

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

**Su una proprietà di media relativa alle equazioni  
lineari alle derivate parziali di tipo ellittico del secondo  
ordine con un numero qualsiasi di variabili**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 12 (1941), p. 22-29

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1941\\_\\_12\\_\\_22\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1941__12__22_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# SU UNA PROPRIETÀ DI MEDIA RELATIVA ALLE EQUAZIONI LINEARI ALLE DERIVATE PARZIALI DI TIPO ELLITTICO DEL SECONDO ORDINE CON UN NUMERO QUALSIASI DI VARIABILI.

*Nota di GIUSEPPE ZWIRNER a Padova.*

In una Nota <sup>(1)</sup> sulle equazioni a derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine a due variabili, il CIMMINO ha dato, per le soluzioni di tali equazioni, una formula integrale che ha dimostrato poi essere caratteristica per quelle soluzioni.

Nella presente Nota mi propongo di far vedere come si possa facilmente estendere, servendosi delle funzioni di E. E. LEVI <sup>(2)</sup>, tale formula integrale anche alle equazioni, dello stesso tipo, con un numero qualsiasi di variabili.

1. Sia data, in un dominio  $T$  dello spazio ad  $m$  ( $m > 2$ ) dimensioni  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , l'equazione a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico :

$$(1) \quad L(u) \equiv \sum_1^m \sum_1^m a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_1^m b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + qu = f \quad (a_{ik} = a_{ki}).$$

<sup>(1)</sup> GIANFRANCO CIMMINO: *Su una proprietà di media relativa alle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma, serie IV, vol. 1 (1936-1937), pp. 304-309]; vedere anche G. CIMMINO: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa* [Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, serie II, vol. VII (1938), pp. 73-96], pp. 82-87.

<sup>(2)</sup> E. E. LEVI: *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXIV (2° semestre 1907), pp. 275-317], pp. 312-313.

Supporremo le  $a_{ik}$  derivabili con derivate parziali prime e seconde continue, le  $b_i$  con derivate parziali prime continue e la  $q$  semplicemente continua in  $T$ .

Essendo la forma

$$(2) \quad \sum_{ik} a_{ik} \lambda_i \lambda_k$$

definita positiva in  $T$ , indicato con  $A_{ik}$  il complemento algebrico di  $a_{ik}$  nel determinante delle  $a_{ik}$ , anche la forma

$$(3) \quad \sum_{ik} A_{ik} \lambda_i \lambda_k,$$

sarà pure definita positiva.

Detto  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  un punto interno a  $T$  e

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \dots & a_{1m}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & \dots & a_{2m}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^0 & a_{m2}^0 & \dots & a_{mm}^0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11}^0 & A_{12}^0 & \dots & A_{1m}^0 \\ A_{21}^0 & A_{22}^0 & \dots & A_{2m}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1}^0 & A_{m2}^0 & \dots & A_{mm}^0 \end{vmatrix},$$

rispettivamente i discriminanti delle forme (2) e (3) calcolati in  $P_0$ , poniamo

$$(4) \quad \sum_1^m A_{ik} (x_i - x_i^0) (x_k - x_k^0) = \rho^2.$$

Sieno inoltre

$$M(v) \equiv \sum_1^m \sum_1^m a_{\mu\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + 2 \sum_1^m \left( \sum_1^m \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} b_\mu \right) \frac{\partial v}{\partial x_\mu} +$$

$$+ v \left( \sum_1^m \sum_1^m \frac{\partial^2 a_{\mu\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \sum_1^m \frac{\partial b_\mu}{\partial x_\mu} + q \right),$$

l'espressione aggiunta della  $L(u)$ ,  $v(x_1, x_2, \dots, x_m)$  una funzione, con derivate parziali prime e seconde continue in  $T$ , soluzione della  $M(v) = g$ ,  $r$  un numero positivo tale che l'ellissoide  $E_r$  definito da  $0 \leq \rho \leq r$  riesca tutto interno al dominio  $T$ ,  $\delta$  un numero positivo arbitrario minore di  $r$ , e applichiamo la nota formula di reciprocità assumendo come dominio d'integrazione la corona ellissoidica  $E_r - E_\delta$  e ponendo

$$(5) \quad u = \rho^{2-m} - r^{2-m},$$

essendo  $\rho^2$  la quantità definita dalla (4).

