Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Renato Gandin

Intorno ad un problema di geometria numerativa ed alla sua interpretazione funzionale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 10 (1939), p. 69-80

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1939__10__69_0>

INTORNO AD UN PROBLEMA DI GEOMETRIA NUMERATIVA ED ALLA SUA INTERPRETAZIONE FUNZIONALE

di RENATO GANDIN *a Padova*

Scopo della presente Nota è di offrire la risoluzione, dal punto di vista geometrico-funzionale, del problema relativo agli spazi plurisecanti una curva algebrica dello S_r, priva di singolarità puntuali, come da seguente enunciato:

« Determinazione del gruppo dei punti d'appoggio degli S_{r-2} i-secanti una C_p^n di S_r ed incidenti a $[2(r-1)-i]$ rette generiche $[i=0,\ 1 \ldots 2(r-1)]$ » (1).

Preliminari.

Giova innanzi tutto avvertire che indicate con $a_i = a_i(n, r, p, i)$, $b_i = b_i(n, r, p, i)$ due funzioni intere dell'ordine n e del genere p della curva, dell'indice i e della dimensione r dello spazio, con G, K rispettivamente la generica sezione iperpiana ed un gruppo canonico della curva, l'interpretazione geometrico-funzionale del gruppo Z_i incognito si esprimerà mediante un'equivalenza del tipo:

$$Z_i \equiv a_i G - b_i K, \tag{1}$$

che sarà dimostrata seguendo il metodo d'induzione cioè am-

(1) La risoluzione del problema è stata acquisita mediante il procedimento che, salvo i necessari adattamenti, riproduce quello di A. COMESSATTI nella Nota: *Determinazione dei gruppi di* $(r+1)$ *punti comuni ad* $(r+1)$ *serie lineari* g_n^r. [Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti], t. 69, Parte II, pag. 871.

mettendo la formula:

(2) $$Z_{i-1} \equiv a_{i-1}\, G - b_{i-1}\, K\,,$$

dove a_{i-1}, b_{i-1} hanno ovvio significato, e deducendone quindi la (1).

Il procedimento che seguiremo dimostrerà che l'equivalenza (1) vale per $i = 1$ e in più darà modo di esprimere le funzioni a_i, b_i mediante formule ricorrenti; quando poi tali funzioni saranno note il numero N_i degli S_{r-2}, di cui all'enunciato, sarà dato dalla formula:

(3) $$N_i = \frac{1}{i} \left\{ n\, a_i - 2\,(p-1)\, b_i \right\},$$

che è l'interpretazione numerativa della (1).

Costruzione d'una corrispondenza sulla curva C_p^n.

Siano R, S, r_1, r_2, ... r_{2r-i-2}, rispettivamente due punti e $(2r - i - 2)$ rette dello S_r. Fissato un generico punto P sulla C_p^n e congiuntolo con R si considerino gli S_{r-2} $(i-1)$-secanti la curva ed incidenti alle rette PR, r_1, r_2 ... r_{2r-i-2}, esclusione fatta di quelli in numero di μ', passanti per P ulteriormente $(i-2)$-secanti ed incidenti alle rette r_1, r_2 ... r_{2r-i-2}; sia poi σ il generico di tali S_{r-2}. Proiettati dal punto S gli S_{r-2} predetti, si indichi con Y il gruppo costituito dai punti P', ulteriori intersezioni con la curva degli S_{r-1} proiettanti. Viene a generarsi in tal modo tra i punti della C_p^n una corrispondenza T quando si consideri il gruppo Y come quello degli omologhi di P e che, come sarà fra breve dimostrato, è dotata di valenza.

