RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

G. PALAMÀ

Su delle relazioni integrali relative ai polinomi di Laguerre e d'Hermite

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 10 (1939), p. 46-54

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1939__10__46_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SU DELLE RELAZIONI INTEGRALI RELATIVE AI POLINOMI DI LAGUERRE E D'HERMITE

Nota di G. Palamà (*a Lecce*).

In questa Nota, seguendo un ordine d'idee che se ben si riflette non differisce da altro già utilizzato in due precedenti lavori ([1]), si danno fra le altre le seguenti relazioni integrali

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} H_n^2(x)\, H_{2m}(ax)\, dx = a_{2m}\, 2^{2m}\, (2m)!\, \frac{\sqrt{\pi}}{a}, \quad 0 \leq m \leq n,$$

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} H_n^3(x)\, H_k(ax)\, dx = a_k\, 2^k\, k!\, \frac{\sqrt{\pi}}{a}, \quad 0 \leq k \leq 3n,$$

in cui a_{2m}, a_k sono calcolabili a mezzo di formule ricorrenti. Ma ciò che distingue buona parte di questo lavoro dagli altri due precedenti è la presenza nell'argomento di H_{2m}, H_k delle (1), (2) del parametro a. L'introduzione di tale parametro si è resa molto utile, perchè per dei valori particolari di esso le dette equazioni ricorrenti si semplificano notevolmente. Così ad es. se $a = \sqrt{2}$ il numero dei termini dell'equazione ricorrente che dà a_{2m}, che in generale è 3, si riduce a due e quindi si può immediatamente determinare il valore di a_{2m}.

In modo analogo si semplifica notevolmente l'equazione ricorrente relativa ad a_k, quando a assume i valori $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

Le (1) e (2) per $a = 1$ si riducono a formule già trovate ([2]).

([1]) D'Imminente pubblicazione rispettivamente negli « Annali » e nel Boll. dell' U. M. I.

([2]) Cfr. i lavori citati in ([1]).

1. Determiniamo la (1). Perciò osserviamo che $H_n^2(x)$, e $H_{2n}(ax)$ sono rispettivamente soluzioni delle seguenti equazioni ([3])

$$y''' - 6xy'' + 2(4x^2 + 2n - 1)y' - 8nxy = 0, \tag{3}$$

$$u''' - 2a^2xu'' + (4n - 2)a^2u' = 0 \tag{4}$$

l' ultima delle quali si ottiene derivando la

$$u'' - 2zu' + 4nu = 0$$

e ponendo poi $z = ax$.

Se mettiamo

$$\delta_n = \frac{d^3}{dx^3} - 6x\frac{d^2}{dx^2} + 2(4x^2 + 2n - 1)\frac{d}{dx} - 8nx,$$

$$\delta'_{2n} = \frac{d^3}{dx^3} - 2a^2x\frac{d^2}{dx^2} + (4n - 2)a^2\frac{d}{dx},$$

le (3) e (4) possono scriversi rispettivamente

$$\delta_n y = 0, \quad \delta'_{2n} u = 0.$$

Si ponga ora

$$H_n^2(x) = \sum_{s=0}^{n} a_{2s} H_{2s}(ax) \tag{5}$$

e si applichi poi ad ambo i membri di essa δ_n; utilizzando per il 2° membro l' operatore δ'_{2n} e la

$$H'_n(x) = -2nH_{n-1}(x),$$

si ricava

$$0 = \sum_{s=0}^{n} a_{2s} \{ 8a^2(a^2 - 3)\,2s(2s - 1)\,x H_{2s-2}(ax) -$$
$$- 4a \cdot 2s[4x^2 + 4n - 1 - (2s - 1)a^2] H_{2s-1}(ax) - 16nx H_{2s}(ax) \},$$

([3]) Cfr. per la prima di esse il detto lavoro degli « Annali ».

