1)!\,(m-1)!} f\left(u, v, \lambda(u, v), \ldots, \frac{\partial^{p+q} \lambda(u, v)}{\partial u^p \partial v^q} \ldots\right) du\, dv$$

e si indichi con $S(x, y)$ la funzione verificante, in tutto R, alle relazioni

$$\frac{\partial^{n+m} S}{\partial x^n \partial y^m} = 0,$$

$$S(x_i, y) = \tau^*(x_i, y), \ldots, \frac{\partial^{\nu_i - 1}}{\partial x^{\nu_i - 1}} S(x_i, y) = \frac{\partial^{\nu_i - 1}}{\partial x^{\nu_i - 1}} \tau^*(x_i, y),$$

$$S(x, y_j) = \tau^*(x, y_j), \ldots, \frac{\partial^{\mu_j - 1}}{\partial y^{\mu_j - 1}} S(x, y_j) = \frac{\partial^{\mu_j - 1}}{\partial y^{\mu_j - 1}} \tau^*(x, y_j),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s),$$

è data dalla formula

$$\tau(x, y) = \tau^*(x, y) - S(x, y). \tag{8}$$

Si tratta ora di far vedere che nelle ipotesi del teorema enunciato la trasformazione (8) ammette almeno un elemento unito.

A tale scopo indichiamo con Σ_H l'insieme degli elementi $g(x, y)$ di Σ per i quali esista e sia continua, in R, la $\frac{\partial^{n+m} g}{\partial x^n \partial y^m}$ e verifichino inoltre le relazioni:

$$g(x_i, y) = 0, \ \frac{\partial}{\partial x} g(x_i, y) = 0, \ldots, \frac{\partial^{\nu_i - 1}}{\partial x^{\nu_i - 1}} g(x_i, y) = 0,$$

$$g(x, y_j) = 0, \ \frac{\partial}{\partial y} g(x, y_j) = 0, \ldots, \frac{\partial^{\mu_j - 1}}{\partial y^{\mu_j - 1}} g(x, y_j) = 0,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r; \ j = 1, 2, \ldots, s)$$

e la diseguaglianza

$$\left| \frac{\partial^{n+m} g}{\partial x^n \partial y^m} \right| \leq H.$$

Per le funzioni $g(x, y)$ varranno allora le relazioni, analoghe alle (3) e (4)

$$\left| \frac{\partial^{h+k} g}{\partial x^h \partial y^k} \right| \leq \frac{(b-a)^{n-h} (d-c)^{m-k}}{(n-h)! \ (m-k)!} H,$$

$$(h = 0, 1, \ldots, n; \ k = 0, 1, \ldots, m).$$

L'insieme Σ_H sarà allora, evidentemente, compatto rispetto a Σ perchè composto da funzioni equicontinue ed equilimitate, in R, assieme alle derivate parziali $\frac{\partial^{p+q} g}{\partial x^p \partial y^q}$ fino all'ordine $n-1$ rispetto alla x e fino all'ordine $m-1$ rispetto alla y.

L'involucro chiuso $\overline{\Sigma}_H$ di Σ_H (in Σ) è un sottospazio compatto di Σ e per ogni elemento $z(x, y)$ di $\overline{\Sigma}_H$ risulta

$$\left| \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q} \right| \leq \frac{(b-a)^{n-p} (d-c)^{m-q}}{(n-p)! \ (m-q)!} H,$$

$$(p = 0, 1, \ldots, n-1; \ q = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Di qui e dalle (6), (7) segue che, per $\tau(x, y)$ in $\overline{\Sigma}_H$, la (8) farà corrispondere un elemento $\tau(x, y)$ soddisfacente, in tutto R, alla

$$\left| \frac{\partial^{n+m} \tau}{\partial x^n \partial y^m} \right| \leq H$$

e quindi anche, per il lemma dimostrato, alle

$$\left| \frac{\partial^{h+k} \tau}{\partial x^h \partial y^k} \right| \leq \frac{(b-a)^{n-h} (d-c)^{m-k}}{(n-h)! \, (m-k)!} H$$

$$(h = 0, 1, \ldots, n; \; k = 0, 1, \ldots, m)$$

e perciò $\tau(x, y)$ appartiene a Σ_H. L'immagine Σ'_H di $\overline{\Sigma}_H$ è quindi una porzione di $\overline{\Sigma}_H$ stessa ed inoltre, come è subito visto, è anch'essa compatta.