Infatti indicato con Ω il gruppo complessivo dei punti d'appoggio di tutti gli S_{r-2} $(i-1)$-secanti la curva ed incidenti alle rette RP, r_1, r_2 .... r_{2r-i-2}, con μ il loro numero, con Q_1^s, Q_2^s .... Q_{i-2}^s, $Q_{i-1}^s \equiv P$ i punti di appoggio di uno di quelli esclusi dalle considerazioni presenti, si potrà scrivere, pel gruppo Y, la seguente equivalenza:

(4) $$Y \equiv \mu\, G - \Omega - \mu'\, G + \sum_{s=1}^{\mu'} (Q_1^s + Q_2^s + \ldots\, Q_{i-2}^s + P)\,,$$

che lo esprime come differenza tra i due gruppi di punti:

$$[\mu G - \Omega] \text{ e } \left[\mu' G - \sum_{s=1}^{\mu'} (Q_1^s + Q_2^s \ldots . Q_{i-2}^s + P)\right],$$

il primo dei quali non è altro che il gruppo *totale* dei punti costituito dalle ulteriori intersezioni con la C_p^n degli iperpiani proiettanti da S *tutti* gli S_{r-2} predetti mentre il secondo è quello costituito dagli ulteriori punti d'intersezione con la C_p^n degli S_{r-1} proiettanti da S gli S_{r-2} che non vanno qui considerati e che pertanto deve essere tolto dal primo.

Tenendo presente che il numero μ' sopra definito è uguale a quello degli S_{r-2}, $(i-2)$-secanti la Γ_p^{n-1}, proiezione della C_p^n da P in un S_{r-1} ed incidenti alle proiezioni delle rette $r_1, r_2 \ldots r_{2r-i-2}$ ed indicando con a'_i e b'_i rispettivamente le funzioni $a_i(n-1, r-1, p, i)$, $b_i(n-1, r-1, p, i)$ si potrà scrivere, pel gruppo Ω', dei loro punti d'appoggio, la seguente equivalenza:

$$\Omega' \equiv a'_{i-2}(G-P) - b'_{i-2}K, \tag{5}$$

che discende immediatamente dalla (2), per ipotesi ammessa ed in cui $a'_{i-2} = a_{i-2}(n-1, r-1, p, i-2)$ e $b'_{i-2} = b_{i-2}(n-1, r-1, p, i-2)$ hanno ovvio significato.

Ciò premesso, tenendo presente che:

$$\sum_{s=1}^{\mu'} (Q_1^s + Q_2^s + \ldots . Q_{i-2}^s) \equiv \Omega',$$

la (4) porge:

$$Y \equiv \mu G - \Omega - \mu' G + \Omega' + \mu' P, \tag{6}$$

da cui, ricordando per Ω, Ω', μ, μ' rispettivamente le espressioni (2), (5) e le loro interpretazioni numerative, discenderà:

$$Y \equiv \left\{ n \frac{a_i}{i-1} - 2(p-1) \frac{b_{i-1}}{i-1} \right\} G - a_{i-1} G + b_{i-1} K -$$

$$- \left\{ (n-1) \frac{a'_{i-2}}{i-2} - 2(p-1) \frac{b'_{i-2}}{i-2} \right\} G + a'_{i-2}(G-P) - b'_{i-2} K +$$

$$+ \left\{ (n-1) \frac{a'_{i-2}}{i-2} - 2(p-1) \frac{b'_{i-2}}{i-2} \right\} P ;$$

e dopo facili trasformazioni seguirà in definitiva:

$$
\begin{aligned}
(7) \qquad & Y - \left\{ \frac{(n-i+1)}{i-2} a'_{i-2} - \frac{2(p-1)}{i-2} b'_{i-2} \right\} P \equiv \left\{ \frac{(n-i+1)}{i-1} a_{i-1} - \right. \\
& - \frac{(n-i+1)}{i-2} a'_{i-2} - \frac{2(p-1)}{i-1} b_{i-1} - \left. \frac{2(p-1)}{i-2} b'_{i-2} \right\} G + \\
& + \left\{ b_{i-1} - b'_{i-2} \right\} K ,
\end{aligned}
$$

da cui emerge, come si voleva dimostrare, che la corrispondenza T è dotata di valenza $\gamma = -\left\{ \frac{(n-i+1)}{i-2} a'_{i-2} - \frac{2(p-1)}{i-2} b'_{i-2} \right\}$.