e da essa, per le

$$x\,H_n(x) = -n\,H_{n-1}(x) - \frac{1}{2}\,H_{n+1}(x)\,,$$

$$x^2 H_n(x) = n(n-1)\,H_{n-2}(x) + \frac{2n+1}{2}\,H_n(x) + \frac{1}{4}\,H_{n+2}(x)\,,$$

qualora si annulla poi il coefficiente di $H_{2s-1}(a\,x)$, si trae

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a}(2s+2)(2s+1)\,2s\,(a^2-1)(a^2-2)\,a_{2s+2} + \Big[3\,as\,(2s-1) - \\ -(4n-1)\,as + \frac{2s}{a}(2n-4s+1)\Big]\,a_{2s} + \frac{1}{a}(n-s+1)\,a_{2s-2} = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

che è l'equazione ricorrente con cui si può successivamente determinare a_{2n-2}, a_{2n-4}, ..., osservando che dalla (5), eguagliando i coefficienti della più alta potenza di x, si ha

$$a_{2n} = \frac{1}{a^{2n}} \tag{7}$$

e che è

$$a_{2n+2i} = 0\,, \quad i = 1,\ 2,\ldots \tag{8}$$

Se ora moltiplichiamo ambo i membri della (5) per

$$e^{-a^2x^2}\,H_{2m}(a\,x)\,d\,(a\,x)$$

ed integriamo poi fra $-\infty$, ∞ abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2}\,H_n^2(x)\,H_{2m}(ax)\,dx = \begin{cases} a_{2m}\,2^{2m}\,(2m)!\,\dfrac{\sqrt{\pi}}{a}\,, & 0 \leq m \leq n, \\ 0\,, & m > n \end{cases} \tag{9}$$

ove a_{2m} è dato dalla (6) tenendo presenti le (7), (8).

Quindi ponendo nella (9) per es. $m = n$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} H_n^2(x)\,H_{2n}(ax)\,dx = \left(\frac{2}{a}\right)^{2n}(2n)!\,\frac{\sqrt{\pi}}{a}\,. \tag{10}$$

Ma si noti che la (6) si semplifica notevolmente ponendovi $a^2 = 1$, $a^2 = 2$. Il 1° di questi casi è stato già studiato [4] e la (6) conduce per $a^2 = 1$ esattamente ai risultati trovati, nel 2° invece essa diventa

$$2s(2n - 2s + 1)a_{2s} = (n - s + 1)a_{2s-2}$$

che dà

$$(11) \qquad a_{2s} = \binom{n}{s} \frac{(2n - 2s - 1)!!}{(2n - 1)!!\, 2^s} a_0 .$$

Quindi la (5) può scriversi

$$H_n^2(x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \frac{(2n - 2s - 1)!!}{2^s} H_{2s}(x\sqrt{2}) ,$$

perchè è

$$(12) \qquad a_0 = (2n - 1)!! .$$

Dalla prima delle (9) a mezzo delle (11), (12) si trae

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} H_n^2(x)\, H_{2m}(x\sqrt{2})\, dx = \binom{n}{m} (2n - 2m - 1)!!\, 2^m (2m)! \sqrt{\frac{\pi}{2}} ,$$

con

$$0 \leq m \leq n .$$

2. Procedendo in modo analogo si perviene, tenuto presente che $H_n^2(x)$ è soluzione della [5]

$$y^{IV} - 12xy''' + 4(11x^2 + 5n - 2)y'' - 4x(12x^2 + 30n - 7)y' + \\ + 12n(12x^2 + 3n - 2)y = 0 ,$$

alla

$$(13) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} H_n^2(x)\, H_m(ax)\, dx = \begin{cases} a_m 2^m m! \dfrac{\sqrt{\pi}}{a}, & 0 \leq m \leq 3n \\ 0 , & m > 3n \end{cases}$$

(4) Cfr. « Annali » l. c.

(5) Cfr. Boll. dell' U. M. I., l. c.

ove a_m si calcola a mezzo della seguente formula ricorrente

$$
\begin{aligned}
(14)\quad & 4(s+4)(s+3)(s+2)(s+1)(a^2-1)(a^2-2)a^2-3)\,a_{s+4}+ \\
& +2(s+2)(s+1)[(10n-6s-4)a^4+2(11s-15n+9)a^2+ \\
& +18(n-s-1)]\,a_{s+2}+\{2s[11s-30n-4)a^2-18s]+ \\
& +3n[12s+6+a^2(3n-2)]\}\,a_s+3(3n-s+2)\,a_{s-2}=0\,,
\end{aligned}
$$