Si ha:

$$(6) \quad \int_{E_r - E_\delta} \left[ v L(\rho^{2-m} - r^{2-m}) - g(\rho^{2-m} - r^{2-m}) dx_1 dx_2 \dots dx_m = \right. \\ = \left[ - \int_{FE_\rho} v \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_1 dx_2 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_m \right]_{\rho=\delta}^{\rho=r} + \\ \left. + \int_{FE_\rho} (\rho^{2-m} - r^{2-m}) (P(v) + v R) dS, \right.$$

dove si è posto

$$P(v) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} \cos(n x_k) \frac{\partial v}{\partial x_i}, \\ R = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{k=1}^m \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} - b_i \right) \cos(n x_i)$$

e si è indicato con  $FE_\rho$  la frontiera di  $E_\rho$  <sup>(3)</sup>.

Vogliamo ora passare al limite nella (6) per  $\delta \rightarrow 0$ . A tale scopo facciamo il seguente cambiamento di variabili

(3) A. G. WEBSTER - G. SZEGÖ *Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik* [B. G. Teubner, Leipzig (1930)], pag. 310.

$$\begin{aligned}
 (7) \quad x_i &= x_i^0 + \rho (\lambda_1 \alpha_{i1} \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 + \dots + \text{sen } \theta_{m-1} + & 0 \leq \rho \leq r \\
 &+ \lambda_2 \alpha_{i2} \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 + \dots + \text{sen } \theta_{m-2} \cos \theta_{m-1} + & 0 \leq \theta_1 \leq \pi \\
 &\dots \dots & \vdots \\
 &\dots \dots & \vdots \\
 &+ \lambda_{m-1} \alpha_{i,m-1} \text{sen } \theta_1 \cos \theta_2 & + \quad 0 \leq \theta_{m-2} \leq \pi \\
 &+ \lambda_m \alpha_{im} \cos \theta_1) & 0 \leq \theta_{m-1} \leq 2\pi
 \end{aligned}
 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

dove  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  indicano le lunghezze divise per  $\rho$  dell'ellissoide (4) ed  $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{im}$  i coseni direttori dell'asse  $x_i$  con gli assi dell'ellissoide opportunamente orientati. Le quantità  $\lambda_k$  e  $\alpha_{ik}$  dipenderanno con continuità da  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  e saranno legate dalle relazioni

$$(8) \quad \frac{\alpha_{i1} \alpha_{k1}}{\lambda_1^2} + \frac{\alpha_{i2} \alpha_{k2}}{\lambda_2^2} + \dots + \frac{\alpha_{im} \alpha_{km}}{\lambda_m^2} = A_{ik}^0.$$

Poniamo, per brevità di scrittura,

$$(9) \quad \sigma_i = \sum_1^m \frac{\alpha_{is}}{\lambda_s} \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 \dots \text{sen } \theta_{m-s} \cos \theta_{m-s+1} \quad (\cos \theta_m = 1),$$

$$(10) \quad H(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0; \rho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m-1}) = \sum_{is} \alpha_{is} \sigma_s \sigma_i,$$

e dimostriamo che risulta

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & \sum_1^m \sum_1^m \alpha_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_m = \\
 & = -(m-2) \lambda_1 \dots \lambda_m H \text{sen}^{m-2} \theta_1 \text{sen}^{m-3} \theta_2 \dots \text{sen } \theta_{m-2} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{m-1}.
 \end{aligned}$$

Infatti, tenendo presente le (5), (7) e (8), si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = -(m-2) \frac{1}{\rho^{m-1}} \sigma_k,$$

$$\begin{aligned}
 & dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_m = \\
 & = \rho^{m-1} \lambda_1 \dots \lambda_m \sigma_i \text{sen}^{m-2} \theta_1 \text{sen}^{m-3} \theta_2 \dots \text{sen } \theta_{m-2} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{m-1},
 \end{aligned}$$

da cui segue senz'altro la (11).