Per quanto concerne la corrispondenza inversa è da notare che, per costruzione, è a comportamento analogo a quello della diretta e perciò la relazione di equivalenza che lega il gruppo X dei punti P omologhi di P' nella T^{-1} è identica alla (7).

Ciò posto, si osservi che quando P va a coincidere con P', due alternative possono presentarsi;

a) lo S_{r-2}, σ si appoggia alla retta RP in un punto H diverso da P. Allora l'iperpiano, determinato dal punto S e dallo stesso σ, che lo proietta, incontra la retta RP in due punti distinti: H, $P \equiv P'$, quindi contiene la retta RP e passa per R: σ è dunque appoggiato ad RS ed alle rette $r_1, r_2 \ldots r_{2r-i-2}$. In effetto, se σ è appoggiato ad RS, ognuno degli ulteriori $(n-i+1)$ punti d'intersezione della C_p^n con l'iperpiano proiettante, è unito per la corrispondenza e coincide con uno solo dei suoi corrispondenti;

b) lo S_{r-2}, σ passa per P. Allora poichè P, per la definizione di P', non può coincidere con alcuno dei punti d'appoggio sulla curva degli S_{r-2} considerati, chè in caso contrario sarebbe uno di quelli precedentemente esclusi, σ è uno degli S_{r-2} i-secanti incidenti alle rette $r_1, r_2 \ldots . r_{2r\ i-2}$ e P uno dei suoi punti d'appoggio. Dalle considerazioni testè espresse, emerge dunque che la corrispondenza T, precedentemente istituita fra i punti della curva, è atta a risolvere il problema proposto poichè il gruppo Z_i incognito fa parte delle sue coincidenze.

Osservando che le coincidenze di cui in (*a*) costituiscono il gruppo:

$$\Delta \equiv \mu G - \Omega ,$$

applicando il principio di CAYLEY-BRILL [2] e tenendo presenti per Ω, Ω', μ, μ' le espressioni (2), (5) e le loro interpretazioni numerative, si potrà scrivere la seguente equivalenza:

$$Z_i \equiv \left\{ \frac{(n-i+1)}{i-1} a_{i-1} - \frac{2(n-i+1)}{i-2} a'_{i-2} - \frac{2(p-1)}{i-1} b_{i-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{4(p-1)}{i-2} b'_{i-2} \right\} G - \left\{ \frac{(n-i+1)}{i-2} a'_{i-2} - b_{i-} - \frac{2(p+i-1)}{i-2} b'_{i-2} \right\} K.$$

Da tale formula discende inoltre che i coefficienti di G e K altro non sono che le espressioni che competono rispettivamente alle funzioni di a_i e b_i.

La formula (1) risulta quindi dimostrata sull'ipotesi che valga la (2) ed in più sono state trovate espressioni ricorrenti per a_i e b_i.

Rimane ancora da provare che la (1) vale per $i = 1$ e ciò si ottiene abbastanza semplicemente adoperando ancora una volta la corrispondenza T precedentemente costruita ed applicando il *principio* di CAYLEY-BRILL. Infatti tenendo presente che il numero N_0 degli S_{r-2} di S_r incidenti a $2(r-1)$ rette generiche è, giusta una formula di SCHUBERT [3], espresso da:

$$N_0 = \frac{1}{r}\binom{2r-2}{r-1},$$

si può scrivere immediatamente, pel gruppo Z_1 dei punti d'appoggio sulla C_p^n degli S_{r-2} monosecanti ed incidenti a $(2r-3)$ rette generiche dello S_r, le seguente equivalenza:

$$(9) \qquad Z_1 \equiv \frac{1}{r}\binom{2r-2}{r-1} G ,$$

(2) Per quanto concerne la teoria delle corrispondenze a valenza e il principio di CAYLEY-BRILL, cfr. SEVERI: *Trattato di geometria algebrica* [Zanichelli, Bologna], vol. I.

