RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

Sopra un teorema sulle equazioni differenziali del secondo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 10 (1939), p. 65-68

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1939__10__65_0>

SOPRA UN TEOREMA SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER *(a Padova)*

In una Nota recente [1] ho dato una dimostrazione semplicissima del seguente teorema:

Se $f(x, y, y')$ è continua rispetto a (y, y') e misurabile rispetto a x nello strato

$$S: a \leq x \leq b, \quad |y| < +\infty, \quad |y'| < +\infty,$$

e riesce minore, in modulo, di una funzione $\lambda(x)$ (≥ 0) sommabile in $a \leq x \leq b$, l'equazione

$$(1) \qquad \begin{aligned} y(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u, y(u), y'(u))\, du + \alpha + \\ + \frac{x-a}{b-a}\left[\beta - \alpha - \int_a^b dt \int_a^t f(u, y(u), y'(u))\, du\right], \end{aligned}$$

ammette sempre almeno una soluzione, per α e β numeri reali prefissati [2].

[1] G. ZWIRNER: *Un'osservazione su un problema ai limiti per le equazioni differenziali* [Bollettino U. M. I., serie II, anno I, (1939), pp. 334-336].

[2] Cfr. G. SCORZA DRAGONI: *Elementi uniti di trasformazioni funzionali e problemi di valori ai limiti* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma, serie IV. vol. 2 (1938), pp. 255-275]. § 3.

In una Nota successiva ([3]) ho trattato lo stesso problema con $f(x, y, y')$ definita in un insieme del tipo

$$C: a \leq x \leq b, \quad \sigma(x) \leq y \leq \tau(x), \quad -\infty < y' < +\infty$$

e soddisfacente ad una conveniente diseguaglianza del tipo

$$| f(x, y, y') | \leq \psi(y) \varphi(y') + \chi(x).$$

A questo scopo mi sono servito di un ragionamento elementare che sfrutta il teorema ricordato e, previe alcune semplici modificazioni, una dimostrazione già svolta da SCORZA DRAGONI ([4]) in una questione del tutto analoga.

Lo stesso ragionamento si presta senza difficoltà a stabilire con una semplicità assoluta anche il seguente teorema, rilevato dal CINQUINI ([5]) :

La (1) *ammette almeno una soluzione se* $f(x, y, y')$, *ovunque finita nella solita striscia* S, *è continua rispetto a* (y, y'), *misurabile rispetto a* x; *se in ogni regione limitata di* S $f(x, y, y')$ *risulta minore in modulo di una conveniente funzione non negativa e sommabile in* $a \leq x \leq b$; *e se inoltre*

$$| f(x, y, y') | \leq \psi(y) \varphi(y') + \chi(x),$$

dove $\psi(u)$ *è non negativa e sommabile in* $-\infty < u < +\infty$ *e* $\chi(x)$ *in* $a \leq x \leq b$ *e dove* $\varphi(u)$ *è continua e positiva in* $-\infty < u < +\infty$, *con*

$$\int_0^{+\infty} \frac{u}{\varphi(u)} du = \int_0^{-\infty} \frac{u}{\varphi(u)} du = +\infty \tag{2}$$

e

$$| u | < K \varphi(u) \qquad (K = \text{cost.} > 0),$$

([3]) G. ZWIRNER: *Un criterio di esistenza per un problema di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova, questo volume].

([4]) Cfr. loc. cit. ([2]) pp. 268-275.

([5]) S. CINQUINI: *Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine* [Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. VIII (1939), pp. 271-283], pp. 272-276.

il rapporto $\frac{u}{\varphi(u)}$ *potendosi supporre non limitato quando è* $\chi(x) \equiv 0$.

In questa Nota mi propongo di sviluppare la dimostrazione cui ho alluso, la quale risulta, come è naturale, più semplice di quella che ho dato pel caso di $f(x, y, y')$ definita in C.

In un prossimo lavoro mi occuperò delle equazioni d'ordine superiore [6].

1. Se $y(x)$ è una qualunque funzione verificante la (1), dalla $|f(x, y, y')| \leq \psi(y)\varphi(y') + \chi(x)$, segue, quasi ovunque,

$$|y''(x)| \leq \psi(y(x))\,\varphi(y'(x)) + \chi(x)\,; \tag{3}$$

da cui, posto $K_1 = K\int_a^b \chi(x)\,dx$,

$$\int_{y(t_1)}^{y(t_2)} \psi(u)\,du \geq \pm \int_{y'(t_1)}^{y'(t_2)} \frac{u}{\varphi(u)}\,du - K_1\,, \tag{4}$$

$$\int_{y(t_1)}^{y(t_2)} \psi(u)\,du \leq \pm \int_{y'(t_1)}^{y'(t_2)} \frac{u}{\varphi(u)}\,du + K_1\,, \tag{5}$$

a seconda che in $t_1 \leq x \leq t_2$, con $t_1 < t_2$ punti di $a \leq x \leq b$, è $y'(x) \geq 0$ o $y'(x) \leq 0$.

Poichè $\psi(u)$ è non negativa e sommabile su tutto l'asse reale, gli integrali a primo membro delle (4), (5) risultano sempre minori in modulo di $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u)\,du$. Di qui, dalle (2) e dall'essere $y'(\xi) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$ in un conveniente punto ξ di $a < x < b$, si deduce [7]

[6] Di ciò ho già fatto cenno nel mio lavoro: *Problemi di valori ai limiti per equazioni differenziali ordinarie* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova, questo volume].

[7] Cfr. L. Tonelli: *Sull'equazione differenziale* $y'' = f(x, y, y')$ [Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. VIII (1939), pp. 76-88], n. 6, *c*); G. Zwirner: *Su un problema di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma, serie IV, vol. 3 (1939), pp. 57-70], pag. 59.

$$(6) \qquad |y'(x)| < \bar{H},$$

con $\bar{H}$ costante positiva dipendente soltanto da a, b, α, β, $\psi(u)$, $\varphi(u)$, $\chi(x)$ e non da $f(x, y, y')$. Dalla (6) si trae

$$(7) \qquad |y(x)| < H, \quad |y'(x)| < H,$$

se $H = |\alpha| + \bar{H}(b-a)$.

Sia ora $\lambda(x) \geq 0$ una funzione sommabile in $a \leq x \leq b$ tale che

$$|f(x, y, y')| < \lambda(x)$$

per $|y| < H$, $|y'| \leq H$, e poniamo

$$f_0(x, y, y') = f(x, y, y')$$

oppure

$$f_0(x, y, y') = \lambda(x), \quad f_0(x, y, y') = -\lambda(x),$$

a seconda che

$$|f(x, y, y')| \leq \lambda(x)$$

oppure

$$f(x, y, y') > \lambda(x), \quad f(x, y, y') < -\lambda(x),$$

di guisa che se $|y| \leq H$, $|y'| \leq H$, è $f_0(x, y, y') = f(x, y, y')$.

La funzione $f_0(x, y, y')$ così definita risulta evidentemente continua rispetto a (y, y') e misurabile rispetto a x in S, avendosi ivi inoltre

$$|f_0(x, y, y')| \leq \psi(y)\varphi(y') + \chi(x)$$

e

$$|f_0(x, y, y')| \leq \lambda(x).$$

Ma allora il problema

$$y''(x) = f_0(x, y(x), y'(x)), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

ammette almeno una soluzione, $y_0(x)$, assolutamente continua insieme alla sua derivata prima; $y_0(x)$ soddisfa, evidentemente, in tutto $a \leq x \leq b$, ad una diseguaglianza analoga alla (3) e quindi alle (7) ed è perciò anche un integrale dell'equazione (1).