RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIANFRANCO CIMMINO

Su alcuni sistemi lineari omogenei di equazioni alle derivate parziali del primo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 12 (1941), p. 89-113

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1941__12__89_0>

SU ALCUNI SISTEMI LINEARI OMOGENEI DI EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI DEL PRIMO ORDINE

di Gianfranco Cimmino (*a Bologna*).

In molte questioni, sia di Analisi che di Fisica matematica (si pensi, per esempio, alla teoria delle funzioni monogene di una o più variabili complesse, o a quella del campo elettromagnetico), si sono presentati dei sistemi lineari di equazioni alle derivate parziali del primo ordine a coefficienti costanti. Le circostanze che possono aver luogo per dei sistemi cosiffatti appaiono tanto molteplici e svariate, da far ritenere opportuna la trattazione di qualche tipo particolare, piuttosto che lo sviluppo sistematico di una teoria generale. Mi sono qui proposto di investigare una classe di sistemi lineari omogenei, caratterizzata da due particolarità, che introducono una notevole semplificazione nello studio: suppongo, in primo luogo, che il numero delle funzioni incognite del sistema sia uguale a quello delle variabili indipendenti e, in secondo luogo, che le funzioni incognite debbano riuscire necessariamente armoniche, per poter soddisfare al sistema stesso. È chiaro che queste due condizioni sono state suggerite dall'esempio del sistema delle equazioni di monogenia, per il quale esse sono appunto verificate; e tale analogia può servire anche di orientamento nella ricerca: per esempio, sarà da aspettarsi che i nostri sistemi differenziali possano tradursi in sistemi di condizioni di tipo integrale (analogo del teorema fondamentale di Cauchy sulle funzioni analitiche).

Fra i risultati del presente lavoro sono da annoverare alcune proposizioni riguardanti due sistemi del tipo suddetto, uno di quattro equazioni con quattro incognite (n. 3), l'altro di

$\frac{1}{2}n(n-1)+1$ equazioni con n incognite (n. 4); tali proposizioni estendono, oltre ai teoremi fondamentali di CAUCHY sulle funzioni analitiche, anche un teorema sulle equazioni di monogenia, soltanto recentemente dimostrato in maniera completa da D. MENCHOFF.

Questa ricerca dà origine a varie questioni, che essa lascia ancora insolute e che potranno formare oggetto di ulteriore studio, prima fra tutte quella di una completa caratterizzazione dei sistemi differenziali del tipo qui considerato: dopo le premesse del presente lavoro, a prescindere dalla notevole complicazione formale, che già si rileva per i sistemi con tre, o quattro funzioni incognite, non dovrebbe essere difficile determinare tutti i possibili sistemi differenziali del detto tipo, con un numero m qualsiasi di equazioni e un numero n qualsiasi di funzioni incognite. Qui ci siamo limitati a far ciò soltanto per $m=n=2$ (n. 1) e per $m=n=3$ (n. 2). Qualche primo risultato per il caso di m ed n qualunque è contenuto nel n. 5, mentre nel n. 6 si accenna ad altre questioni, che a tali risultati si connettono e la cui risoluzione completerebbe utilmente il presente lavoro.

È poi naturale pensare alla possibilità di perseguire ulteriormente l'analogia con la teoria delle funzioni monogene; per quanto sia prevedibile che ciò potrà riuscire soltanto in misura abbastanza limitata, ritengo che anche in questa direzione si apra un campo di indagine non privo di interesse.

1. – SISTEMI DI DUE EQUAZIONI CON DUE INCOGNITE.

Dette $X(x, y)$, $Y(x, y)$ le due funzioni incognite, consideriamo un sistema del tipo

$$
(1)\qquad \begin{aligned} a_{11}X_x + a_{12}X_y + b_{11}Y_x + b_{12}Y_y = 0\,, \\ a_{21}X_x + a_{22}X_y + b_{21}Y_x + b_{22}Y_y = 0\,; \end{aligned}
$$

vediamo facilmente che, se due funzioni X, Y non possono verificare le (1) in un campo A, senza essere ivi armoniche, il sistema (1) deve riuscire equivalente a quello delle equazioni di monogenia, a meno di una sostituzione lineare eseguita sulle due funzioni incognite.

Infatti, anzitutto non può essere $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$, perchè, in tal caso, se fosse $a_{11}=a_{12}=a_{21}=a_{22}=0$, si avrebbe una soluzione di (1), ponendo X uguale a un'arbitraria funzione derivabile e Y uguale a zero, mentre, se uno almeno dei coefficienti a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} risulta diverso da zero, si avrebbero due soluzioni di (1), ponendo una volta $X=e^{a_{12}x-a_{11}y}$, $Y=0$ e un'altra volta $X=e^{a_{22}x-a_{21}y}$, $Y=0$, sicchè, in ogni caso, esisterebbero soluzioni X, Y di (1), con X, Y non entrambe armoniche. Essendo allora $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$, potremo risolvere le (1) rispetto ad X_x e X_y; ne risulterà un sistema del tipo

$$(1') \qquad \begin{aligned} X_x &= b'_{11}Y_x+b'_{12}Y_y,\\ X_y &= b'_{21}Y_x+b'_{22}Y_y. \end{aligned}$$

Dette α, β, γ tre costanti tali che sia

$$(2) \qquad b'_{11}\beta+b'_{12}\gamma=b'_{21}\alpha+b'_{22}\beta,$$

una soluzione di (1') sarà data da

$$X=(b'_{11}\alpha+b'_{12}\beta)x^2+2(b'_{11}\beta+b'_{12}\gamma)xy+(b'_{21}\beta+b'_{22}\gamma)y^2,$$

$$Y=\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2;$$

ma, se fosse $\alpha+\gamma\neq 0$, la Y non riuscirebbe armonica; dunque, non potendo annullarsi tutte le b'_{hk}, bisognerà che la (2) equivalga a $\alpha+\gamma=0$, cioè dovrà essere $b'_{11}=b'_{22}$, $b'_{12}=-b'_{21}$. Allora le (1'), o, ciò che è lo stesso, le (1) esprimono semplicemente il fatto che le $X-b'_{11}Y$, $b'_{12}Y$ sono legate fra loro dalle equazioni di monogenia.

2. – Sistemi di tre equazioni con tre incognite.

Dette $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ le tre funzioni incognite, consideriamo ora il sistema di tre equazioni

$$
(3)\quad \begin{aligned}
&a_{11}X_x+a_{12}X_y+a_{13}X_z+b_{11}Y_x+b_{12}Y_y+b_{13}Y_z+c_{11}Z_x+c_{12}Z_y+c_{13}Z_z=\\
&a_{21}X_x+a_{22}X_y+a_{23}X_z+b_{21}Y_x+b_{22}Y_y+b_{23}Y_z+c_{21}Z_x+c_{22}Z_y+c_{23}Z_z=\\
&a_{31}X_x+a_{32}X_y+a_{33}X_z+b_{31}Y_x+b_{32}Y_y+b_{33}Y_z+c_{31}Z_x+c_{32}Z_y+c_{33}Z_z=\cdot
\end{aligned}
$$