Dopo di che, in virtù di noti teoremi [6], segue subito che la trasformazione (8) ammette almeno un elemento unito.

§ 3.

3. – Passiamo ora ad estendere il teorema dimostrato ai sistemi di equazioni del tipo precedente e limitiamoci, per semplicità di enunciato, al caso di condizioni al contorno omogenee.

Sieno: $\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,r_i}$; $\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,s_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ *due guppi di numeri interi e positivi e indichiamo rispettivamente con* n_i *e* m_i *le somme* $\alpha_{i,1} + \ldots + \alpha_{i,r_i}$, $\beta_{i,1} + \ldots + \beta_{i,s_i}$ *e sieno* $x_{i,1}, \ldots, x_{i,r_i}$; $y_{i,1}, \ldots, y_{i,s_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ *due gruppi di punti appartenenti rispettivamente agli intervalli* $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$.

[6] Cfr. Birkhoff–Kellog: *Invariant points in function space* [Transactions of the American Mathematical Society, vol. 23 (1922), pp. 96-115]; vedere anche R. Caccioppoli loc. cit. per primo in [2].

Supponiamo inoltre che le funzioni

$$f_i\left(x,\ y,\ z_1,\dots,\ \frac{\partial^{h_1+k_1} z_1}{\partial x^{h_1}\,\partial y^{k_1}},\dots,\ z_p,\dots,\ \frac{\partial^{h_p+k_p} z_p}{\partial x^{h_p}\,\partial y^{k_p}}\dots\right)$$

$(i=1, 2,\dots, p;\ h_t=0, 1,\dots, n_t-1;\ k_t=0, 1,\dots, m_t-1;\ t=1, 2,\dots, p)$

sieno continue rispetto a tutti gli argomenti nell' iperstrato

$$a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d,\quad \left|\frac{\partial^{h_t+k_t} z_t}{\partial x^{h_t}\,\partial y^{k_t}}\right|<+\infty,$$

$(h_t=0, 1,\dots, n_t-1;\ k_t=0, 1,\dots, m_t-1;\ t=1, 2,\dots, p)$.

Allora le

$$\text{(9)}\quad \frac{\partial^{n_i+m_i} z_i}{\partial x^{n_i}\,\partial y^{m_i}}=f_i\left(x,\ y,\ z_1,\dots\ \frac{\partial^{h_1+k_1} z_1}{\partial x^{h_1}\,\partial y^{k_1}},\dots z_p,\dots,\ \frac{\partial^{h_p+k_p} z_p}{\partial x^{h_p}\,\partial y^{k_p}}\dots\right),$$

$$(i=1, 2,\dots, p),$$

ammettono sempre almeno un sistema di soluzioni $z=z_i(x, y)$, *con* $z_i(x, y)$ *continua in*

$$R:\ a\leq x\leq b,\quad c\leq y\leq d,$$

assieme alle sue derivale parziali $\dfrac{\partial^{\rho_i+\sigma_i} z_i}{\partial x^{\rho_i}\,\partial y^{\sigma_i}}$ *fino all'ordine* n_i *rispetto alla* x *e fino all'ordine* m_i *rispetto alla* y *e soddisfacente alle condizioni:*

$$\text{(10)}\quad \begin{aligned} &z_i(x_{i,h},\ y)=0,\ \frac{\partial}{\partial x}z_i(x_{i,h},\ y)=0,\dots,\ \frac{\partial^{\alpha_{i,h}-1}}{\partial x^{\alpha_{i,h}-1}}z_i(x_{i,h},\ y)=0, \\ &\qquad (h=1, 2,\dots, r_i), \\ &z_i(x,\ y_{i,k})=0,\ \frac{\partial}{\partial y}z_i(x,\ y_{i,k})=0,\dots,\ \frac{\partial^{\beta_{i,k}-1}}{\partial y^{\beta_{i,k}-1}}z_i(x,\ y_{i,k})=0, \\ &\qquad (k=1, 2,\dots, s_i), \end{aligned}$$

se si possono determinare p *numeri positivi* $M_1,\ M_2,\dots,\ M_p$ *e* $p(p+1)$ *numeri non negativi* $C_{i,r}(i,\ r=1, 2,\dots, p)$, $C_i(i=1,$

