RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DARIO GRAFFI

Sopra le condizioni di Love per un' onda elettromagnetica

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 10 (1939), p. 81-89

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1939__10__81_0>

SOPRA LE CONDIZIONI DI LOVE PER UN' ONDA ELETTROMAGNETICA

Nota di DARIO GRAFFI *a Bologna*

È noto come nella propagazione delle onde hertziane possano presentarsi superfici di discontinuità anche per lo stesso campo elettromagnetico (1). Su di esse, però, le discontinuità del campo devono soddisfare alcune relazioni, che diremo condizioni di LOVE (2). Ciò, perchè l' illustre Autore le mise in piena evidenza, almeno nel caso in cui l' onda si propaga in un dielettrico e il campo da un lato della superficie è nullo.

In questa nota ricercheremo le condizioni di LOVE per un mezzo isotropo anche conduttore, procedendo con considerazioni che riteniamo diverse da quelle finora usate.

Noi infatti, seguendo del resto criteri usuali nella fisica-matematica, sfrutteremo le equazioni di MAXWELL sotto la forma integrale, diversamente dal LOVE che procede con acute, ma forse un po' oscure, indagini sulle equazioni di MAXWELL nella forma differenziale, e dal LAURA che fa uso di brillanti considerazioni energetiche (3). Dovremo ammettere però che non esistano cariche elettriche superficiali (4) o almeno che le superfici di

(1) In generale nella propagazione delle onde elettromagnetiche si presentano solo superfici di discontinuità per le derivate del campo. Tali superfici si studiano molto bene col metodo delle caratteristiche. Cfr. LEVI-CIVITA - *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, [Bologna-Zanichelli 1931] pag. 73 e segg.

(2) LOVE - *Wave-motions with discontinuites in wave front*. [Proceedings of the London Math. Society Serie II. Vol. I (1903-04] pagg. 55 e segg.

(3) E. LAURA - *Sopra una classe di soluzioni delle equazioni di* MAXWELL-HERTZ, [Scritti matematici offerti a LUIGI BERZOLARI] pag. 145.

(4) Questa ipotesi è, del resto, sempre conforme al fatto fisico.

discontinuità non coincidano mai con le superfici elettrizzate. Però, nel caso trattato dal LAURA (mezzo dielettrico, campo elettromagnetico nullo all'istante iniziale) l'ipotesi ora accennata diventa, come si vedrà, superflua.

Riprenderemo poi un teorema di reciprocità da noi stabilito recentemente nell'ipotesi che il campo elettromagnetico sia ovunque continuo e vedremo che il teorema sussiste anche quando sono presenti superfici di discontinuità, sulle quali valgano le condizioni di LOVE.

* * *

Indichiamo con σ una superfice di discontinuità del campo elettromagnetico e supponiamo che, all'istante t_0, σ passi per un punto generico P. Sia poi $\boldsymbol{n}$ un vettore unitario normale a σ col verso coincidente con quello di propagazione della σ stessa. Se consideriamo un intorno di P che viene diviso in due parti dalla superficie σ, per ogni grandezza calcolata nella parte dell'intorno verso cui si propaga la σ, porremo a fianco l'indice 2, per distinguerla dalle grandezze calcolate nell'altra parte dell'intorno, alle quali metteremo invece l'indice 1.

Supporremo che sulle superfici σ le discontinuità siano solo di prima specie e che esista un intorno di P e un intervallo $(t_0, t_0 + h)$ tale che, in esso e nelle due parti dell'intorno separate da σ, il campo elettromagnetico sia (esclusa σ) regolare e continuo assieme alle sue derivate. Queste ultime ipotesi equivalgono, in sostanza, ad ammettere le superfici di discontinuità in numero discreto e si possono perciò supporre verificate nella pratica. Ammetteremo, inoltre, che le proprietà del mezzo varîno con continuità o, meglio, che varîno con continuità la costante dielettrica ε e la permeabilità μ.

Ciò posto, vediamo di dimostrare la continuità attraverso σ della componente del campo elettrico $\boldsymbol{F}$ normale a σ. Ci basterà provare la continuità attraverso σ della componente normale del vettore spostamento $\boldsymbol{D}$ perchè, essendo $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{F}$ e ε continua, ne consegue la continuità per l'analoga componente di $\boldsymbol{F}$.