Se il determinante delle a_{hk} fosse uguale a zero, dette λ_1, λ_2, λ_3 tre costanti non tutte nulle, per cui

$$
\begin{aligned}
a_{11}\lambda_1+a_{12}\lambda_2+a_{13}\lambda_3&=a_{21}\lambda_1+a_{22}\lambda_2+a_{23}\lambda_3=\\
&=a_{31}\lambda_1+a_{32}\lambda_2+a_{33}\lambda_3=0,
\end{aligned}
$$

una soluzione di (3) sarebbe data da $X=e^{\lambda_1 x+\lambda_2 y+\lambda_3 z}$, $Y=Z=0$, dove la X non è armonica. Pertanto, se vogliamo che il sistema (3) possa essere verificato soltanto da terne di funzioni armoniche X, Y, Z, bisognerà che il determinante delle a_{hk} sia diverso da zero; naturalmente, lo stesso vale per il determinante delle b_{hk} e per quello delle c_{hk}. Il sistema (3) si potrà allora mettere nella forma

$$
(3')\quad \begin{aligned}
X_x&=b'_{11}Y_x+b'_{12}Y_y+b'_{13}Y_z+c'_{11}Z_x+c'_{12}Z_y+c'_{13}Z_z,\\
X_y&=b'_{21}Y_x+b'_{22}Y_y+b'_{23}Y_z+c'_{21}Z_x+c'_{22}Z_y+c'_{23}Z_z,\\
X_z&=b'_{31}Y_x+b'_{32}Y_y+b'_{33}Y_z+c'_{31}Z_x+c'_{32}Z_y+c'_{33}Z_z.
\end{aligned}
$$

Supposto che α_{hk} e β_{hk} siano gli elementi di due determinanti simmetrici del terzo ordine, tali che la matrice

$$
(4)\quad \left\|\begin{matrix} b'_{11} & b'_{12} & b'_{13}\\ b'_{21} & b'_{22} & b'_{23}\\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33}\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} c'_{11} & c'_{12} & c'_{13}\\ c'_{21} & c'_{22} & c'_{23}\\ c'_{31} & c'_{32} & c'_{33}\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23}\\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33}\end{matrix}\right\|
$$

risulti pure simmetrica, una soluzione di (3) si otterrà ponendo le X, Y, Z, uguali rispettivamente alle tre forme quadratiche in x, y, z, aventi come matrici dei coefficienti la (4), quella delle α_{hk} e quella delle β_{hk}. Ma le forme Y, Z non riusciranno funzioni armoniche, se non sarà $\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}=0$, $\beta_{11}+\beta_{22}+\beta_{33}=0$; queste due equazioni dovranno, dunque, conseguire dalle tre equazioni lineari omogenee, che esprimono la simmetria della matrice

(4), intercedenti fra le dodici quantità α_{hk}, β_{hk}. Ciò equivale a dire che dovranno esistere tre costanti λ, μ, ν, per le quali sia

$$
(5)\quad \begin{array}{ll}
\lambda(b'_{11}-b'_{22})-\mu b'_{32}-\nu b'_{31}=0, & \lambda(c'_{11}-c'_{22})-\mu c'_{32}-\nu c'_{31}=0,\\
\lambda b'_{23}+\mu(b'_{33}-b'_{11})-\nu b'_{21}=0, & \lambda c'_{23}+\mu(c'_{33}-c'_{11})-\nu c'_{21}=0,\\
\lambda b'_{13}+\mu b'_{12}+\nu(b'_{22}-b'_{33})=0, & \lambda c'_{13}+\mu c'_{12}+\nu(c'_{22}-c'_{33})=0,
\end{array}
$$

e inoltre

$$
(6)\quad \begin{array}{l}
\lambda b'_{21}+\mu b'_{31}=-\lambda b'_{12}+\nu b'_{32}=-\mu b'_{13}-\nu b'_{23}\neq 0\,,\\
\lambda c'_{21}+\mu c'_{31}=-\lambda c'_{12}+\nu c'_{32}=-\mu c'_{13}-\nu c'_{23}=0,
\end{array}
$$

mentre poi analogamente dovranno esistere tre costanti λ', μ', ν' verificanti pure le (5) e inoltre le (6), ove si scambi avanti all'ultimo membro il segno $\neq$ col segno $=$.

Ne segue che le λ, μ, ν non potranno essere proporzionali alle λ', μ', ν', e quindi la matrice dei coefficienti di λ, μ, ν in (5) dovrà avere al massimo caratteristica 1.

Ora, se risultasse $b'_{31}=b'_{32}=0$, si potrebbe rendere soddisfatto il sistema (3'), ponendo $Z=0$ e X, Y indipendenti da z e soluzioni di (1'), onde, per quanto si è visto nel n. precedente, dovrebbe essere $b'_{11}=b'_{22}$, $b'_{12}=-b'_{21}$; dall'annullarsi del minore di secondo ordine $\begin{vmatrix} b'_{33}-b'_{11} & -b'_{21} \\ b'_{12} & b'_{22}-b'_{33}\end{vmatrix}$ discenderebbe allora $b'_{33}=$ $=b'_{22}=b'_{11}$, $b'_{12}=b'_{21}=0$, ciò che, essendo già $b'_{31}=0$, renderebbe impossibile la prima delle (6). Allo stesso modo si riconosce che non possono essere entrambi nulli b'_{21} e b'_{23}, o b'_{12} e b'_{13}, o b'_{13} e b'_{23}, o b'_{12} e b'_{32}, o b'_{21} e b'_{31}. Riuscendo, dunque, b'_{31} e b'_{32} non entrambi nulli, vi saranno due fattori di proporzionalità ρ e σ, per cui risulterà

$$
(7)\quad \begin{array}{lll}
b'_{23}=\rho(b'_{11}-b'_{22}), & b'_{33}-b'_{11}=-\rho b'_{32}, & b'_{21}=\rho b'_{31}\,,\\
b'_{13}=\sigma(b'_{11}-b'_{22}), & b'_{12}=-\sigma b'_{32}, & b'_{22}-b'_{33}=-\sigma b'_{31}\,.
\end{array}
$$

D'altra parte, poichè la prima delle (6), ove si pongano le tre costanti non tutte nulle λ', μ', ν' in luogo di λ, μ, ν, sussiste col segno $=$, sarà

$$\begin{vmatrix} b'_{21} & b'_{31} & 0 \\ -b'_{12} & 0 & b'_{32} \\ 0 & -b'_{13} & -b'_{23} \end{vmatrix} = b'_{21} b'_{13} b'_{32} - b'_{12} b'_{23} b'_{31} = 0 .$$

Da questa uguaglianza, ove si sostituiscano a $b'_{21}, b'_{13}, b'_{12}, b'_{23}$ le espressioni date per essi dalle (7), discende necessariamente o $\rho = 0$, o $\sigma = 0$, o $b'_{31} = 0$, o $b'_{32} = 0$, o $b'_{11} = b'_{22}$; ma in ognuna di tali alternative, si vede dalle (7) medesime che si presenterebbe uno dei casi, che, col ragionamento svolto più sopra, abbiamo riconosciuto doversi escludere.

Concludiamo, pertanto, che non esistono sistemi di tre equazioni con tre incognite del tipo voluto.

3. – Un sistema di quattro equazioni con quattro incognite.