$2, \ldots, p)$ *in modo che risulti:*

$$(11)\quad \begin{array}{l} C_{1,1} M_1 + C_{1,2} M_2 + \ldots + C_{1,p} M_p + C_1 \leq M_1, \\ C_{2,1} M_1 + C_{2,2} M_2 + \ldots + C_{2,p} M_p + C_2 \leq M_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{p,1} M_1 + C_{p,2} M_2 + \ldots + C_{p,p} M_p + C_p \leq M_p, \end{array}$$

e che in tutto il campo

$$(12)\quad \begin{array}{l} a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d, \left| \dfrac{\partial^{h_t + k_t} z_t}{\partial x^{h_t} \partial y^{k_t}} \right| \leq \\ \leq \dfrac{(b-a)^{n_t - h_t} (d-c)^{m_t - k_t}}{(n_t - h_t)!\,(m_t - k_t)!} M_t, \end{array}$$

$$(h_t = 0,\ 1, \ldots,\ n_t - 1;\ k_t = 0,\ 1, \ldots,\ m_t - 1;\ t = 1, 2, \ldots, p),$$

sieno verificate le diseguaglianze

$$(13)\qquad |f_i| \leq \sum_1^p {}_r C_{i,r} M_r + C_i, \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ p).$$

La dimostrazione di questo teorema si svolge in modo analogo a quello del numero precedente.

Indicheremo con Σ lo spazio metrico delle *p-ple* ordinate di funzioni $\{z(x,\ y)\} = (z_1(x,\ y),\ z_2(x,\ y), \ldots,\ z_p(x,\ y))$, con $z_i(x,\ y)$ continua in R assieme alle sue derivate parziali $\dfrac{\partial^{h_i + k_i} z_i}{\partial x^{h_i} \partial y^{k_i}}$ fino all'ordine $n_i - 1$ rispetto alla x e fino all'ordine $m_i - 1$ rispetto alla y e assumeremo, in tale spazio, come distanza fra i due punti $(z_1,\ z_2, \ldots,\ z_p)$, $(Z_1,\ Z_2, \ldots\ Z_p)$, la somma dei massimi delle funzioni

$$|z_i(x,\ y) - Z_i(x,\ y)|,\quad \left| \frac{\partial^{h_i + k_i} z_i}{\partial x^{h_i} \partial y^{k_i}} - \frac{\partial^{h_i + k_i} Z_i}{\partial x^{h_i} \partial y^{k_i}} \right|,$$

$$(h_i = 0,\ 1, \ldots,\ n_i - 1;\ k_i = 0,\ 1, \ldots,\ m_i - 1;\ i = 1, 2, \ldots, p).$$

Ad ogni elemento $(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ di Σ corrisponderà un altro ben determinato elemento $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$ di Σ stesso che verifica il sistema:

$$\frac{\partial^{n_i + m_i} \tau_i(x, y)}{\partial x^{n_i} \partial y^{m_i}} = f_i \left(x, y, z_1(x, y), \ldots, \frac{\partial^{h_1 + k_1} z_1(x, y)}{\partial x^{h_1} \partial y^{k_1}}, \ldots \right.$$
$$\left. z_p(x, y), \ldots, \frac{\partial^{h_p + k_p} z_p(x, y)}{\partial x^{h_p} \partial y^{k_p}} \ldots \right)$$

e le condizioni:

$$\tau_i(x_{i,h}, y) = 0, \frac{\partial}{\partial x} \tau_i(x_{i,h}, y) = 0, \ldots, \frac{\partial^{\alpha_{i,h} - 1}}{\partial x^{\alpha_{i,h} - 1}} \tau_i(x_{i,h}, y) = 0,$$

$$\tau_i(x, y_{i,k}) = 0, \frac{\partial}{\partial y} \tau_i(x, y_{i,k}) = 0, \ldots, \frac{\partial^{\beta_{i,k} - 1}}{\partial y^{\beta_{i,k} - 1}} \tau_i(x, y_{i,k}) = 0.$$

$$(h = 1, 2, \ldots, r_i;\ k = 1, 2, \ldots, s_i;\ i = 1, 2, \ldots, p).$$

Le funzioni $\tau_i(x, y)$ saranno date dalle formule

$$\tau_i(x, y) = \tau_i^*(x, y) - S_i(x, y), \tag{14}$$

dove le funzioni $\tau_i^*(x, y)$ e $S_i(x, y)$ si costruiranno con procedimento analogo a quello detto nel numero precedente.