A questo scopo, consideriamo un elemento $d\sigma$ di σ che contenga P, e tracciamo un cilindretto retto ΔV, fisso, con le generatrici passanti per il contorno di $d\sigma$ e parallele a $\boldsymbol{n}$ e con le basi $d\omega_1$ e $d\omega_2$ da parte opposta rispetto a σ ([5]). Il cilindretto sia poi contenuto nell'intorno di P di cui si è ammessa l'esistenza poco fa. Ora, per una relazione fondamentale dell'elettromagnetismo, il flusso Φ uscente dal cilindretto del vettore $\boldsymbol{D}$ vale la carica ΔQ in esso contenuta. Avremo:

$$(1) \qquad \Phi = \Delta Q\,.$$

Facciamo ora tendere allo zero l'altezza del cilindretto o, meglio, facciamo tendere a $d\sigma$, $d\omega_1$ e $d\omega_2$. Allora il flusso di $\boldsymbol{D}$ attraverso la superfice laterale del cilindretto tende allo zero, perchè $\boldsymbol{D}$ è sempre limitato e detta superfice tende allo zero. Il flusso attraverso $d\omega_2$ tenderà al flusso attraverso $d\sigma$ con la normale coincidente con $\boldsymbol{n}$, perchè a tale vettore tende la normale a $d\omega_2$ diretta verso l'esterno del cilindretto; invece il flusso attraverso $d\omega_1$ tenderà al flusso attraverso $d\sigma$ con la normale uguale a $-\boldsymbol{n}$. ΔQ in questo passaggio al limite tenderà allo zero, perchè non esistono nel cilindro cariche superficiali e il suo volume tende allo zero ([6]).

Avremo così:

$$(2) \qquad (\boldsymbol{D}_2 \times \boldsymbol{n} - \boldsymbol{D}_1 \times \boldsymbol{n})\, d\sigma = 0$$

([5]) Si potrebbe evitare la considerazione dell'elemento infinitesimo $d\sigma$, prendendo in esame un pezzo finito $\Delta\sigma$ di σ contenente P, costruendo opportunatamente due superfici da una parte e dall'altra di σ che si raccordino sul contorno di $\Delta\sigma$, applicando la formula del flusso a queste superfici, facendo che esse tendano a $\Delta\sigma$, e infine impicciolendo indefinitamente $\Delta\sigma$ verso P. Come si vede, si complicherebbero inutilmente le nostre considerazioni per evitare un metodo del resto comune nella fisica-matematica. Per queste ragioni ora e in seguito considereremo linee e superfici infinitesime.

([6]) Infatti se ρ è la densità, ρ_m il massimo del suo valore assoluto:

$$|\Delta Q| = \left|\int_{\Delta V} \rho\, dV\right| < \rho_m\, \Delta V$$

quindi al tendere di ΔV allo zero tende allo zero anche ΔQ. Lo stesso ragionamento si poteva fare per provare l'annullarsi, nel passaggio al limite, del flusso di $\boldsymbol{D}$ sulla superficie laterale del cilindretto e potrebbe ripetersi in altre questioni che incontreremo in seguito, ma riteniamo opportuno ometterlo per la sua elementarità.

dove $\boldsymbol{D}_2$ e $\boldsymbol{D}_1$ sono i valori di $\boldsymbol{D}$ sulle due facce di σ, nel punto P. Ora la discontinuità di $\boldsymbol{D}$ attraverso σ (che indicheremo con $[\boldsymbol{D}]$) vale $\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1$. Quindi da (2), se indichiamo con $[\boldsymbol{F}]$ la discontinuità di $\boldsymbol{F}$ attraverso σ in P, ricordando l'osservazione fatta poco fa, avremo le equazioni:

$$(3) \qquad [\boldsymbol{D}] \times \boldsymbol{n} = 0 \quad [\boldsymbol{F}] \times \boldsymbol{n} = 0$$

che esprimono la continuità delle componenti normali di $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{F}$.

Notiamo che, se il mezzo è dielettrico e il campo è nullo all'istante $t = 0$, il flusso di $\boldsymbol{D}$ è nullo in quell'istante attraverso qualunque superfice chiusa e tale flusso rimane nullo per ogni valore del tempo, perchè (per la continuità della corrente elettrica) ha nulla la derivata rispetto al tempo. Si può scrivere così, in questo caso, la (1) con $\Delta\Phi = 0$ e dedurre da essa le (3) senza fare alcuna ipotesi sulla distribuzione delle cariche.