Dette $X(x,y,z,t)$, $Y(x,y,z,t)$, $Z(x,y,z,t)$, $T(x,y,z,t)$ le quattro funzioni incognite, consideriamo ora il sistema

$$(8) \qquad \begin{aligned} X_x - Y_y + Z_z - T_t &= 0 , \\ X_y + Y_x - Z_t - T_z &= 0 , \\ X_z - Y_t - Z_x + T_y &= 0 , \\ X_t + Y_z + Z_y + T_x &= 0 . \end{aligned}$$

Sia A un *campo*, cioè un insieme aperto e connesso, nello spazio a quattro dimensioni x, y, z, t. Se le X, Y, Z, T costituiscono una soluzione di (8) in A, e sono ivi dotate di derivate parziali dei primi due ordini continue, dovrà essere

$$\Delta X = \Delta Y = \Delta Z = \Delta T = 0 ;$$

basta osservare, infatti, che, indicati con L, M, N, P i primi membri delle (8), è

$$\begin{aligned} L_x + M_y + N_z + P_t &= \Delta X , \\ -L_y + M_x - N_t + P_z &= \Delta Y , \\ L_z - M_t - N_x + P_y &= \Delta Z , \\ -L_t - M_z + N_y + P_x &= \Delta T . \end{aligned}$$

Sia D un dominio regolare, cioè un dominio, la cui frontiera FD sia tale da consentire l'applicazione delle formole di Green, contenuto in A. Le (8) portano di conseguenza le quattro condizioni integrali

$$
(9) \quad
\begin{aligned}
&\int_{FD} (X\,dy\,dz\,dt - Y\,dz\,dt\,dx + Z\,dt\,dx\,dy - T\,dx\,dy\,dz) = 0 \,, \\
&\int_{FD} (Y\,dy\,dz\,dt + X\,dz\,dt\,dx - T\,dt\,dx\,dy - Z\,dx\,dy\,dz) = 0 \,, \\
&\int_{FD} (Z\,dy\,dz\,dt - T\,dz\,dt\,dx - X\,dt\,dx\,dy + Y\,dx\,dy\,dz) = 0 \,, \\
&\int_{FD} (T\,dy\,dz\,dt + Z\,dz\,dt\,dx + Y\,dt\,dx\,dy + X\,dx\,dy\,dz) = 0 \,,
\end{aligned}
$$

le quali, per il sistema (8), costituiscono l'analogo del teorema di Cauchy sull'integrale di una funzione olomorfa esteso alla frontiera di un dominio regolare.

Possiamo ora dimostrare il seguente teorema, del tipo di quello di Morera per le funzioni olomorfe:

I. *Se per le* X, Y, Z, T *è soddisfatta una condizione di* Hölder *in ogni punto del campo* A *e se ad ogni punto* P_0 *di* A *si può associare un intorno circolare* $\Gamma(P_0)$*, tale che le* (9) *valgano anche soltanto per ogni dominio rettangolare* D *contenuto in* $\Gamma(P_0)$*, le* X, Y, Z, T *saranno armoniche in* A *e verificheranno il sistema* (8).

Infatti, fissiamo a piacere un punto P_0 in A, consideriamo un arbitrario dominio regolare $\overline{D}$ contenuto nell'intorno $\Gamma(P_0)$ nominato nell'enunciato e costruiamo quattro funzioni U, U', U'', U''' verificanti internamente a $\overline{D}$ le equazioni

$$
(10) \qquad \Delta U = X \,, \quad \Delta U' = Y \,, \quad \Delta U'' = Z \,, \quad \Delta U''' = T \,,
$$

come è sempre possibile, in base all'ipotesi che le X, Y, Z, T siano hölderiane in ogni punto di A: le X, Y, Z, T si potranno, invero, definire in modo noto, mediante potenziali di volume a quattro dimensioni, relativi al dominio $\overline{D}$.

Definiamo poi ancora quattro nuove funzioni V, V', V'', V''', mediante le posizioni

$$
\tag{11}
\begin{aligned}
V &= U_x - U'_y + U''_z - U'''_t ,\\
V' &= U_y + U'_x - U''_t - U'''_z ,\\
V'' &= U_z - U'_t - U''_x + U'''_y ,\\
V''' &= U_t + U'_z + U''_y + U'''_x ;
\end{aligned}
$$

le V, V', V'', V''' saranno dotate di derivate parziali prime hölderiane e risulterà, in base a (10) e (11),

$$
\tag{12}
\begin{aligned}
V_x + V'_y + V''_z + V'''_t &= X ,\\
- V_y + V'_x - V''_t + V'''_z &= Y ,\\
V_z - V'_t - V''_x + V'''_y &= Z ,\\
- V_t - V'_z + V''_y + V'''_x &= T .
\end{aligned}
$$

Sostituendo in (9) al posto di X, Y, Z, T i primi membri delle (12), risulta poi

$$
\tag{13}
\begin{aligned}
\int_{FD} [(V_x + V'_y + V''_z + V'''_t)\, dy\, dz\, dt + (V_y - V'_x +{}\\
+ V''_t - V'''_z)\, dz\, dt\, dx + (V_z - V'_t - V''_x +{}\\
+ V'''_y)\, dt\, dx\, dy + (V_t + V'_z - V''_y - V'''_x)\, dx\, dy\, dz] = 0
\end{aligned}
$$

e tre altre equazioni analoghe, che omettiamo di scrivere, per brevità.

D'altra parte, è, per ogni dominio rettangolare D contenuto in $\overline{D}$,

$$
\tag{14}
\begin{aligned}
&\int_{FD} V'_x dz\, dt\, dx = \int_{FD} V'_y\, dy\, dz\, dt , &&\int_{FD} V'_t\, dt\, dx\, dy = \int_{FD} V'_z dx\, dy\, dz ,\\
&\int_{FD} V''_y\, dx\, dy\, dz = \int_{FD} V''_t\, dz\, dt\, dx , &&\int_{FD} V''_z\, dy\, dz\, dt = \int_{FD} V''_x\, dt\, dx\, dy ,\\
&\int_{FD} V'''_t\, dy\, dz\, dt = \int_{FD} V'''_x\, dx\, dy\, dz , &&\int_{FD} V'''_z\, dz\, dt\, dx = \int_{FD} V'''_y dt\, dx\, dy ;
\end{aligned}
$$

infatti, supposto D definito da $a_1 \leq x \leq a_2$, $b_1 \leq y \leq b_2$, $c_1 \leq z \leq c_2$, $d_1 \leq t \leq d_2$, il primo e il secondo membro, per esempio nella prima delle (14), sono entrambi uguali a

$$\int_{c_1}^{c_2}\int_{d_1}^{d_2} [V'(a_2, b_2, z, t) - V'(a_2, b_1, z, t) - V'(a_1, b_2, z, t) + \\ + V'(a_1, b_1, z, t)]\, dz\, dt,$$

e analogamente per le altre cinque relazioni (14). Pertanto la (13) si riduce a

$$(15)\qquad \int_{FD} (V_x\, dy\, dz\, dt + V_y\, dz\, dt\, dx + V_z\, dt\, dx\, dy + V_t\, dx\, dy\, dz).$$

Di qui segue in modo noto la armonicità della V internamente a $\overline{D}$, perchè la (15), verificata per tutti i domini rettangolari D, sarà verificata di conseguenza anche per tutti i domini circolari D (come per tutti i domini regolari) contenuti in $\overline{D}$, sicchè da (15) risulta che la V verifica il teorema della media di Gauss. Allo stesso modo, dalle rimanenti tre equazioni analoghe alla (13), che abbiano omesso di scrivere, segue la armonicità delle V', V'', V''', e pertanto, data l'arbitrarietà del dominio $\overline{D}$ contenuto in $\Gamma(P_0)$ e quella del punto P_0 in A, dalle (12) discende senz'altro il teorema.