Premesso ciò, per far vedere che nella ipotesi del teorema enunciato la trasformazione (14) ammette almeno un elemento unito, indichiamo con Σ' l'insieme degli elementi $\{g(x, y)\}$ di Σ per i quali esista e sia continua, in R, la $\dfrac{\partial^{n_i + m_i} g_i}{\partial x^{n_i} \partial y^{m_i}}$ e verifichino inoltre le relazioni:

$$g_i(x_{i,h}, y) = 0, \frac{\partial}{\partial x} g_i(x_{i,h}, y) = 0, \ldots, \frac{\partial^{\alpha_{i,h} - 1}}{\partial x^{\alpha_{i,h} - 1}} g_i(x_{i,h}, y) = 0,$$

$$g_i(x, y_{i,k}) = 0, \frac{\partial}{\partial y} g_i(x, y_{i,k}) = 0, \ldots, \frac{\partial^{\beta_{i,k} - 1}}{\partial y^{\beta_{i,k} - 1}} g_i(x, y_{i,k}) = 0,$$

$$(h = 1, 2, \ldots, r_i;\ k = 1, 2, \ldots, s_i;\ i = 1, 2, \ldots, p)$$

e la diseguaglianza

$$\left| \frac{\partial^{n_i - m_i} g_i}{\partial x^{n_i} \, \partial y^{m_i}} \right| \leq \sum_1^p {}_r \, C_{i,r} M_r + C_i .$$

Per le funzioni $g_i(x, y)$ varranno allora le relazioni, analoghe alle (3) e (4),

$$\left| \frac{\partial^{\rho_i + \sigma_i} g_i}{\partial x^{\rho_i} \, \partial y^{\sigma_i}} \right| \leq \frac{(b - a)^{n_i - \rho_i} (d - c)^{m_i - \sigma_i}}{(n_i - \rho_i)! \, (m_i - \sigma_i)!} \left[\sum_1^p {}_r \, C_{i,r} M_r + C_i \right],$$

$$(\rho_i = 0, 1, \ldots, n_i ; \ \sigma_i = 0, 1, \ldots, m_i ; \ i = 1, 2, \ldots, p)$$

ossia, per le (11),

$$\left| \frac{\partial^{\rho_i + \sigma_i} g_i}{\partial x^{\rho_i} \, \partial y^{\sigma_i}} \right| \leq \frac{(b - a)^{n_i - \rho_i} (d - c)^{m_i - \sigma_i}}{(n_i - \rho_i)! \, (m_i - \sigma_i)!} M_i .$$

L'insieme Σ' è evidentemente compatto rispetto a Σ e per ogni elemento $\{ z(x, y) \}$ dell'involucro chiuso $\overline{\Sigma}'$ di Σ' risulta

$$\left| \frac{\partial^{h_i + k_i} z_i}{\partial x^{h_i} \, \partial y^{k_i}} \right| \leq \frac{(b - a)^{n_i - h_i} (d - c)^{m_i - k_i}}{(n_i - h_i)! \, (m_i - k_i)!} M_i ,$$

$$(h_i = 0, 1, \ldots, n_i - 1 ; \ k_i = 0, 1, \ldots, m_i - 1 ; \ i = 1, 2, \ldots, p).$$

Di qui e dalle (12), (13) segue che, per $\{ z(x, y) \}$ in $\overline{\Sigma}'$, la (14) farà corrispondere un elemento $\{ \tau(x, y) \}$ soddisfacente, in tutto R, alla

$$\left| \frac{\partial^{n_i + m_i} \tau_i}{\partial x^{n_i} \, \partial y^{m_i}} \right| \leq \sum_1^p {}_r \, C_{i,r} M_r + C_i , \quad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

e quindi, per il lemma dimostrato e per le (11), anche alle:

$$\left| \frac{\partial^{\rho_i + \sigma_i} \tau_i}{\partial x^{\rho_i} \, \partial y^{\sigma_i}} \right| \leq \frac{(b - a)^{n_i - \rho_i} (d - c)^{m_i - \sigma_i}}{(n_i - \rho_i)! \, (m_i - \sigma_i)!} M_i ,$$

$$(\rho_i = 0, 1, \ldots, n_i ; \ \sigma_i = 0, 1, \ldots, m_i ; \ i = 1, 2, \ldots, p)$$

e perciò $\{\tau(x, y)\}$ appartiene a Σ'. Dopo di che, con ragionamento analogo a quello svolto nel numero precedente, si viene senz' altro a provare il teorema enunciato.