(3) Cfr. ENRIQUES-CHISINI: *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.* [Zanichelli, Bologna], vol. I. pag. 193.

che del resto poteva anche dedursi con facile ragionamento diretto. Si ricava inoltre che per $i=1$ i coefficienti a_1 e b_1 hanno le espressioni:

$$a_1 = \frac{1}{r}\binom{2r-2}{r-1}, \qquad b_1 = 0;$$

nel caso $i=2$, procedendo come già detto, si trova che:

$$(10) \quad Z_2 \equiv \left\{\frac{1}{r}\binom{2r-2}{r-1}(n-1) - \frac{2}{r-1}\binom{2r-4}{r-2}\right\} G - \binom{2r-4}{r-2} K,$$

e:

$$a_2 = \frac{1}{r}\binom{2r-2}{r-1}(n-1) - \frac{2}{r-1}\binom{2r-4}{r-2}; \quad b_2 = \frac{1}{r-1}\binom{2r-4}{r-2}.$$

Da quanto precede si riesce ad intuire la formula generale che è, come ora sarà dimostrato, data dalla seguente equivalenza:

$$\boxed{\begin{aligned} Z_i \equiv & \left\{ \sum_{s=0}^{\rho} (-1)^k \sum_{k=s}^{\rho} \frac{(i-2s)}{(r-k)(k-s)} \binom{i-k-s-1}{k-s-1} \binom{2r-2k-2}{r-k-1} \binom{n-k-s-1}{i-k-s-1} \binom{p-1}{s} \right\} G - \\ & - \left\{ \sum_{s=0}^{\sigma} (-1)^h \sum_{h=s}^{\sigma} \frac{1}{(r-h-s)} \binom{i-h-s-2}{h-s} \binom{2r-2h-4}{r-h-2} \binom{n-h-s-3}{i-h-s-2} \binom{p-2}{s} \right\} K \end{aligned}}$$

con la convenzione che: $\dfrac{(i-2k)}{(k-k)}\dbinom{i-2k-1}{-1} = 1$, e con l'avvertenza che a seconda si tratti di i pari o dispari le sommatorie sugli indici vanno estese rispettivamente nel primo caso fino a $\frac{i}{2}$; $\frac{(i-2)}{2}$ e nel secondo fino a $\frac{(i-1)}{2}$; $\frac{(i-3)}{2}$ e cioè:

$$\left(\rho = \begin{cases} 0, 1 \ldots \frac{i}{2} & \text{per } i \text{ pari} \\ 0, 1 \ldots \frac{(i-2)}{2} & \text{per } i \text{ dispari} \end{cases} \right),$$

$$\left(\sigma = \begin{cases} 0,\ 1 \ldots\ldots \dfrac{(i-2)}{2} & \text{per } i \text{ pari} \\ 0,\ 1 \ldots\ldots \dfrac{(i-3)}{2} & \text{per } i \text{ dispari} \end{cases}\right),$$

Verifichiamo innanzi tutto la (11) per $i = 1,\ 2$; se ne ricavano immediatamente le (9) e (10). Ciò fatto ammettiamo la sua validità per il valore $(i-1)$ di i e dimostriamola pel valore di i servendoci della (8).

Posto $(i-1)$ in luogo di i nella (11) e tenuto conto della (8) si trae per a_i la seguente espressione:

$$a_i = \sum_{s=0}^{\alpha} (-1)^k \sum_{k=s}^{\alpha} \frac{(i-2s-1)}{(r-k)(k-s)} \binom{i-k-s-2}{k-s-1} \binom{2r-2k-2}{r-k-1} \binom{n-k-s-1}{i-k-s-2} \binom{p-1}{s} \frac{(n-i+1)}{(i-1)} -$$

$$- \sum_{t=0}^{\beta} (-1)^l \sum_{l=t}^{\beta} \frac{(i-2s-2)}{(r-l-s)(l-t)} \binom{i-l-t-3}{l-t-1} \binom{2r-2l-4}{r-l-2} \binom{n-l-t-2}{i-l-t-3} \binom{p-1}{t} \frac{2(n-i+1)}{(i-2)} -$$