Passiamo ora alla dimostrazione del seguente altro teorema, che fornisce l'analogo della formola fondamentale di Cauchy per le funzioni olomorfe:

II. *Siano X, Y, Z, T quattro funzioni armoniche verificanti le* (8) *nel campo A, D un qualsiasi dominio regolare contenuto in A, $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, $\overline{t}$ un punto arbitrariamente fissato nell'interno di D; indicati con $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, $\overline{T}$ i valori delle funzioni X, Y, Z, T nel punto $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, $\overline{t}$, con $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, $t = t(u, v, w)$ una rappresentazione parametrica regolare di FD di dominio base B e con r la distanza dal punto $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, $\overline{t}$ al punto x, y, z, t variabile su FD, risulterà*

$$
\bar{X} = \frac{1}{2\pi^2}\int_B \begin{vmatrix} (r^{-2})_x X + (r^{-2})_y Y - (r^{-2})_z Z + (r^{-2})_t T & x_u & x_v & x_w \\ (r^{-2})_y X - (r^{-2})_x Y + (r^{-2})_t Z + (r^{-2})_z T & y_u & y_v & y_w \\ (r^{-2})_z X + (r^{-2})_t Y + (r^{-2})\ Z - (r^{-2})_y T & z_u & z_v & z_w \\ (r^{-2})_t X - (r^{-2})_z Y - (r^{-2})_y Z - (r^{-2})_x T & t_u & t_v & t_w \end{vmatrix} du\,dv\,dw,
$$

$$
\bar{Y} = \frac{1}{2\pi^2}\int_B \begin{vmatrix} -(r^{-2})_y X + (r^{-2})_x Y + (r^{-2})_t Z + (r^{-2})_z T & x_u & x_v & x_w \\ (r^{-2})_x X + (r^{-2})_y Y + (r^{-2})_z Z - (r^{-2})_t T & y_u & y_v & y_w \\ -(r^{-2})_t X + (r^{-2})_z Y - (r^{-2})_y Z - (r^{-2})_x T & z_u & z_v & z_w \\ (r^{-2})_z X + (r^{-2})_t Y - (r^{-2})_x Z + (r^{-2})_y T & t_u & t_v & t_w \end{vmatrix} du\,dv\,dw,
$$

(16)

$$
\bar{Z} = \frac{1}{2\pi^2}\int_B \begin{vmatrix} (r^{-2})_z X - (r^{-2})_t Y + (r^{-2})_x Z + (r^{-2})_y T & x_u & x_v & x_w \\ -(r^{-2})_t X - (r^{-2})_z Y + (r^{-2})_y Z - (r^{-2})_x T & y_u & y_v & y_w \\ -(r^{-2})_x X + (r^{-2})_y Y + (r^{-2})_z Z + (r^{-2})_t T & z_u & z_v & z_w \\ (r^{-2})_y X + (r^{-2})_x Y + (r^{-2})_t Z - (r^{-2})_z T & t_u & t_v & t_w \end{vmatrix} du\,dv\,dw,
$$

$$
\bar{T} = \frac{1}{2\pi^2}\int_B \begin{vmatrix} -(r^{-2})_t X - (r^{-2})_z Y - (r^{-2})_y Z + (r^{-2})_x T & x_u & x_v & x_w \\ -(r^{-2})_z X + (r^{-2})_t Y + (r^{-2})_z Z + (r^{-2})_y T & y_u & y_v & y_w \\ (r^{-2})_y X + (r^{-2})_x Y - (r^{-2})_x Z + (r^{-2})_z T & z_u & z_v & z_w \\ (r^{-2})_x X - (r^{-2})_y Y + (r^{-2})_z Z + (r^{-2})_t T & t_u & t_v & t_w \end{vmatrix} du\,dv\,dw.
$$

Si ottiene, per esempio, la prima delle (16), applicando alla funzione armonica X la nota formola

$$
(17) \qquad \bar{X} = \frac{1}{2\pi^2}\int_{FD}\left(X\frac{dr^{-2}}{dn} - r^{-2}\frac{dX}{dn}\right)d\sigma,
$$

dove n indica la normale interna a FD e $d\sigma$ l'elemento di ipersuperficie su FD; se si esprimono le derivate normali mediante le derivate parziali rispetto a x, y, z, t e si tiene conto delle (8), la (17) si può scrivere

$$X = \frac{1}{2\pi^2}\int_B \begin{vmatrix} (r^{-2})_x X - r^{-2}(Y_y - Z_z + T_t) & x_u & x_v & x_w \\ (r^{-2})_y X - r^{-2}(-Y_x + Z_t + T_z) & y_u & y_v & y_w \\ (r^{-2})_z X - r^{-2}(Y_t + Z_x - T_y) & z_u & z_v & z_w \\ (r^{-2})_t X - r^{-2}(-Y_z - Z_y - T_x) & t_u & t_v & t_w \end{vmatrix} du\,dv\,dw$$

e, con delle integrazioni per parti immediatamente identificabili, questa uguaglianza si trasforma nella prima delle (16). In maniera del tutto simile, si ricavano le tre rimanenti.

Per il sistema (8) sussiste pure il seguente teorema, analogo di quello di LOOMAN–MENCHOFF [1] per il sistema delle equazioni di monogenia:

III) *Basta supporre* 1°) *che per le* X, Y, Z, T *sia soddisfatta una condizione di* HÖLDER *in ogni punto del campo* A, 2°) *che esse siano inoltre parzialmente derivabili rispetto a* x, y, z, t *in tutti i punti di* A, *tranne al più in quelli di un insieme numerabile* N *contenuto in* A [2], 3°) *che, quasi dap-*

[1] Una esauriente dimostrazione di questo teorema è apparsa, per la prima volta, in S. SAKS, *Théorie de l'integrale*, Warszawa (1933), p. 245; essa è stata riprodotta senza mutamenti nella più recente edizione di questa opera *Theory of the integral*, Warszawa (1937). Ulteriori estensioni del teorema stesso si trovano in MENCHOFF, *Sur la généralisation des conditions de* CAUCHY–RIEMANN, Fund. Math., vol. 25 (1935), pp. 59-97, *Sur la monogénéité asymptotique*, Rec. Math. Moscou, vol. I (1936), p. 189-210.

[2] Osserviamo che il verificarsi per una funzione di una condizione di HÖLDER, con esponente minore di 1, non porta necessariamente come conseguenza l'assoluta continuità della funzione stessa, e quindi l'esistenza quasi dappertutto delle derivate sommabili, come avviene invece, se l'esponente è uguale a 1 (condizione di LIPSCHITZ). A questo proposito, devo notare che, nei sottocitati enunciati della mia memoria *Sul problema generalizzato di* DIRICHLET *per l'equazione di* POISSON, pubblicata in questi Rendiconti, vol. XI (1940), pp. 28-89, sono da apportare le seguenti aggiunte. Nel teorema V a pag. 52, l'affermazione in 2°) va così completata: *se la* f *è di* q*-esima potenza sommabile con* $q > n$, *la* n *sarà dotata di derivate parziali prime verificanti una condizione di* HÖLDER *di esponente* $1 - \frac{n}{q}$, *e se la* f, *a prescindere dai punti di un insieme di misura nulla, è limitata, le derivate parziali di* u *verificheranno una condizione di* LIPSCHITZ, *uniformemente in ogni dominio* D *contenuto in* A, *e l'equazione* $\Delta u = f$ *varrà quasi dappertutto in* A. La conclusione del teorema VI a pag. 58 va così

pertutto in A, valgano le (8) *affinchè si possa concludere che le X, Y, Z, T sono armoniche e verificano le* (8) *in tutto A.*

Seguendo l'esempio di S. Saks ([3]) fonderemo la dimostrazione sul seguente lemma:

Sia $w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una funzione continua nel dominio quadrato Q dello spazio a n dimensioni, parzialmente derivabile rispetto a ciascuna delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in tutti i punti di Q, tranne al più in quelli di un insieme numerabile; sia G un insieme chiuso contenuto in Q e supponiamo che i rapporti incrementali parziali della w, ove il punto da incrementare sia contenuto in G e i punti incrementati siano contenuti in Q, si mantengano sempre in valore assoluto tutti non superiori alla costante ν; detti allora $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ gli estremi di quel dominio rettangolare R, che, fra tutti quelli contenenti G, ha le minime dimensioni, indicati con R_{x_i} il dominio rettangolare a $n-1$ dimensioni, che si ottiene facendo variare da a_k a b_k ordinatamente tutte le x_k per cui è $k \neq i$, e con $d\omega_i$ il relativo elemento di volume $(n-1)$-dimensionale, sarà

$$(18)\qquad \left| \int_G \frac{\partial w}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_n - \int_{R_{x_i}} [w]_{x_i = a_i}^{x_i = b_i} d\omega_i \right| \leq (2^n + 1)\nu \, mis(Q - G).$$

Detto D un dominio rettangolare variabile in A, di estremi a_1, b_1, c_1, d_1 e a_2, b_2, c_2, d_2, e rappresentati con D_x, D_y, D_z, D_t

modificata: *e, se la f, a prescindere dai punti di un insieme di misura nulla, è limitata, sarà verificata quasi dappertutto in A l'equazione $\Delta u = f$.* La conclusione del teorema XII a pag. 78 diventerà quindi: *se, in particolare, è $q > n$, o se la f, a prescindere dai punti di un insieme di misura nulla, è limitata, la u sarà dotata di derivate parziali prime uniformemente hölderiane, o corrispondentemente lipschitziane, in ogni dominio D contenuto in A e, in quest'ultimo caso, verificherà quasi dappertutto in A l'equazione $\Delta u = f$.* Analoghe rettifiche vanno arrecate ai corrispondenti enunciati nella mia nota *Equazione di* Poisson *e problema generalizzato di* Dirichlet, Rend. Acc. d'It., s. VII, vol. I (1940), pp. 322-329.

([3]) In S. Saks, loc. cit. in ([1]), p. 243, la dimostrazione è data per $n = 2$; l'estensione al caso di n qualsiasi è, però, immediata.

i quattro domini rettangolari tridimensionali corrispondenti, definiti con convenzione conforme a quella indicata nell'enunciato del lemma, consideriamo le quattro funzioni di D definite da

$$
\begin{aligned}
F_1(D) &= \int_{D_x} [X]_{x=a_1}^{x=a_2} dy\,dz\,dt - \int_{D_y} [Y]_{y=b_1}^{y=b_2} dz\,dt\,dx + \\
&+ \int_{D_z} [Z]_{z=c_1}^{z=c_2} dt\,dx\,dy - \int_{D_t} [T]_{t=d_1}^{t=d_2} dx\,dy\,dz\,, \\
F_2(D) &= \int_{D_x} [Y]_{x=a_1}^{x=a_2} dy\,dz\,dt + \int_{D_y} [X]_{y=b_1}^{y=b_2} dz\,dt\,dx - \\
&- \int_{D_z} [T]_{z=c_1}^{z=c_2} dt\,dx\,dy - \int_{D_t} [Z]_{t=d_1}^{t=d_2} dx\,dy\,dz\,, \\
F_3(D) &= \int_{D_x} [Z]_{x=a_1}^{x=a_2} dy\,dz\,dt - \int_{D_y} [T]_{y=b_1}^{y=b_2} dz\,dt\,dx - \\
&- \int_{D_z} [X]_{z=c_1}^{z=c_2} dt\,dx\,dy + \int_{D_t} [Y]_{t=d_1}^{t=d_2} dx\,dy\,dz\,, \\
F_4(D) &= \int_{D_x} [T]_{x=a_1}^{x=a_2} dy\,dz\,dt + \int_{D_y} [Z]_{y=b_1}^{y=b_2} dz\,dt\,dx + \\
&+ \int_{D_z} [Y]_{z=c_1}^{z=c_2} dt\,dx\,dy + \int_{D_t} [X]_{t=d_1}^{t=d_2} dx\,dy\,dz\,;
\end{aligned}
\tag{19}
$$

esse sono i valori dei primi membri delle (9), in corrispondenza al dominio rettangolare D e riescono evidentemente funzioni additive e continue di D.

Sia E_m, per ogni intero positivo m, l'insieme dei punti x, y, z, t di A, tali che, qualunque sia h, con $|h| \leq \frac{1}{m}$, i punti ottenuti incrementando della quantità h una delle quattro coordinate x, y, z, t riescano ancora contenuti in A, risultando inoltre i relativi rapporti incrementali parziali di ciascuna delle quattro funzioni X, Y, Z, T tutti in valore assoluto non superiori ad $\frac{1}{m}$. Per la continuità delle X, Y, Z, T, l'insieme E_m sarà chiuso su A; inoltre, sarà evidentemente $E_1 < E_2 < E_3 < \ldots$, $\sum_m E_m = A - N$, giacchè ogni punto di A, nel quale le X, Y, Z, T, siano parzialmente derivabili, deve appartenere ad uno degli E_m.

Sia poi G l'insieme dei punti di A, se ve ne sono, tali che in ogni intorno circolare Γ di uno di essi, sia contenuto almeno un dominio rettangolare D, per cui le F_1, F_2, F_3, F_4 non risultano tutte nulle. Evidentemente ogni punto di A, che sia punto di accumulazione di punti di G, è contenuto in G; pertanto l'insieme $A - G$ è aperto e in esso, per il teorema I, le X, Y, Z, T sono armoniche e soluzioni di (8). Ne segue, in primo luogo, che N deve essere contenuto in G e, in secondo luogo, che G non può contenere punti isolati, giacchè, per la continuità delle X, Y, Z, T, in un tal punto queste funzioni non cesserebbero di essere armoniche e di verificare le (8), onde, anche in un intorno del punto stesso, le F_1, F_2, F_3, F_4 sarebbero tutte nulle, per ogni dominio rettangolare D contenutovi.

Da quanto si è detto, risulta che sarà $G = \sum_m G \cdot E_m + N$, cioè l'insieme chiuso G si presenta come somma degli insiemi chiusi (s'intende sempre su A) costituiti dai prodotti $G \cdot E_m$ e dai singoli punti di N. Per qualche punto P_0 di G, vi deve essere un intorno circolare $\Gamma(P_0)$ contenuto in A, tale che tutti i punti di $\Gamma \cdot G$ siano contenuti in uno almeno degli insiemi chiusi, nella cui somma abbiamo scomposto G, e questo dovrà essere precisamente uno dei prodotti $G \cdot E_m$, perchè, se fosse un punto di N, ciò vorrebbe dire che G avrebbe solo quel punto in comune con Γ, il che è impossibile, dato che, come si è osservato, G è privo di punti isolati. Siano, dunque, ν un intero positivo e $\Gamma(P_0)$ un intorno circolare contenuto in A del punto P_0 di G, tali che riesca $\Gamma \cdot G < E_\nu$. Detto Q un dominio quadrato contenente almeno un punto di G e contenuto in $\Gamma(P_0)$, di dimensioni non superiori a $\frac{1}{\nu}$ indichiamo con R, fra tutti i domini rettangolari contenenti il prodotto $Q \cdot G$, quello che ha le minime dimensioni. In base al lemma premesso e alle equazioni (8), i valori assoluti delle $F_1(R)$, $F_2(R)$, $F_3(R)$, $F_4(R)$ saranno tutti non superiori a $17\nu\, mis\,(Q - Q \cdot G)$, e la stessa limitazione verificheranno pure le $F_1(Q)$, $F_2(Q)$, $F_3(Q)$, $F_4(Q)$, giacchè, togliendo da Q i punti interni a R, resta una somma di un numero finito di domini rettangolari, ciascuno dei quali non contiene nel suo interno nessun punto di G, e conferisce quindi alla F_1, F_2, F_3, F_4 valori tutti nulli.