4. - Tenendo presente un lemma che ho avuto occasione di dimostrare in un altro lavoro [7], possiamo enunciare il seguente teorema, contenuto però nel precedente.

Le (9) *ammettono certamente almeno un sistema di soluzioni* $z = z_i(x, y)$, *con* $z_i(x, y)$ *continua in* R, *assieme alle derivate parziali* $\dfrac{\partial^{\rho_i + \sigma} z_i}{\partial x^{\rho_i} \partial y^{\sigma_i}}$ *fino all' ordine* n_i *rispetto alla* x *e fino all' ordine* m_i *rispetto alla* y *e verificanti le condizioni* (10) *se, ferme restando tutte le altre ipotesi fatte sulle* f_i, *esistono* $p(p+1)$ *numeri non negativi* $\gamma_{i,r}$ $(i, r = 1, 2, \ldots, p)$, γ_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ *tali che risulti*

$$(15) \qquad D_k = (-1)^k \begin{vmatrix} \gamma_{1,1} - 1 & \gamma_{1,2} & \ldots & \gamma_{1,k} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} - 1 & \ldots & \gamma_{2,k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{k,1} & \gamma_{k,2} & \ldots & \gamma_{k,k} - 1 \end{vmatrix} > 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

e che, detti $N_1, N_2, \ldots, N_p$, p *numeri reali positivi qualsiasi, in tutto il campo*

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad \left| \frac{\partial^{h_i + k_i} z_i}{\partial x^{h_i} \partial y^{k_i}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n_i - h_i} (d-c)^{m_i - k_i}}{(n_i - h_i)! \, (m_i - k_i)!} N_i,$$

$$(h_i = 0, 1, \ldots, n_i - 1; \; k_i = 0, 1, \ldots, m_i - 1; \; i = 1, 2, \ldots, p),$$

[7] G. Zwirner: *Problemi di valori al contorno per sistemi di equazioni differenziali ordinarie* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Tomo CI, Parte II (1941-42), pp. 405-418], p. 411.

sieno verificate le diseguaglianze

$$f_i \leq \sum_r^p \gamma_{i,r} N_r + \gamma_i .$$

Infatti, per le (15) e per il lemma ricordato in (7), è possibile determinare dei numeri positivi $\bar{N}_1, \ldots, \bar{N}_p$ tali che sia

$$\gamma_{1,1} \bar{N}_1 + \gamma_{1,2} \bar{N}_2 + \ldots + \gamma_{1,p} \bar{N}_p + \gamma_1 \leq \bar{N}_1 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\gamma_{p,1} \bar{N}_1 + \gamma_{p,2} \bar{N}_2 + \ldots + \gamma_{p,p} \bar{N}_p + \gamma_p \leq \bar{N}_p .$$

Dopo di che nel campo

$$a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d, \quad \left| \frac{\partial^{h_i + k_i} z_i}{\partial x^{h_i} \partial y^{k_i}} \right| \leq \frac{(b-a)^{n_i - h_i} (d-c)^{m_i - k_i}}{(n_i - h_i)!\,(m_i - k_i)!} \bar{N}_i ,$$

$$(h_i = 0, 1, \ldots, n_i - 1;\ k_i = 0, 1, \ldots, m_i - 1;\ i = 1, 2, \ldots, p),$$

le (9) ammettono almeno un sistema di soluzioni $z = z_i(x, y)$, verificanti le (10), e con $z_i(x, y)$ continua in R insieme con le sue derivate parziali $\dfrac{\partial^{\rho_i + \sigma_i} z_i}{\partial x^{\rho_i} \partial y^{\sigma_i}}$ fino all'ordine n_i rispetto alla x e fino all'ordine m_i rispetto alla y.

§ 4.

5. – Dimostreremo ora un criterio d'unicità relativo al problema di Nicoletti e, per semplicità di enunciato, mi limiterò a considerare il caso di condizioni omogenee al contorno.