$$- \sum_{u=0}^{\beta} (-1)^h \sum_{h=u}^{\beta} \frac{1}{(r-h-1)} \binom{i-h-u-3}{h-u} \binom{2r-2h-4}{r-h-2} \binom{n-h-u-3}{i-h-u-3} \binom{p-2}{u} \frac{2(p-1)}{(i-1)} +$$

$$+ \sum_{v=0}^{\gamma} (-1)^m \sum_{m=v}^{\gamma} \frac{1}{(r-m-2)} \binom{i-m-v-4}{m\ v} \binom{2r-2m-6}{r-m-3} \binom{n-m-v-4}{i-m-v-4} \binom{p-2}{v} \frac{4(p-1)}{(i-2)},$$

in cui gl'indici variano come segue:

$$\left(\alpha = \begin{cases} 0,\ 1, \ldots\ldots \dfrac{(i-1)}{2} & \text{per } i \text{ pari} \\ 0,\ 1, \ldots\ldots \dfrac{(i-2)}{2} & \text{per } i \text{ dispari} \end{cases}\right)$$

$$\left(\beta = \begin{cases} 0,\ 1, \ldots\ldots \dfrac{(i-2)}{2} & \text{per } i \text{ pari} \\ 0,\ 1, \ldots\ldots \dfrac{(1-3)}{3} & \text{per } i \text{ dispari} \end{cases}\right)$$

$$\left(\gamma = \begin{cases} 0,\ 1, \dots \ \dfrac{(i-4)}{2} & \text{per } i \text{ pari} \\[2ex] 0,\ 1, \dots \ \dfrac{(i-3)}{2} & \text{per } i \text{ dispari} \end{cases}\right).$$

Limitandosi dapprima il caso di i dispari e riducendo tutte le sommatorie ad uno stesso indice discende dalla precedente:

$$a_i = \sum_{s=0}^{\alpha}(-1)^s \sum_{s=0}^{\alpha} \frac{(i-2s-1)}{(r-k)(k-s)}\binom{i-k-s-2}{k-s-1}\binom{2r-2k-2}{k-s-1}\binom{n-k-s-1}{i-k-s-2}\binom{p-1}{s}\frac{(n-i+1)}{(i-1)} +$$

$$+\sum_{s=0}^{\alpha}(-1)^s \sum_{s=0}^{\alpha} \frac{(i-2s-2)}{(r-k)(k-s-1)}\binom{i-k-s-2}{k-s-2}\binom{2r-2k-2}{r-k-1}\binom{n-k-s-1}{i-k-s-2}\binom{p-1}{s}\frac{2(n-i+1)}{(i-2)} +$$

$$+\sum_{s=0}^{\alpha}(-1)^s \sum_{s=0}^{\alpha} \frac{1}{r-k}\binom{i-k-s-1}{k-s}\binom{2r-2k-2}{r-k-1}\binom{n-k-s-1}{i-k-s-1}\binom{p-2}{s}\frac{2(p-1)}{(i-1)} +$$

$$+\sum_{s=0}^{\alpha}(-1)^s \sum_{s=0}^{\alpha} \frac{1}{r-k}\binom{i-k-s-1}{k-s-1}\binom{2r-2k-2}{r-k-1}\binom{n-k-s-1}{i-k-s-1}\binom{p-2}{s}\frac{4(p-1)}{(i-2)},$$

da cui dopo facili trasformazioni si ha:

$$a_i = \sum_{s=0}^{\alpha}(-1)^s \sum_{s=0}^{\alpha} \frac{(i-2s-1)(i-2k)}{(r-k)(k-s)(i-1)}\binom{i-k-s-1}{k-s-1}\binom{2r-2k-2}{r-k-1}\binom{n-k-s-1}{i-k-s-1}\binom{p-1}{s} +$$