In modo analogo, sfruttando la solenoidalità del vettore induzione $\boldsymbol{B}$, si trova che questo vettore e di conseguenza l'intensità del campo magnetico $\boldsymbol{H}$ hanno componente normale continua attraverso σ. Sicchè, indicando rispettivamente con $[\boldsymbol{B}]$, $[\boldsymbol{H}]$ queste discontinuità, potremo scrivere:

$$(4) \qquad [\boldsymbol{B}] \times \boldsymbol{n} = 0 \qquad [\boldsymbol{H}] \times \boldsymbol{n} = 0 .$$

Per esaminare le componenti tangenziali delle discontinuità di $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{H}$ attraverso σ occorre riferirsi alle equazioni di MAXWELL. A questo scopo, in un piano passante per P e normale a (σ) tracciamo un rettangolo contenente P, fisso, con due lati di lunghezza finita paralleli a $\boldsymbol{n}$, gli altri due di lunghezza infinitesima dx e da parte opposta rispetto a σ Tutto il rettangolo sia contenuto nell'intorno di P già considerato. Sia $\boldsymbol{a}$ un vettore unitario parallelo ai due lati infinitesimi del rettangolo, quindi parallelo al piano tangente a σ in P; il vettore $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{n}$ sarà un vettore unitario normale al piano del rettangolo. Fissiamo sul rettangolo un verso di percorrenza individuato dalla rotazione di un cavatappi che avanza nel senso di $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{n}$. Calcoliamo la circuitazione C del campo magnetico $\boldsymbol{H}$ lungo il rettangolo nel verso ora indicato. Si avrà:

$$C = \boldsymbol{D}_1 \times \boldsymbol{a}\, dx - \boldsymbol{D}_2 \times \boldsymbol{a}\, dx + C_1 \tag{5}$$

dove C_1 è la somma delle circuitazioni lungo i due lati del rettangolo paralleli a $\boldsymbol{n}$. Per la prima equazione di MAXWELL, C deve essere uguale al flusso attraverso il rettangolo (la cui normale sarà $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{n}$) del vettore $\boldsymbol{u}$ densità di corrente di conduzione sommato con la derivata rispetto al tempo del flusso di $\boldsymbol{D}$. Quindi se Σ è l'area del rettangolo:

$$C = \int_\Sigma \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{n}\, d\Sigma + \frac{\partial}{\partial t} \int_\Sigma \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{n}\, d\Sigma . \tag{6}$$

Calcoliamo ora la derivata al secondo membro di (6). A questo scopo occorre intanto osservare che la Σ è intersecata da σ sulla quale $\boldsymbol{D}$ è discontinua. Non solo, ma la σ va spostandosi col tempo, con velocità che indicheremo con c, nel verso di $\boldsymbol{n}$. Perciò, se indichiamo con q la lunghezza, all'istante t_0, del pezzo di lato del rettangolo parallelo a $\boldsymbol{n}$ dalla parte dove si propaga σ, e con p l'altro pezzo del lato; all'istante t in $(t_0, t_0 + h)$ p sarà aumentato di una certa quantità m e q sarà diminuito della stessa quantità. Allora se indichiamo con dy un elemento del lato del rettangolo parallelo a $\boldsymbol{n}$ avremo $d\Sigma = dx\, dy$ e, siccome il rettangolo ha un lato infinitesimo, sarà per ogni t di $(t_0, t_0 + h)$:

$$\int \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{n}\, d\Sigma = dx \int_0^{p+m} \boldsymbol{D}_1 \times \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{n}\, dy + dx \int_{p+m}^{p+q} \boldsymbol{D}_2 \times \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{n}\, dy \tag{7}$$

Gli indici 1 e 2 sono stati posti a $\boldsymbol{D}$ per mostrare che $\boldsymbol{D}$ è stato calcolato dalle due parti di σ.

Ora possiamo osservare che $\boldsymbol{D}_1$ nell'intervallo aperto della y $(o, p + m)$, $\boldsymbol{D}_2$ nell'intervallo $(p + m, p + q)$ sono sempre regolari e derivabili rispetto al tempo perchè $\boldsymbol{D}_1$ e $\boldsymbol{D}_2$ si trovano nelle due parti dell'intorno di P separate da σ. Potremo perciò derivare la (8), rispetto al tempo con le regole di derivazione di un integrale rispetto a un parametro:

$$(8)\quad \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma} \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{n} d\Sigma = dx \int_0^{p+m} \frac{\partial \boldsymbol{D}_1}{\partial t} \times \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{n} dy + dx \int_{p+m}^{p+q} \frac{\partial \boldsymbol{D}_2}{\partial t} \times \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{n} dy +$$

$$+ \frac{dm}{dt} (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) \times \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{n} dx$$

dove $\boldsymbol{D}_1$ e $\boldsymbol{D}_2$ sono calcolate per $y = p + m$. Consideriamo questa derivata all'istante t_0, cioè come appare nella (6). Allora i due primi termini a secondo membro di (8) rappresentano l'integrale di $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ esteso a Σ. Quanto all'ultimo termine, essendo ora $m = 0$, $\boldsymbol{D}_1$ e $\boldsymbol{D}_2$ resultano calcolate nelle due facce di (σ) all'istante t_0, sicchè ($\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1$) sarà la discontinuità [$\boldsymbol{D}$] di $\boldsymbol{D}$ su σ nel punto P. Resta da calcolare $\frac{dm}{dt}$. A questo scopo basta osservare che, nell'intervallo infinitesimo t_0 $t_0 + dt$, la (σ) si sposta di $c\,dt$ in direzione $\boldsymbol{n}$, quindi $dm = c\,dt$, $\frac{dm}{dt} = c$ calcolata, s'intende, in P. Allora sostituendo nella (6) tenendo presente la (5) si ha:

$$(9)\quad \begin{aligned} & C_1 + (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) \times \boldsymbol{a} dx = \\ & = \int_{\Sigma} \left(\boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \times \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{n} d\Sigma - c [\boldsymbol{D}] \times \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{n} dx . \end{aligned}$$

Facciamo ora tendere allo zero i due lati di Σ paralleli a $\boldsymbol{n}$, o meglio, facciamo tendere a σ i due lati lunghi dx. C_1 e l'integrale esteso a Σ tenderanno allo zero essendo $\boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ e $\boldsymbol{H}$ limitati, $\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1$ tenderà alla discontinuità di $\boldsymbol{H}$ su σ in P. Quindi si avrà:

$$(10)\quad [\boldsymbol{H}] \times \boldsymbol{a} = c \boldsymbol{n} \wedge [\boldsymbol{D}] \times \boldsymbol{a} .$$

Questa equazione vale per ogni $\boldsymbol{a}$ tangente a σ. Ma essa vale anche per $\boldsymbol{a}$ normale perchè, essendo per le (4) $[\boldsymbol{H}]$ tangente a σ, la (10) si riduce in questo caso ad una identità. Si può allora sopprimere $\boldsymbol{a}$ nella [10] e ricordando che $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{F}$ si ha:

$$[\boldsymbol{H}] = \varepsilon c \boldsymbol{n} \wedge [\boldsymbol{F}] . \tag{10}$$

Partendo invece dalla seconda equazione di MAXWELL si trova, ragionando in modo analogo, l' equazione:

$$[\boldsymbol{F}] = - c \mu \boldsymbol{n} \wedge [\boldsymbol{H}] . \tag{11}$$

Le (10) e (11) costituiscono le ricercate condizioni di LOVE. È facile vedere che esse si riducono alle ordinarie equazioni se da una faccia di σ il campo è nullo. Con procedimento noto (7) si trova poi la relazione:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} . \tag{12}$$

* * *

Passiamo ora all' annunciata estensione del teorema di reciprocità (8). Noi l'avevamo dedotto dalle equazioni che si ottenevano trasformando secondo Laplace le equazioni di Maxwell. Ora, per applicare questa trasformazione, avevamo ammesso il campo elettromagnetico nullo per $t \leq 0$, finito in tutto lo spazio per t compreso fra 0 e ∞, e infine continuo. Noi ora toglieremo questa ultima restrizione ammettendo l'esistenza di un numero discreto di superfici di discontinuità sulle quali dovranno essere soddisfatte le condizioni di Love.

Riprendiamo le equazioni di MAXWELL adattate allo studio della propagazione delle radioonde (9):

(7) L. SONA - *La propagazione delle onde elettromagnetiche*. [Questi Rendiconti II, 1931], pag. 1.

(8) D. GRAFFI - *Sui teoremi di reciprocità nei fenomeni dipendenti dal tempo* [In corso di stampa sugli Annali di Matematica].