Sieno: $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,r_i}$; $\beta_{i,1}, \ldots, \beta_{i,s_i}$ *due gruppi di numeri interi e positivi e indichiamo rispettivamente con* n_i *e* m_i *le somme* $\alpha_{i,1} + \ldots + \alpha_{i,r_i}$, $\beta_{i,1} + \ldots + \beta_{i,s_i}$; $x_{i,1}, \ldots, x_{i,r_i}$; $\beta_{i,1}, \ldots, \beta_{i,s_i}$ *due gruppi di punti appartenenti rispettivamente agli intervalli* $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$;

e sieno

$$f_i\left(x,\ y,\ z_1,\ldots \frac{\partial^{\rho_1+\sigma_1} z_1}{\partial x^{\rho_1}\,\partial y^{\sigma_1}},\ldots,\ z_p,\ldots,\ \frac{\partial^{\rho_p+\sigma_p} z_p}{\partial x^{\rho_p}\,\partial y^{\sigma_p}}\ldots\right),$$

$$(i=1,2,\ldots,p;\ \rho_t=0,1,\ldots,n_t;\ \sigma_t=0,1,\ldots,m_t;$$
$$\rho_t+\sigma_t\leq n_t+m_t-1;\ t=1,\ 2,\ldots,\ p),$$

p funzioni definite e continue nel dominio

$$D: a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d,\qquad \left|\frac{\partial^{\rho_i+\sigma_i} z_i}{\partial x^{\rho_i}\,\partial y^{\sigma_i}}\right|\leq \overline{M},$$

$$(i=1,\ 2,\ldots,p;\ \rho_i=0,\ 1,\ldots,n_i;\ \sigma_i=0,\ 1,\ldots,\ m_i;\ \rho_i+\sigma_i\leq n_i+m_i-1)$$

e soddisfacenti, per ogni coppia di punti distinti del dominio D,

$$\left(x,\ y,\ z_1,\ldots,\ \frac{\partial^{\rho_1+\sigma_1} z_1}{\partial x^{\rho_1}\,\partial y^{\sigma_1}},\ldots,\ z_p,\ldots,\ \frac{\partial^{\rho_p+\sigma_p} z_p}{\partial x^{\rho_p}\,\partial y^{\sigma_p}}\ldots\right),$$

$$\left(x,\ y,\ Z_1,\ldots,\ \frac{\partial^{\rho_1+\sigma_1} Z_1}{\partial x^{\rho_1}\,\partial y^{\sigma_1}},\ldots,\ Z_p,\ldots \frac{\partial^{\rho_p+\sigma_p} Z_p}{\partial x^{\rho_p}\,\partial y^{\sigma_p}},\ldots\right),$$

alla condizione di Lipschitz:

$$\left|f_i\left(x,\ y,\ z_1,\ldots,\ \frac{\partial^{\rho_p+\sigma_p} z_p}{\partial x^{\rho_p}\,\partial y^{\sigma_p}}\ldots\right)-f_i\left(x,\ y,\ Z_1,\ldots,\ \frac{\partial^{\rho_p+\sigma_p} Z_p}{\partial x^{\rho_p}\,\partial y^{\sigma_p}}\ldots\right)\right|\leq$$

(16)

$$\leq\sum_1^p{}_r\ \sum_0^{n_r}{}_{\rho_r}\ \sum_0^{m_r}{}_{\sigma_r}\ \delta_{i,r,\rho_r,\sigma_r}\left|\frac{\partial^{\rho_r+\sigma_r}}{\partial x^{\rho_r}\,\partial y^{\sigma_r}}(z_r-Z_r)\right|,$$

$$(\rho_r+\sigma_r\leq n_r+m_r-1),$$

dove le $\delta_{i,r,\rho_r,\sigma_r}$ sono costanti non negative e tali che, posto

$$(17)\qquad c_{i,r}=\sum_0^{n_r}{}_{\rho_r}\ \sum_0^{m_r}{}_{\sigma_r}\ \delta_{i,r,\rho_r,\sigma_r}\ \frac{(b-a)^{n_r-\rho_r}\,(d-c)^{m_r-\sigma_r}}{(n_r-\rho_r)!\ (m_r-\sigma_r)!}\ \overline{M}_r,$$

$$(\rho_r+\sigma_r\leq n_r+m_r-1),$$

risulti

$$(18)\qquad D_t = (-1)^t \begin{vmatrix} c_{1,1}-1 & c_{1,2} & \dots & c_{1,t} \\ c_{2,1} & c_{2,2}-1 & \dots & c_{2,t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{t,1} & c_{t,2} & \dots & c_{t,t}-1 \end{vmatrix} > 0, \quad (t = 1, 2, \dots, p).$$

Allora:

In queste ipotesi il problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{n_i+m_i} z_i}{\partial x^{n_i}\,\partial y^{m_i}} = f_i\left(x, y, z_1, \dots, \dfrac{\partial^{\rho_1+\sigma_1} z_1}{\partial x^{\rho_1}\,\partial y^{\sigma_1}}, \dots, z_p, \dots \dfrac{\partial^{\rho_p+\sigma_p} z_p}{\partial x^{\rho_p}\,\partial y^{\sigma_p}} \dots\right), \\ z_i(x_{i,h}, y) = 0, \ \dfrac{\partial}{\partial x} z_i(x_{i,h}, y) = 0, \dots, \dfrac{\partial^{\alpha_{i,h}-1}}{\partial x^{\alpha_{i,h}-1}} z_i(x_{i,h}, y) = 0, \\ z_i(x, y_{i,k}) = 0, \ \dfrac{\partial}{\partial y} z_i(x, y_{i,k}) = 0, \dots, \dfrac{\partial^{\beta_{i,k}-1}}{\partial y^{\beta_{i,k}-1}} z_i(x, y_{i,k}) = 0, \\ (i = 1, 2, \dots, p;\ h = 1, 2, \dots, r_i;\ k = 1, 2, \dots, s_i), \end{cases}$$

ammette, al più, un sistema di integrali $z = z_i(x, y)$, *con* $z_i(x, y)$ *continua in*

$$R:\ a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d,$$

assieme alle sue derivate parziali $\dfrac{\partial^{\rho_i+\sigma_i} z_i}{\partial x^{\rho_i}\,\partial y^{\sigma_i}}$ *fino all'ordine* n_i *rispetto alla* x *e fino all'ordine* m_i *rispetto alla* y.

Infatti, sieno, se possibile, $z = z_i(x, y)$ e $z = Z_i(x, y)$ due superficie integrali distinte del problema considerato e ricordiamo che per la funzione $z_i(x, y) - Z_i(x, y)$ valgono, in tutto R, le relazioni

$$(19)\qquad \left| \frac{\partial^{\rho_i+\sigma_i}}{\partial x^{\rho_i}\,\partial y^{\sigma_i}} (z_i - Z_i) \right| \leq \frac{(b-a)^{n_i-\rho_i}\,(d-c)^{m_i-\sigma_i}}{(n_i-\rho_i)!\,(m_i-\sigma_i)!}\,\overline{M}_i,$$

$$(i = 1, 2, \dots, p;\ \rho_i = 0, 1, \dots, n_i;\ \sigma_i = 0, 1, \dots, m_i),$$

ove $\overline{M}_i$ indica il massimo modulo di $\dfrac{\partial^{n_i+m_i}}{\partial x^{n_i}\,\partial y^{m_i}}(z_i - Z_i)$, in R.

Inoltre, dalle (16), tenendo presente le (19), si deduce

$$\left|\frac{\partial^{n_i+m_i}}{\partial x^{n_i}\,\partial y^{m_i}}(z_i - Z_i)\right| \leq \overline{M}_i \leq$$

$$\leq \sum_{1}^{p}{}_r \sum_{0}^{n_r}{}_{\rho_r} \sum_{0}^{m_r}{}_{\sigma_r} \delta_{i,r,\rho_r,\sigma_r} \frac{(b-a)^{n_r-\rho_r}(d-c)^{m_r-\sigma_r}}{(n_r-\rho_r)!\,(m_r-\sigma_r)!}\overline{M}_r,$$

ossia, per le (17),

$$\overline{M}_i \leq c_{i,1}\overline{M}_1 + c_{i,3}\overline{M}_2 + \ldots + c_{i,p}\overline{M}_p, \quad (i = 1, 2, \ldots, p), \tag{20}$$

il che è assurdo in base alle (18) e ad un lemma dimostrato in un lavoro precedente [8], dato che almeno una delle $\overline{M}_i$ deve essere positiva.

[8] G. Zwirner: *Criteri d'unicità per un problema di valori al contorno per equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie d'ordine qualunque* [Rendiconti del Seminario Mat. della R. Università di Padova, vol. XIII (1942), pp. 9-25], pag. 18. In tale lemma ho appunto dimostrato che nelle ipotesi (18) il sistema (20), nelle incognite $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \ldots, \overline{M}_p$, ammette soltanto soluzioni non positive.

(Pervenuto in Redazione il 18 Gennaio 1943-XXI)