$$+\sum_{s=0}^{\alpha}(-1)^s \sum_{s=0}^{\alpha} \frac{2(i-2s-2)}{(r-k)(i-2)}\binom{i-k-s-1}{k-s-1}\binom{2r-2k-2}{r-k-1}\binom{n-k-s-1}{i-k-s-1}\binom{p-1}{s} +$$

$$-\sum_{s=0}^{\alpha}(-1)^s \sum_{s=0}^{\alpha} \frac{2s(i-2k)}{(r-k)(i-1)(k-s)}\binom{i-k-s-1}{k-s-1}\binom{2r-2k-2}{r-k-1}\binom{n-k-s-1}{i-k-s-1}\binom{p-1}{s} +$$

$$+\sum_{s=0}^{\alpha}(-1)^s \sum_{s=0}^{\alpha} \frac{4s}{(r-k)(i-2)}\binom{i-k-s-1}{k-s-1}\binom{2r-2k-2}{r-k-1}\binom{n-k-s-1}{i-k-s-1}\binom{p-1}{s}.$$

Ora poichè

$$\frac{(i-2s)(i-2k)}{(i-1)}+\frac{2(i-2s-2)(k-s)}{(i-2)}+\frac{2s(i-2k)}{(i-1)}+\frac{4s(k-s)}{(i-2)}=i-2s\,,$$

segue per a_i l'espressione:

$$a_i=\sum_{s=0}^{\rho}(-1)^s\sum_{k=s}^{\rho}\frac{(i-2s)}{(r-k)(k-s)}\binom{i-k-s-1}{k-s-1}\binom{2r-2k-2}{r-k-1}\binom{n-k-s-1}{i-k-s-1}\binom{p-1}{s}\,,$$

che coincide col coefficiente a_i della (11) e dove l'indice ρ varia come precedentemente specificato nel caso di i dispari.

Ci risparmieremo, a titolo di brevità, l'analogo calcolo relativo al coefficiente b_i di K e al caso di i pari, che può eseguirsi con mezzi analoghi e scriviamo invece la formula definitiva per il numero N_i la cui espressione si deduce subito dalla (10) nella maniera più volte indicata.

$$\boxed{\sum_{s=0}^{\rho}(-1)^s\sum_{k=s}^{\rho}(-1)^k\frac{(i-2s)}{(r-k)(k-s)}\binom{i-k-2s}{k}\binom{n-k-2s}{i-k-2s}\binom{2r-2k-2s-2}{r-k-s-1}\binom{p}{s}} \tag{12}$$

Osservazione.

È opportuno notare che per $i=2(r-1)$ la (12) risolve il seguente problema numerativo: « Determinazione degli S_{r-2} $2(r-1)$ -secanti una C_p^n di S_r ».

Tale problema di cui, grazie all'equivalenza (11) è acquisito il significato geometrico funzionale in termini della sezione iperpiana G e del gruppo canonico K, fu risolto da CASTELNUOVO ([4]) che assegnò, per il numero $N_{2(r-1)}$ la seguente espressione:

([4]) Cfr. CASTELNUOVO: *Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche.* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1889], t. III, pag. 120.

$$(13) \qquad N_{2(r-1)} = \sum_{i=0}^{\delta} \frac{(-1)^i}{(r-i)} \binom{n-r-i+1}{r-i-1} \binom{n-r-1}{r-i-1} \binom{p}{i},$$

dove $\delta = 0, 1 \ldots (r-1)$.

Ebbene, noi ci proponiamo di dimostrare che dalla (12) per il valore $i = 2(r-1)$ si trae la (13).

Tutto si riduce a provare che:

$$(14) \qquad \begin{aligned} N_{2(r-1)} &= \sum_{s=0}^{\delta} (-1)^s \sum_{k=0}^{j} \frac{(-1)^k}{(r-k-s)} \binom{2r-2s-k-2}{k} \binom{n-k-2s}{2r-2s-k-2} \binom{2r-2k-2s-2}{r-k-s-1} \binom{p}{s} = \\ &= \sum_{s=0}^{\delta} (-1)^s \binom{n-r-s-1}{r-s-1} \binom{n-r-s}{r-s-1} \binom{p}{s}, \end{aligned}$$

dove $j = 0 \ldots . (r-s-1)$.