Ciò posto, preso a piacere un punto P in $\Gamma \cdot G$, per ogni dominio quadrato Q contenente P e contenuto in Γ, di dimensioni non superiori a $\frac{1}{\nu}$, sarà, in base a quanto abbiamo detto,

$$\frac{1}{mis\, Q}[|F_1(Q)| + |F_2(Q)| + |F_3(Q)| + |F_4(Q)|] \leq 68\nu\, \frac{mis\,(Q - Q \cdot G)}{mis\, Q};$$

ciò prova che le massime e minime derivate simmetriche delle quattro funzioni di dominio rettangolare F_1, F_2, F_3, F_4 riescono limitate in $\Gamma \cdot G$, e di più si annullano in tutti i punti P, in cui la densità di G vale 1, cioè quasi dappertutto in $\Gamma \cdot G$. D'altra parte, le derivate medesime si annullano pure in tutti i punti di $\Gamma - \Gamma \cdot G$, perchè le F_1, F_2, F_3, F_4 sono nulle in corrispondenza di tutti i domini quadrati non contenenti punti di G. Se ne conclude che le F_1, F_2, F_3, F_4 saranno identicamente nulle in $\Gamma(P_0)$. Ma ciò è in contraddizione col fatto che P_0 sia un punto di G, sicchè risulta che G deve essere vuoto, ciò che prova l'assunto, in virtù del teorema I.

4. – Un sistema con n funzioni incognite.

Dette $X^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, per $k = 1, 2, \ldots, n$, le n funzioni incognite, consideriamo il sistema delle $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ equazioni

$$(20) \qquad \begin{aligned} & X_i^{(k)} = X_k^{(i)}, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq k), \\ & \sum_{k=1}^{n} X_k^{(k)} = 0, \end{aligned}$$

dove con l'indice apposto in basso abbiamo indicato una derivazione rispetto alla variabile corrispondente all'indice medesimo. Il sistema (20) (che, si noti, per $n = 2$, si riduce a quello delle equazioni di monogenia, $X_x = Y_y$, $X_y = -Y_x$ ove si ponga $X = X_2$, $Y = X_1$, $x = x_1$, $y = x_2$) è, per ogni valore di n, tale che delle funzioni $X^{(h)}$, dotate di derivate parziali dei primi due ordini continue nel campo A, non possono costituirne ivi una soluzione, senza essere armoniche: infatti, nella detta ipotesi, da (20) discende

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{n} X_k^{(k)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(X_k^{(i)} - X_i^{(k)}) = \sum_{k=1}^{n} X_{ki}^{(k)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} X_{kk}^{(i)} - \sum_{k=1}^{n} X_{ik}^{(k)} = \Delta X^{(i)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

cioè la armonicità di $X^{(i)}$, per $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sia D un dominio regolare contenuto in A, $x_k = x_k(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ una rappresentazione parametrica regolare di FD di dominio base B, $d\sigma$ l'elemento di ipersuperficie su FD; con $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(n)}$ indicheremo i coseni direttori della normale interna a FD. Sia poi C una curva regolare semplice chiusa, che costituisca il completo bordo di una superficie regolare contenuta in A. Le (20) portano di conseguenza le due condizioni integrali

$$(21) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{FD} (X^{(1)}\xi^{(1)} + \ldots + X^{(n)}\xi^{(n)})\, d\sigma = 0, \\[2ex] \displaystyle\int_{C} (X^{(1)} dx_1 + \ldots + X^{(n)} dx_n) = 0. \end{cases}$$

Possiamo dimostrare, per il sistema (20), i tre teoremi analoghi di quelli del n. precedente relativi al sistema (8).

Diremo brevemente *poligonale rettangolare relativa alle* x_i, x_j, per ogni coppia di indici i, j, con $i \neq j$, una poligonale semplice chiusa di quattro lati, due dei quali paralleli all'asse x_i e gli altri due paralleli all'asse x_j.

IV. *Supposte le* $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$ *continue nel campo* A *e supposto che ad ogni punto* P_0 *di* A *si possa associare un intorno circolare* $\Gamma(P_0)$, *tale che le* (21) *siano verificate anche soltanto per tutte le poligonali rettangolari* C *e per tutti i domini rettangolari* D *contenuti in* $\Gamma(P_0)$, *le* $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$ *saranno armoniche in* A *e verificheranno il sistema* (20).

Infatti, fissato ad arbitrio il punto P_0 in A, detto $\Gamma(P_0)$ l'intorno di cui è parola nell'enunciato, consideriamo per ogni punto P di A contenuto in $\Gamma(P_0)$, una qualsiasi poligonale C, pure contenuta in $\Gamma(P_0)$ e coi lati paralleli agli assi coordinati, congiungente P_0 con P e poniamo

$$U = (C)\int_{P_0}^{P} (X^{(1)} dx_1 + \ldots + X^{(n)} dx_n), \tag{22}$$

onde riuscirà

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = X^{(k)}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{23}$$

e quindi, sostituendo nella seconda delle (21),

$$\int_{FD} (U_{x_1} \xi^{(1)} + \ldots + U_{x_n} \xi^{(n)})\, d\sigma = 0 .$$

Di qui segue, allo stesso modo come nella dimostrazione del teorema I, la armonicità della U, e quindi anche quella delle $X^{(k)}$, in $\Gamma(P_0)$, e ciò, per l'arbitrarietà di P_0, prova che le $X^{(k)}$ sono armoniche in A, mentre poi dalle (23) risulta manifestamente che esse costituiscono una soluzione del sistema (20).

V. *Siano* $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$ n *funzioni armoniche verificanti le* (20) *nel campo* A, D *un qualsiasi dominio regolare contenuto in* A *e* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ *un punto arbitrariamente fissato nell'interno di* D; *indicati con* $\overline{X}^{(1)}, \overline{X}^{(2)}, \ldots, \overline{X}^{(n)}$ *i valori delle funzioni* $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$ *nel punto* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ *e con* r *la distanza dal punto* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ *al punto* $x_1, x_2, \ldots, x_n$

variabile su FD, risulterà

$$\overline{X}^{(k)} = \frac{1}{\omega_n}\int_{FD}\Big[\sum_{i=1}^{n}\{(r^{2-n})_{x_i}X^{(k)} +$$

(24)

$$+(r^{2-n})_{x_k}X^{(i)}\}\xi^{(i)} - \sum_{i=1}^{n}(r^{2-n})_{x_i}X^{(i)}\xi^{(k)}\Big]d\sigma \qquad (k=1,2,\ldots,n),$$

dove ω_n rappresenta la misura ipersuperficiale dell'ipersfera di raggio 1 nello spazio a n dimensioni.

