

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

EMMA MARCHENTE

Teoremi di confronto per problemi al contorno relativi a sistemi di due equazioni differenziali del primo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 12 (1941), p. 81-88

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1941__12__81_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

TEOREMI DI CONFRONTO PER PROBLEMI AL CON- TORNIO RELATIVI A SISTEMI DI DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

Nota di EMMA MARCHENTE (a Bassano del Grappa).

In questo volume TREVISAN ⁽¹⁾ e SCORZA DRAGONI ⁽²⁾ hanno dato dei teoremi di unicità per gli integrali dei sistemi di due equazioni differenziali del primo ordine. Per chiarezza sarà utile ricordare esplicitamente i seguenti :

Se $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ sono funzioni continue nello strato

$$(1) \quad S: a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < z < +\infty$$

e inoltre :

a) $f(x, y, z)$ è crescente rispetto a x e lipschitziana in y ;

b) $g(x, y, z)$ è crescente rispetto a y ;

allora il sistema :

$$(2) \quad \begin{aligned} y' &= f(x, y, z), \\ z' &= g(x, y, z) \end{aligned}$$

ammette, nell' intervallo

$$(3) \quad I: a \leq x \leq b,$$

⁽¹⁾ G. TREVISAN, *Teoremi di unicità e confronto per problemi relativi a sistemi di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine* [questo volume, pagg. 12-21].

⁽²⁾ G. SCORZA DRAGONI, *Teoremi di unicità relativi a un problema al contorno per un sistema di due equazioni differenziali, ordinarie, del primo ordine* [questo volume, pagg. 30-50].

al più una coppia di integrali verificanti le condizioni:

$$(4) \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \text{ } ^{(3)};$$

e:

Se $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ sono funzioni continue nello strato S e

a) $f(x, y, z)$ è non decrescente (non crescente) rispetto a z e lipschitziana in y ;

b) $g(x, y, z)$ è non decrescente (non crescente) rispetto a y e lipschitziana in z ,

il sistema (2) ammette, in I , al più una coppia di integrali soddisfacenti alle (4) $^{(4)}$.

Inoltre TREVISAN ha dato anche dei teoremi di confronto per le soluzioni di due sistemi. Precisamente egli ha dimostrato che:

Se i secondi membri del sistema

$$(5) \quad y' = f_i(x, y, z), \quad z' = g_i(x, y, z) \quad (i = 1, 2)$$

sono continui nello strato S e

$$y_i(x), \quad z_i(x)$$

verificano le (5) in tutto I ; se inoltre f_1 è crescente in z , g_1 decrescente in y e lipschitziana in z , g_2 crescente in y e lipschitziana in z , mentre $f_1 \leq f_2$, $g_1 \leq g_2$, da

$$z_1(a) < z_2(a), \quad y_1(b) > y_2(b)$$

segue

$$z_1(x) < z_2(x), \quad y_1(x) > y_2(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

TREVISAN considera anche il caso che dalle

$$y_1(a) < y_2(a), \quad z_1(b) < z_2(b)$$

⁽³⁾ loc. cit. ⁽⁴⁾, n. 1.

⁽⁴⁾ loc. cit. ⁽²⁾, § 3. Veramente SCORZA DRAGONI suppone f e g misurabili rispetto ad x e continue rispetto ad (y, z) ; introduco, in questo lavoro, l'ipotesi della continuità di $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ [rispetto a (x, y, z)] solo per motivi di semplicità.

si vogliono dedurre le

$$y_1(x) < y_2(x), \quad x_1(x) < x_2(x) \quad (5).$$

In questa Nota mi propongo di dare dei teoremi di confronto in cui le ipotesi fatte si avvicinino di più come tipo a quelle del secondo dei teoremi di unicità sopra ricordati. Applicherò poi i risultati ottenuti per indicare un teorema d'esistenza, relativo alle soluzioni delle (2) soddisfacenti alle (4), quando le funzioni $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ si suppongano continue in un insieme della forma

$$\Gamma: a \leq x \leq b, \quad \sigma_1(x) \leq y \leq \sigma_2(x), \quad \tau_1(x) \leq z \leq \tau_2(x).$$

1. - Avrò spesso bisogno nel seguito di un lemma che, per comodità, riporto qui esplicitamente:

Le funzioni $\Gamma(x, y)$ e $\Delta(x, y)$ siano continue nella striscia

$$\Sigma: a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty;$$

siano lipschitziane ivi rispetto alla y e vi soddisfacciano alla

$$\Gamma(x, y) \leq \Delta(x, y).$$

Allora, se

$$\gamma(x), \quad \delta(x)$$

sono rispettivamente integrali delle

$$y' = \Gamma(x, y), \quad y' = \Delta(x, y)$$

e se in un punto x_0 di $a \leq x \leq b$ riesce

$$\gamma(x_0) \leq \delta(x_0),$$

è anche

$$\gamma(x) \leq \delta(x) \quad \text{in } x_0 \leq x \leq b;$$

se invece riesce

$$\gamma(x_0) \geq \delta(x_0),$$

(5) loc. cit. (4), nn. 4 e 5.