(9) Cfr. D. GRAFFI - *Sopra alcuni fenomeni ereditari dell' elettrologia*, Nota V, [Rendiconti Istituto Lombardo LXIX - 1936].

$$(13) \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{D} = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} + \lambda \boldsymbol{F} + \int_0^t \varphi (t - \tau)\, \boldsymbol{F}(\tau)\, d\tau + \boldsymbol{U}_0$$

$$(14) \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = - \mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

dove $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{D}$, ε, μ hanno il significato già noto, λ la conduttività elettrica, $\varphi(t - \tau)$ una funzione che caratterizza le proprietà dei gas jonizzati dall'alta atmosfera, $\boldsymbol{U}_0$ la densità della corrente in antenna.

In un punto generico P dello spazio integriamo la (13) da 0 a ∞, dopo averla moltiplicata per e^{-pt} (p numero positivo o complesso con parte reale positiva).

Ponendo:

$$(15) \qquad f = \int_0^\infty e^{-pt}\, \boldsymbol{F}\, dt \qquad h = \int_0^\infty e^{-pt}\, \boldsymbol{H}\, dt$$

$$\psi(p) = \int_0^\infty e^{-ps}\, \varphi(s)\, ds \qquad \boldsymbol{u}_0 = \int_0^\infty e^{-pt}\, \boldsymbol{U}_0\, dt$$

cioè indicando con f, h, $\boldsymbol{u}_0$ le trasformate di Laplace di $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{U}_0$ la (13) diventa:

$$(16) \qquad \int_0^\infty e^{-pt} \operatorname{rot} \boldsymbol{D}\, dt = \varepsilon \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}\, dt + \lambda f + \psi(p)\, f \; .$$

Ora, per semplicità di trattazione, supponiamo esista una sola superficie di discontinuità che all'istante t_0 passi per P.

Avremo, allora, integrando per parti l'integrale a secondo membro di (16) e ricordando che $\boldsymbol{F}$ è nulla per $t = 0$ ed è sempre limitata

$$(17) \qquad \begin{aligned} \varepsilon \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}\, dt &= \varepsilon\, e^{-pt_0} \left(\boldsymbol{F}(t_0 - 0) - \boldsymbol{F}(t_0 + 0) \right) + \\ &+ \varepsilon p \int_0^\infty e^{-pt}\, \boldsymbol{F}\, dt = \varepsilon\, e^{-pt_0} [\boldsymbol{F}] + \varepsilon p f \end{aligned}$$

perchè, ovviamente $[\boldsymbol{F}(t_0 - 0) - \boldsymbol{F}(t_0 + 0)]$ vale la discontinuità di $\boldsymbol{F}$ attraverso σ.

Si ha poi, essendo t_0 funzione di P

$$(18)\qquad \int_0^\infty e^{-pt}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}dt = \int_0^{t_0} e^{-pt}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}dt + \int_{t_0}^\infty e^{-pt}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}dt =$$

$$= \operatorname{rot}\int_0^{t_0} e^{-pt}\boldsymbol{H}dt - \operatorname{grad} t_0 \wedge \boldsymbol{H}(t_0 - 0) +$$

$$+ \operatorname{rot}\int_{t_0}^\infty e^{-pt}\boldsymbol{H}dt + \operatorname{grad} t_0 \wedge \boldsymbol{H}(t_0 + 0) =$$

$$= \operatorname{rot}\boldsymbol{h} - \operatorname{grad} t_0 \wedge [\boldsymbol{H}] .$$

Ora grad t_0 è un vettore normale alle superfici su cui t_0 è costante cioè a σ, nel verso in cui t_0 va crescendo, cioè nel verso di $\boldsymbol{n}$. Inoltre il suo modulo $\frac{dt_0}{dn}$ vale come è noto $\frac{1}{c}$ (10).

Tenendo presente questi ultimi resultati, la [12] e la condizione di Love [11], sostituendo nella [16], le [17] e [18] si ha:

$$(19)\qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{h} = \varepsilon p\boldsymbol{f} + \lambda\boldsymbol{f} + \psi(p)\boldsymbol{f} + \boldsymbol{u}_0 .$$

Operando in modo analogo su (14) scende:

$$(20)\qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{f} = -\mu p\boldsymbol{h} .$$

Le (19) e (20) sono appunto le equazioni da cui abbiamo prese le mosse nel lavoro citato per dimostrare il teorema di reciprocità. Col procedimento della nota citata si prova allora il teorema in discorso nel caso più generale, che ora abbiamo preso in considerazione.

(10) Cfr. per esempio T. Levi-Civita, loco citato, pag. 25.