Infatti, per la funzione armonica $X^{(k)}$ sussiste la nota formola

$$\overline{X}^{(k)} = \frac{1}{\omega_n}\int_{FD}\sum_{i=1}^{n}\{(r^{2-n})_{x_i}X^{(k)} - r^{2-n}X_i^{(k)}\}\xi^{(i)}d\sigma\,; \tag{25}$$

sostituendo alle derivate parziali $X_i^{(k)}$ i valori che per esse si ricavano dalle (20), si ottiene

$$\overline{X}^{(k)} = \frac{1}{\omega_n}\int_{FD}\Big[\sum_{i=1}^{n}\{(r^{2-n})_{x_i}X^{(k)} - r^{2-n}X_k\}\xi^{(i)} + r^{2-n}\sum_{k=1}^{n}X_i^{(i)}\xi^{(k)}\Big]d\sigma,$$

e di qui, mediante, integrazioni per parti, si perviene alle (24).

VI. *Basta supporre* 1°) *che le* $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$ *siano continue in A,* 2°) *che esse siano inoltre parzialmente derivabili rispetto alle* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *in tutti i punti di A, tranne al più in quelli di un insieme numerabile N contenuto in A,* 3°) *che quasi dappertutto in A valgano le* (20), *affinchè si possa concludere che le* $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$ *sono armoniche e verificano le* (20) *in tutto A.*

Detto D un dominio rettangolare n-dimensionale variabile in A, di estremi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$, e indicato, per ogni coppia di indici i, j, con $D_{ij}(c)$ il dominio rettangolare bidimensionale definito da $a_i \leq x_i \leq b_i$, $a_j \leq x_j \leq b_j$, $x_k = c_k$, per ogni k diverso sia da i che da j, consideriamo la funzione di D definita da

$$F(D) = \sum_{k=1}^{n} \int_{D_{x_k}} [X^{(k)}]_{x_k = a_k}^{x_k = b_k}$$

(dove D_{x_k} rappresenta il dominio rettangolare $(n-1)$ — dimensionale definito come nel lemma del n. precedente) e la funzione di $D_{ij}(c)$ definita da

$$F_{ij}(D_{ij}) = \left| \int_{a_i}^{b_i} [X^{(i)}]_{x_j = a_j}^{x_j = b_j} dx_i - \int_{a_j}^{b_j} [X^{(j)}]_{x_i = a_i}^{x_i = b_i} dx_j \right|_{x_k = c_k}, \text{ per } k \neq i, k \neq j.$$

Ciò posto, indichiamo con G l'insieme dei punti di A, se ve ne sono, tali che, in ogni intorno circolare Γ di uno di essi, sia contenuto almeno un dominio rettangolare n-dimensionale D, per cui la $F(D)$ non risulta nulla, oppure, per una coppia di indici i, j, un dominio rettangolare bidimensionale $D_{ij}(c)$, per cui non risulta nulla la F_{ij}.

Definiti poi gli insiemi E_n come nella dimostrazione del teorema III, si potranno ripetere tutte le considerazioni svolte in quella dimostrazione, arrivando ancora, per qualche punto P_0 di G, alla determinazione di un intero positivo ν e di un intorno circolare $\Gamma(P_0)$ contenuto in A, tali che riesca $\Gamma \cdot G < E_\nu$, nonchè alla definizione del dominio rettangolare R; e, in base al lemma premesso, si riconosce che la F sarà identicamente nulla in $\Gamma(P_0)$. Applicando poi, per ogni coppia di indici i, j, il lemma medesimo anche nei domini quadrati bidimensionali $Q_{ij}(c)$, che si ottengono, fissando i valori delle $n-2$ coordinate diverse dalla x_i e dalla x_j di un punto variabile in Q, si riconosce che pure la F_{ij} è identicamente nulla in ogni $Q_{ij}(c)$. Pertanto si conclude che G deve essere vuoto.

5. – Sui sistemi di m equazioni con n incognite.

Come nel n. precedente, indichiamo con $X^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, per $k = 1, 2, \ldots, n$, le n funzioni incognite delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e rappresentiamo le derivazioni rispetto alla x_i, mediante l'apposizione dell'indice i in basso. Dato il sistema di m equazioni

$$(26)\qquad \sum_{k,i=1}^{n} a_{ki}^{(l)} X_i^{(k)} = 0\,, \qquad (l = 1, 2, \ldots, m),$$

ci domandiamo quali condizioni devono essere soddisfatte dai coefficienti $a_{ki}^{(l)}$, affinchè n funzioni, che costituiscano una soluzione di (26) e siano dotate di derivate parziali dei primi due ordini continue in un campo A, risultino necessariamente armoniche in A. È chiaro che ciò avverrà, quando, e solo quando, si potranno determinare mn^2 costanti $\alpha_{hj}^{(l)}$, con $h, j = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots, m$, tali che sia

$$(27)\qquad \begin{aligned} &\sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{hj}^{(l)} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k,i=1}^{n} a_{ki}^{(l)} X_i^{(k)} = \\ &= \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{hj}^{(l)} \sum_{k,i=1}^{n} a_{ki}^{(l)} X_{ij}^{(k)} = \Delta X_h\,, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}$$

cioè

$$(28)\qquad \sum_{l=1}^{m} (\alpha_{hj}^{(l)} a_{ki}^{(l)} + \alpha_{hi}^{(l)} a_{kj}^{(l)}) = \begin{cases} 0, & \text{se } h \neq k, \text{ oppure } i \neq j, \\ 1, & \text{se } h = k,\ i = j. \end{cases}$$

Queste equazioni, per $h = k$, sono quelle che esprimono il verificarsi dell'uguaglianza

$$(29)\qquad \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}^{(l)} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} a_{ki}^{(l)} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

identicamente rispetto alle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Ne deduciamo che:

VII. *Affinchè il sistema* (26) *sia del tipo indicato, è necessario che le due matrici*

$$(30)\qquad \left\| \begin{matrix} a_{k1}^{(1)} & \ldots & a_{kn}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1}^{(m)} & \ldots & a_{kn}^{(m)} \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} \alpha_{1j}^{(1)} & \ldots & \alpha_{nj}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1j}^{(m)} & \ldots & \alpha_{nj}^{(m)} \end{matrix} \right\|,$$

per $k, j = 1, 2, \ldots, n$, ***abbiano caratteristica*** n, ***e quindi, in particolare, che sia*** $m \geq n$.

Infatti, se, per un valore di k, **fosse di caratteristica minore di** n **per esempio la prima delle due matrici (30), esisterebbero dei valori non tutti nulli** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, **verificanti le** m **equazioni**

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}^{(l)} \lambda_i = 0 , \qquad (l = 1, 2, \ldots, m) ,$$

e per essi il primo membro di (29) risulterebbe eguale a zero, ciò che è impossibile, per la (29) medesima. Analogamente deduciamo pure che la seconda delle matrici (30) deve avere caratteristica n, **ragionando allo stesso modo, a partire dalle (28), per** $j = i$.

Il seguente teorema, nell'enunciato del quale i simboli hanno lo stesso significato ad essi dianzi attribuito, estende i precedenti II e V al sistema (26), supposto del tipo indicato.

VIII. ***Se le*** $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$ ***sono*** n ***funzioni armoniche verificanti le (26) nel campo*** A, ***risulterà per ogni dominio regolare*** D ***contenuto in*** A ***ed ogni punto*** $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ ***interno a*** D,

$$\overline{X}^{(h)} = \frac{1}{\omega_n} \int_{FD} \sum_{j=1}^{n} \Big((r^{2-n})_{x_j} X^{(h)} + \tag{31}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} (r^{2-n})_{x_i} \sum_{k=1}^{n} b_{hj,ki} X^{(k)} \Big) \xi^{(j)} d\sigma ,$$

ove si indichino con $b_{hj,ki}$ *delle opportune costanti, con* $b_{hj,kj} = 0$, *per* $h, k, j = 1, 2, \ldots, n$.