è anche

$$\gamma(x) \geq \delta(x) \quad \text{in } a \leq x \leq x_0 \text{ (}^6\text{)}.$$

2. - Dimostriamo ora il seguente teorema :

Le funzioni $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$ e $\phi(x, y, z)$ siano continue nello strato S definito dalle (1) e $y = p(x)$, $z = r(x)$ siano soluzioni del sistema

$$y' = f(x, y, z),$$

$$z' = g(x, y, z),$$

mentre $y = \pi(x)$, $z = \rho(x)$ lo siano del sistema

$$y' = \varphi(x, y, z),$$

$$z' = \phi(x, y, z);$$

e $p(x)$, $r(x)$, $\pi(x)$, $\rho(x)$ si suppongano definite in tutto l'intervallo

$$I: a \leq x \leq b.$$

Allora se :

I) $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$ sono lipschitziane in y ;

II) $g(x, y, z)$, $\phi(x, y, z)$ sono lipschitziane in z ;

se, per ogni x dell'intervallo I e per y, y_1, y_2, z, z_1, z_2 qualunque, è

$$(6) \quad f(x, y, z_1) \leq \varphi(x, y, z_2),$$

$$(7) \quad g(x, y_1, z) \geq \phi(x, y_2, z)$$

e se inoltre risulta

$$p(a) \leq \pi(a), \quad r(b) \leq \rho(b),$$

in I è sempre

$$p(x) \leq \pi(x), \quad r(x) \leq \rho(x).$$

(⁶) Per un teorema un po' più generale cfr. loc. cit. (*), § 2. Per altri teoremi dello stesso tipo, validi per i sistemi, si veda M. PICONI, *Teoremi di confronto per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie e loro conseguenze* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie IV, tomo XX (1941), pagg. 67-103], n. 1.

Dalla (6) segue infatti

$$f(x, y, r(x)) \leq \varphi(x, y, \rho(x))$$

e quindi per il lemma del n. 1, per la I) e la $p(a) \leq \pi(a)$ si ha appunto

$$p(x) \leq \pi(x).$$

Dalla (7) segue poi

$$g(x, p(x), z) \geq \psi(x, \pi(x), z)$$

e, per il lemma precedente e per la II) e la $z(b) \leq \rho(b)$, si ha

$$r(x) \leq \rho(x) \text{ (}^7\text{)}.$$

3. - In modo analogo si dimostra che, se è

$$(8) \quad f(x, y, z_1) \leq \varphi(x, y, z_2),$$

$$(9) \quad g(x, y_1, z) \leq \psi(x, y_2, z),$$

se

I) $f(x, y, z)$ e $\varphi(x, y, z)$ sono lipschitziane in y ,

II) $g(x, y, z)$ e $\psi(x, y, z)$ sono lipschitziane in z

e

$$p(a) \leq \pi(a) \quad r(b) \geq \rho(b),$$

è sempre in I

$$p(x) \leq \pi(x), \quad r(x) \geq \rho(x).$$

4. - OSSERVAZIONE. A chiarimento dei risultati precedenti dimostriamo ora che, se le funzioni $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ soddisfanno alle condizioni seguenti:

(⁷) Se nel teorema dimostrato si suppone $f = \varphi$ e $g = \psi$, la (6) porta che f non dipende da z , mentre dalla (7) segue che g non dipende da y . Il sistema (2) si spezza in due equazioni differenziali distinte. E le affermazioni del testo sono conseguenze del fatto che, nelle nostre ipotesi, gli integrali di queste sono univocamente determinati dai valori iniziali.

- α) $f(x, y, z)$ è non decrescente in x ,
 β) $g(x, y, z)$ è non decrescente in y ,
 γ) $\varphi(x, y, z)$ è non crescente in x ,
 δ) $\psi(x, y, z)$ è non crescente in y ,

$$(10) \quad f(x, y, z) \leq \varphi(x, y, z),$$

$$(11) \quad g(x, y, z) \geq \psi(x, y, z),$$

esse soddisfanno pure alle (6) e (7).

Supponiamo infatti $z_1 \leq z_2$; da questa ipotesi, dalla (10) e dalla α) segue:

$$f(x, y, z_1) \leq f(x, y, z_2) \leq \varphi(x, y, z_2).$$

Supponiamo invece $z_1 > z_2$; da questa ipotesi, dalla (10) e dalla γ) segue:

$$f(x, y, z_1) \leq \varphi(x, y, z_1) \leq \varphi(x, y, z_2).$$

Cioè la (6) è sempre verificata.

Dalle β), δ) e dalla (11) segue invece la (7).

In modo analogo si dimostra che, se le funzioni $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ soddisfanno alle α), β), γ), δ) ed alle:

$$f(x, y, z) \leq \varphi(x, y, z),$$

$$g(x, y, z) \leq \psi(x, y, z),$$

esse soddisfanno pure alle (8) e (9).