Si osservi che

$$dx_1 dx_2 \dots dx_m = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \rho^{m-1} \sin^{m-2} \theta_1 \dots \sin \theta_{m-2} d\rho d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{m-1}$$

e che per  $\rho = 0$ ,  $H$  si riduce a  $D$  come si vede facilmente tenendo presente le (8) e ricordando che un elemento del determinante  $D$  è uguale al complemento algebrico dell'elemento corrispondente del determinante  $\Delta$ , diviso per  $\sqrt{\Delta}^{m-1}$ .

Premesso ciò, passiamo ora al limite nella (6) per  $\delta \rightarrow 0$  ed osserviamo innanzi tutto che la funzione integranda al primo membro della (6) ha un infinito d'ordine  $m-1$  per  $\rho \rightarrow 0$  e quindi quel primo membro, per  $\delta \rightarrow 0$ , tende all'  $\int_{E_r}$  della medesima funzione, mentre nel secondo membro il secondo integrale tende manifestamente a zero per  $\delta \rightarrow 0$ . Sicchè, posto, per ogni funzione,  $\varphi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m-1})$  sommabile nel dominio  $0 \leq \theta_1 \leq \pi, \dots, 0 \leq \theta_{m-2} \leq \pi, 0 \leq \theta_{m-1} \leq 2\pi$ ,

$$\int_{\omega} \varphi d\omega = \left( \int_0^{\pi} \right)^{m-2} \int_0^{2\pi} \varphi \sin^{m-2} \theta_1 \sin^{m-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{m-2} d\theta_1 \dots d\theta_{m-1},$$

$$\omega = \int_{\omega} d\omega = \frac{2^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \cdot \pi^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}{(m-2)!},$$

l'indicato passaggio al limite nella (6) conduce, tenendo presente la (11) e quanto fu osservato su  $H$ , alla formula

$$(12) \quad v(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) =$$

$$= \frac{1}{(m-2)\omega D} \left[ \int_0^r \int_{\omega} \{ v \cdot L(\rho^{2-m} - r^{2-m}) - g(\rho^{2-m} - r^{2-m}) \} \rho^{m-1} d\rho d\omega + \right.$$

$$\left. + (m-2) \int_{\omega} [vH]_{\rho=r} d\omega \right],$$

che è la proprietà di media cercata per le soluzioni dell'equazione  $M(v) = g$ .

2. Supponiamo ora che la funzione  $v$ , dotata di derivate prime e seconde continue in  $T$ , verifichi la proprietà di media (12) per tutti i valori di  $r$  sufficientemente prossimi a zero e proviamo che la  $v$  è una soluzione dell'equazione  $M(v) = g$ .

Infatti, derivando la (12) rispetto ad  $r$ , tenendo presente che

$$L(\rho^{2-m} - r^{2-m}) = (m-2) \frac{mH - \sum_{ik} a_{ik} A_{ik}^0}{\rho^m} - \\ - (m-2) \frac{\sum_i b_i \sigma_i}{\rho^{m-1}} + q(\rho^{2-m} - r^{2-m}),$$

si ottiene:

$$\int_{\omega} \left[ v \left\{ (m-2) \frac{mH - \sum_{ik} a_{ik} A_{ik}^0}{\rho} - (m-2) \sum_i b_i \sigma_i \right\} \right]_{\rho=r} d\omega + \\ + \frac{1}{r^{m-1}} \int_{\omega} \int_0^r (m-2)(qv-g) \rho^{m-1} d\rho d\omega + (m-2) \int_{\omega} [(vH)_{\rho}]_{\rho=r} d\omega = 0.$$

Dividendo ora tale espressione per  $r$  e passando poi al limite per  $r$  tendente a zero, applicando la regola dell'HOSPITAL e ricordando le (7) in base alle quali si devono calcolare le derivate rispetto a  $\rho$ , otteniamo

$$\int_{\omega} \left[ \frac{m+2}{2} (Hv)_{\rho\rho} - \frac{1}{2} \sum_{ik} (a_{ik} v)_{\rho\rho} A_{ik}^0 - \sum_i (b_i v)_{\rho} \sigma_i + \right. \\ \left. + \frac{1}{m} (qv-g) \right]_{\rho=0} d\omega = 0,$$

da cui si deduce, tenendo presente le (8), (9), (10), che il primo membro di tale relazione non è altro che  $\frac{2^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \cdot \pi^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}{m(m-2)!} [M(v) - g]$  calcolata nel punto  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ .

*Si conclude quindi che la proprietà di media trovata è caratteristica per le soluzioni della equazione  $M(v) = g$ .*

La formula (12) si può trasformare in modo che contenga

soltanto integrali di volume. Infatti, moltiplicando ambo i membri della (12) per  $r^{m-1}$  ed integrando fra 0 ed  $r$  e dividendo poi per  $\frac{r^m}{m}$ , si ottiene

$$(13) \quad v(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = \\ = \frac{1}{\omega \cdot D} \left[ \int_0^r \int_{\omega} L \left( \frac{\rho^{2-m} - r^{2-m}}{m-2} + \frac{\rho^2 - r^2}{2r^m} \right) v \rho^{m-1} d\rho d\omega - \right. \\ \left. - \int_0^r \int_{\omega} \left( \frac{\rho^{2-m} - r^{2-m}}{m-2} + \frac{\rho^2 - r^2}{2r^m} \right) g \rho^{m-1} d\rho d\omega \right],$$

che si può anche scrivere, indicando con  $P_0$  e  $Q$  i punti  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  e  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,

$$v(P_0) = \int_{E_r} K(P_0, Q) v(Q) dQ + \int_{E_r} G(P_0, Q) g(Q) dQ,$$

dove si è posto

$$K(P_0, Q) = \frac{\sqrt{D^{m-3}}}{\omega} \left[ \left( \frac{1}{\rho^m} - \frac{1}{r^m} \right) \sum_{ik} a_{ik} A_{ik}^0 - \right. \\ \left. - \frac{m}{\rho^{m+2}} \sum_{iik} a_{iik} A_{ii}^0 A_{ik}^0 (x_i - x_i^0) (x_i - x_i^0) + \right. \\ \left. \left( \frac{1}{\rho^m} - \frac{1}{r^m} \right) \sum_{ii} b_{ii} A_{ii}^0 (x_i - x_i^0) + q \left( \frac{r^{2-m} - \rho^{2-m}}{m-2} + \frac{r^2 - \rho^2}{2r^m} \right) \right],$$

$$G(P_0, Q) = \frac{\sqrt{D^{m-3}}}{\omega} \left( \frac{\rho^{2-m} - r^{2-m}}{m-2} + \frac{\rho^2 - r^2}{2r^m} \right),$$

essendo  $\rho^2$  l'espressione definita dalla (4).

**3.** Se ammettiamo che i coefficienti della  $L(u)$  e quelli di  $M(v)$  ed i secondi membri delle equazioni  $L(u) = f$ ,  $M(v) = g$ , siano dotati di derivate parziali prime e seconde continue in  $T$ , allora si può dimostrare che ogni funzione  $v(x_1, x_2, \dots, x_m)$  di

$p$ -ma potenza sommabile con  $p > m$ , che verifichi, per ogni punto  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  di un certo campo e per valori di  $r$  sufficientemente prossimi a zero, la formula integrale (13), è una soluzione della equazione  $M(v) = g$ . Basta osservare che, nelle ipotesi fatte, la funzione  $K(P_0, Q)$ , definita per  $P_0 \neq Q$ , è dotata in  $T$  di derivate parziali prime e seconde continue e che, indicando con  $D$  e  $D^2$  delle derivazioni rispettivamente del primo e secondo ordine (secondo una direzione qualsiasi, o coppia di direzioni), risultano soddisfatte delle limitazioni del tipo

$$\begin{aligned} |K(P_0, P_1)| &< N \cdot \overline{P_0 P_1}^{-(m-1)}, \\ |DK(P_0, P_1)| &< N \cdot \overline{P_0 P_1}^{-m}, \\ |D^2K(P_0, P_1)| &< N \cdot \overline{P_0 P_1}^{-(m+1)}, \end{aligned}$$

con  $N$  costante opportuna, e poi ragionare in modo analogo ha quanto ha fatto il CIMMINO nella Nota citata in (1).