Siano, infatti, $A_{hj}^{(1)}, A_{hj}^{(2)}, \ldots, A_{hj}^{(n)}$ i complementi algebrici degli elementi della h-esima colonna in un minore diverso da zero di ordine n estratto dalla seconda delle due matrici (30), minore che potremo supporre sia, per esempio, quello contenuto nelle prime n righe della detta matrice e che indicheremo con

A_j. Moltiplichiamo allora le prime n delle equazioni (26) ordinatamente per $A_{hj}^{(1)}$, $A_{hj}^{(2)}, \ldots, A_{hj}^{(n)}$, indi sommiamo; otterremo

$$0 = \sum_{l=1}^{n} A_{hj}^{(l)} \sum_{k,i=1}^{n} a_{ki}^{(l)} X_i^{(k)} = \sum_{k,i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ki}^{(l)} A_{hj}^{(l)} X_i^{(k)}, \tag{32}$$

dove quindi il coefficiente di $X_j^{(h)}$ sarà A_j, mentre il coefficiente di $X_j^{(k)}$, per ogni valore di $k \neq h$, sarà zero.

Per $j = 1, 2, \ldots, n$, le (32) si potranno allora scrivere nella forma seguente

$$X_j^{(h)} = \sum_{k,i=1}^{n} b_{hj,ki} X_i^{(k)}, \qquad (b_{hj,hj} = 0). \tag{32'}$$

Se applichiamo ora la (25), ponendovi h, j rispettivamente in luogo di k, i e sostituendo poi a $X_j^{(h)}$ il secondo membro di (32′), otteniamo

$$X^{(h)} = \frac{1}{\omega_n} \int_{FD} \sum_{j=1}^{n} \left((r^{2-n})_{x_j} X^{(h)} - r^{2-n} \sum_{k,i=1}^{n} b_{hj,ki} X_i^{(k)} \right) \xi^{(j)} d\sigma,$$

e di qui, tenendo conto del fatto che $b_{hj,ki}$ si riduce a zero per $j = i$, sicchè sotto al segno di integrale, per ogni valore dell'indice j, figurano soltanto le derivate parziali di $X^{(k)}$ rispetto alle variabili x_i con $i \neq j$, mediante integrazioni per parti si ricava la (31).

6. Osservazioni complementari.

Si noti che, posto

$$U^{(kj)} = \frac{1}{\omega_n} \int_{FD} X^{(k)} r^{2-n} \xi^{(j)} d\sigma, \tag{33}$$

la (31) si può scrivere anche

$$\overline{X}^{(h)} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} U^{(hj)} + \sum_{k,i=1}^{n} b_{hj,ki} \frac{\partial}{\partial x_i} U^{(kj)} \right) \tag{34}$$

onde si vede che le $X^{(h)}$ riescono, in D, combinazioni lineari omogenee delle derivate parziali prime delle n^2 funzioni armoniche $U^{(kj)}$.

Risultati conformi a questo si desumono da quanto è detto nei nn. 1, 3, 4, per le soluzioni dei particolari sistemi ivi trattati. Precisamente, nel n. 1 si è trovato che le X, Y si possono esprimere mediante una funzione armonica U, ponendo $X - b'_{11}y = U_y, b'_{12} Y = U_x$; nel n. 3, si è trovato che le X, Y, Z, T si possono esprimere mediante quattro funzioni armoniche V, V', V'', V''', secondo le (12); nel n. 4, si è trovato che le $X^{(1)}$, $X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$ si possono esprimere mediante una funzione armonica U, secondo le (23) (¹). Inversamente, è immediato che si avranno delle soluzioni dei detti sistemi, scegliendo ad arbitrio le funzioni armoniche U, oppure V, V', V'', V''', e definendo corrispondentemente, secondo le formole ricordate, le funzioni X, Y, o le X, Y, Z, T, o le $X^{(1)}$, $X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$.

Invece, in generale, le n^2 funzioni armoniche $U^{(kj)}$, a mezzo delle quali, in base al teorema VIII, si possono esprimere le $X^{(h)}$, non saranno indipendenti fra loro, cioè, scegliendo arbitrariamente le dette funzioni armoniche, non si otterranno, in generale, in base alla (34), delle soluzioni di (26).

A meglio chiarire queste considerazioni, applichiamo il procedimento che ha fornita la dimostrazione del teorema VIII al seguente sistema di quattro equazioni con tre incognite

$$(35)\qquad \begin{gathered} X_y = Y_x, \quad X_z = Z_x, \quad Y_z = Z_y, \\ X_x + Y_y + Z_z = 0, \end{gathered}$$

il quale, si noti, è quello, cui si riduce il sistema (8), ove si muti Y in $-Y$ e si cerchi una soluzione con X, Y, Z indipendenti da t e con $T = 0$, ed è anche quello, cui si riduce il sistema (20) per $n = 3$, ove si ponga $X^{(1)} = X$, $X^{(2)} = Y$, $X^{(3)} = Z$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

(¹) Naturalmente, per la U, o le V, V', V'', V''', se esse si vogliono definire in tutto A, e se questo insieme non è semplicemente connesso, potranno presentarsi delle polidromie.

In questo caso particolare, la (31) dà, in conformità di (12).

$$
\begin{aligned}
X &= V_x + V'_y + V''_z\,, \\
Y &= V_y - V'_x - V'''_z\,, \\
Z &= V_z - V''_x + V'''_y\,,
\end{aligned}
\tag{36}
$$

ove si ponga, indicando con ξ, η, ζ i coseni direttori della normale interna a FD,

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{4\pi}\int_{FD} \frac{1}{r}(X\xi + Y\eta + Z\zeta)\,d\sigma\,, \\
V' &= \frac{1}{4\pi}\int_{FD} \frac{1}{r}(X\eta - Y\xi)\,d\sigma\,, \\
V'' &= \frac{1}{4\pi}\int_{FD} \frac{1}{r}(X\zeta - Z\xi)\,d\sigma, \\
V''' &= \frac{1}{4\pi}\int_{FD} \frac{1}{r}(Z\eta - Y\zeta)\,d\sigma\,,
\end{aligned}
\tag{37}
$$

sicchè, in base alle prime tre equazioni del sistema (35), le tre funzioni armoniche V', V'', V''' risulteranno legate fra loro dalla relazione

$$
-V'_z + V''_y + V'''_x = 0\,. \tag{38}
$$

Inversamente, comunque si prendano tre funzioni armoniche V', V'', V''', legate da questa relazione, le X, Y, Z definite da (36) forniscono evidentemente una soluzione del sistema (35).

Abbiamo, così, espresse le soluzioni di (35) mediante tre funzioni armoniche legate da una relazione; ma, d'altra parte, da quanto si è dimostrato nel n. 4 risulta che le soluzioni stesse possono pure esprimersi mediante una sola funzione armonica arbitraria U, ponendo $X = U_x$, $Y = U_y$, $Z = U_z$.

Si presenta, dunque, in generale, la questione di esprimere le soluzioni del sistema (26) come combinazioni lineari omogenee delle derivate parziali prime del minimo numero possibile di funzioni armoniche: per questo numero il teorema VIII fornisce il limite superiore n^2. Ed è anche presumibile che, inversamente, una volta determinate tali combinazioni lineari, comunque poi si prendano le funzioni armoniche che figurano in esse, si otterranno sempre soluzioni del dato sistema.