5. - *Nell'insieme*

$$\Gamma: a \leq x \leq b, \quad \alpha_1(x) \leq y \leq \alpha_2(x), \quad \tau_1(x) \leq z \leq \tau_2(x),$$

ove $\alpha_i(x)$ e $\tau_i(x)$ ($i = 1, 2$) sono continue e derivabili in

$$I: a \leq x \leq b,$$

siano date due funzioni continue $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$, con

$$(12) \quad \begin{aligned} \alpha'_1(x) &\leq f(x, y, z) \leq \alpha'_2(x), \\ \tau'_1(x) &\geq g(x, y, z) \geq \tau'_2(x), \end{aligned}$$

e sia $f(x, y, z)$ lipschitziana in y e $g(x, y, z)$ lipschitziana in z ; allora, dati due numeri α e β verificanti le

$$\begin{aligned}\sigma_1(a) &\leq \alpha \leq \sigma_2(a), \\ \tau_1(b) &\leq \beta \leq \tau_2(b),\end{aligned}$$

esiste in I una coppia di soluzioni $\sigma(x)$ e $\tau(x)$ delle

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y, z), \\ z' &= g(x, y, z)\end{aligned}$$

verificanti le

$$\sigma(a) = \alpha \quad \tau(b) = \beta \text{ (}^8\text{)}.$$

Poniamo

$$\begin{aligned}\bar{f}(x, y, z) &= f(x, y, z) \quad \text{in } \Gamma, \\ \bar{f}(x, y, z) &= f(x, \sigma_1(x), z) \quad \text{se } y < \sigma_1(x), \quad \tau_1(x) \leq z \leq \tau_2(x), \\ \bar{f}(x, y, z) &= f(x, \sigma_2(x), z) \quad \text{se } y > \sigma_2(x), \quad \tau_1(x) \leq z \leq \tau_2(x), \\ \bar{f}(x, y, z) &= f(x, y, \tau_2(x)) \quad \text{se } z > \tau_2(x), \\ \bar{f}(x, y, z) &= f(x, y, \tau_1(x)) \quad \text{se } z < \tau_1(x),\end{aligned}$$

e definiamo mediante uguaglianze analoghe la $\bar{g}(x, y, z)$ a partire da $g(x, y, z)$.

Poniamo inoltre :

$$\begin{aligned}\varphi_i(x, y, z) &= \sigma'_i(x) & (i = 1, 2), \\ \psi_i(x, y, z) &= \tau'_i(x).\end{aligned}$$

Risulta allora per le (12)

$$(13) \quad \begin{aligned}\varphi_1(x, y, z_1) &\leq \bar{f}(x, y, z_2) \leq \varphi_2(x, y, z_2), \\ \psi_1(x, y_1, z) &\geq \bar{g}(x, y_2, z) \geq \psi_2(x, y_2, z)\end{aligned}$$

ed inoltre $\sigma_i(x)$, $\tau_i(x)$ sono integrali del sistema

$$\begin{aligned}y' &= \varphi_i(x, y, z), \\ z' &= \psi_i(x, y, z).\end{aligned}$$

(⁸) Nei nn. 10 e 11 di loc. cit. (²) sono dimostrati dei teoremi analoghi in cui si suppone o $\sigma_1(a) = \sigma_2(a) = \alpha$ oppure $\tau_1(b) = \tau_2(b) = \beta$.

Chiamiamo $\bar{\sigma}(x)$, $\bar{\tau}(x)$ una coppia di integrali, certamente esistenti ⁽⁹⁾, del sistema

$$\begin{aligned} y' &= \bar{f}(x, y, x), \\ x' &= \bar{g}(x, y, x) \end{aligned}$$

definiti in I e soddisfacenti alle condizioni

$$\bar{\sigma}(a) = \alpha, \quad \bar{\tau}(b) = \beta.$$

Allora, da $\sigma_1(a) \leq \bar{\sigma}(a)$ e $\tau_1(b) \leq \bar{\tau}(b)$ e dalle (13), per il teorema del n. 2, segue:

$$\sigma_1(x) \leq \bar{\sigma}(x), \quad \tau_1(x) \leq \bar{\tau}(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

Allo stesso modo, dalle (13) e dalle $\bar{\sigma}(a) \leq \sigma_2(a)$, $\bar{\tau}(b) \leq \tau_2(b)$, segue:

$$\bar{\sigma}(x) \leq \sigma_2(x), \quad \bar{\tau}(x) \leq \tau_2(x)$$

e quindi $\bar{\sigma}(x)$ e $\bar{\tau}(x)$ verificano il sistema:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y, x), \\ x' &= g(x, y, x), \end{aligned}$$

c. v. d.

Ricorrendo al risultato del n. 3, si trova un teorema analogo al precedente in cui però la $\tau_1(x) \leq \tau_2(x)$ è sostituita dalla $\tau_1(x) \geq \tau_2(x)$ e quindi Γ è l'insieme $a \leq x \leq b$, $\sigma_1(x) \leq y \leq \sigma_2(x)$, $\tau_2(x) \leq x \leq \tau_1(x)$

⁽⁹⁾ Per una dimostrazione elementare di questa circostanza cfr. A. MINZONI, *Su un problema ai limiti per un sistema di due equazioni differenziali del 1° ordine* [questi Rendiconti, vol. IX (1938), pagg. 142-149] nn. 1-2.