Allo scopo è opportuno fornire, innanzi tutto, la dimostrazione della seguente altra formula:

$$(15) \qquad \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{r-s}{k} \binom{n-2s-k}{r-k-s-1} = \binom{n-r-s}{r-s-1}.$$

Considerata l'equazione:

$$(16) \qquad x_1 + x_2 + \ldots . x_k = m,$$

dove m è un intero, si aggiungano $(r-k)$ zeri ed una sua soluzione $(x_1, x_2 \ldots . x_k)$ costituita da numeri interi e positivi, in tutti i modi possibili con l'avvertenza però di non alterare l'ordine secondo il quale si succedono i numeri $x_1, x_2, \ldots x_k$; si vengono in tal modo a formare $\binom{r}{k}$ soluzioni dell'equazione:

$$(17) \qquad x_1 + x_2 + \ldots . x_r = m,$$

con interi *non negativi* dato che i k numeri $x_1, x_2, \ldots x_k$ si possono collocare in $\binom{r}{k}$ posti solamente se non si vuole, come si è detto, mutare il loro ordine di successione.

Discende quindi che il numero delle soluzioni dell'equazione (17) con sole $(r - k)$ radici nulle è, indicato con P_k quello delle soluzioni con interi *positivi* della (16), dato da $\binom{r}{k} P_k$ e per conseguenza il numero Q_r delle soluzioni con interi *non negativi* della (17) è dato dalla seguente espressione:

$$(18) \qquad Q_r = \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} P_k \, ,$$

la quale ci dice inoltre che P_r si può considerare come r^{ma} differenza del primo termine della successione:

$$Q_0, \, Q_1 \, \ldots . \, Q_r \ldots . \, ,$$

che è, con terminologia notoria del calcolo delle differenze ([5]), una progressione aritmetica di ordine m, (in quanto sono uguali a zero tutte le differenze maggiori di r del termine iniziale), e per conseguenza si potrà scrivere:

$$(19) \qquad P_r = \Delta^r Q_0 = \binom{m-1}{r-1} \, .$$

Ciò posto si ha la possibilità di calcolare P_r mediante i termini della successione su considerata in virtù di una nota formula ([6]) che, applicata al caso presente, fornisce per P_r la seguente espressione:

$$(20) \qquad P_r = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} Q_k \, .$$

Essendo inoltre noto come il numero Q_k sia uguale a quello dei termini distinti dello sviluppo della potenza m^{ma} di un polinomio costituito da k termini e perciò uguale al numero delle

([5]) Cfr. M. Cipolla: *Analisi algebrica* [Libreria scientifica, Capozzi, Palermo 1914], pagg. 50-51.

([6]) Cfr. M. Cipolla: *loco cit.* ([5]) pagg. 51-54.

combinazioni con eventuali ripetizioni di k oggetti ad m ad m (7) cioè:

$$(21) \qquad Q_k = \binom{m+k-1}{k-1} .$$

ricordando le formule (19), (20), (21) segue in definitiva:

$$\sum_{k=1}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{m+k-1}{k-1} = \binom{m-1}{r-1} ,$$

dalla quale, ponendo $m = n - r + 1$, cambiando k in $(r-k)$ e n in $(n-2s)$ si deduce la (15).

Acquisito in tal modo questo primo risultato fondamentale per gli scopi prefissici, osserviamo che, ponendo sotto forma di fattoriali i coefficienti binomiali della (14) e moltiplicando il primo membro per l' inverso del secondo, si perviene a provare, dopo facili trasformazioni, la seguente uguaglianza:

$$\frac{1}{\binom{n-r-s}{r-s-1}} \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{r-s}{k} \binom{n-k-2s}{r-k-s-1} = 1 ,$$

che altro non è se non la (15).

(7) Cfr. M. Cipolla: *loco cit.* (5) pag. 43.