osservato che è

$$a_{3n}=\frac{1}{a^{3n}}\,,\qquad a_{3n+2i}=0\,,\qquad i=1,\,2,\ldots$$

Ma la (14) si semplifica notevolmente per dei valori particolari di a. Infatti per $a^2=2$, $a^2=3$ essa si riduce rispettivamente alle due seguenti

$$
\begin{aligned}
(15)\quad & 4(s+2)(s+1)(s-n+1)\,a_{s+2}+[4s(s-6n-2)+ \\
& +6n(3n+1)]\,a_s+3(3n-s+2)\,a_{s-2}=0\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(16)\quad & 4(s+2)(s+1)(3n-s)\,a_{s+2}+[s(5s-18n-4)+ \\
& +9n^2]\,a_s+(3n-s+2)\,a_{s-2}=0\,.
\end{aligned}
$$

Dalla (15) in particolare si trae

$$
\begin{aligned}
a_{3n-2} &= 3n(n+1)\,a_{3n}\,, \\
a_{3n-4} &= 3n(n-1)(3n^2+5n+6)\,\frac{1}{2}\,a_{3n}\,,
\end{aligned}
$$

essendo

$$a_{3n}=\frac{1}{2^{\frac{3n}{2}}}\,,$$

invece dalla (16) otteniamo

$$a_{3n-2}=\frac{6n}{3^{\frac{3n}{2}}}\,,\qquad a_{3n-4}=\frac{36n(n-1)}{3^{\frac{3n}{2}}}\,,$$

$$a_{3n-2s}=\frac{(s-1)!\;12\cdot n!}{(n-s+1)!}\left[(s-2)\,9n-2\binom{2s-1}{3}\right]\cdot\frac{1}{3^{\frac{3n}{2}}}\,,$$

valevole quest' ultima solamente per $s=3,\,4,\,5$.

Si noti infine che la (14) si semplifica anche per $a^2 = 1$, ma questo caso è stato già studiato ([6]).

3. L' integrale (10) e l' analogo che si trae dalla (13), possono così generalizzarsi:

$$(17) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2} H_n^m(x)\, H_{mn}(a x)\, dx = \left(\frac{2}{a}\right)^{mn} (m\, n)!\, \frac{\sqrt{\pi}}{a},$$

perchè basta porre

$$H_n^m(x) = \sum_{s=0}^{mn} a_s H_s(a x)$$

per ricavare immediatamente la (17).

4. Vogliamo notare che l' eleganza dei risultati cui si perviene con il metodo indicato dipende esclusivamente dal tipo della relazione analoga alla (5) che si pone a base dei calcoli successivi. Così se per es. si ponesse

$$(18) \qquad L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{s=0}^{n} a_s H_s(x),$$

si avrebbe per determinare gli a_s una relazione ricorrente alquanto complicata, perchè composta da quattro termini. Ma se invece si parte dalla

$$(19) \qquad L_n^{(\alpha)}(x^2) = \sum_{s=0}^{n} a_{2s} H_{2s}(x),$$

si ha infine la seguente semplice formula ricorrente per a_{2s}:

$$2\,(2\alpha + 2n - 2s + 1)\, s\, a_{2s} = -(n - s + 1)\, a_{2s-2},$$

([6]) Cfr. Boll. dell' U. M. I., l. c.

da cui si trae subito

$$a_{2s} = \frac{(-1)^s \binom{n}{s} \Gamma\left(\alpha + n - s + \frac{1}{2}\right) a_0}{2^{2s}\, \Gamma\left(\alpha + n + \frac{1}{2}\right)}$$

che permette di scrivere la (19) così:

$$L_n^{(\alpha)}(x^2) = \frac{1}{n!\, \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} \Gamma\left(\alpha + n - s + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2^{2s}} H_{2s}(x),$$

perchè è

$$a_0 = \frac{\Gamma\left(\alpha + n + \frac{1}{2}\right)}{n!\, \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}.$$

Pertanto la (18) dà ora

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} L_n^{(\alpha)}(x^2) H_{2k}(x)\, dx = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k \binom{n}{k} \Gamma\left(\alpha + n - k + \frac{1}{2}\right) (2k)! \sqrt{\pi}}{n!\, \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} & 0 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

5. Viceversa se si ponesse

$$H_{2n}(x) = \sum_{s=0}^{n} a_s L_s^{(\alpha)}(x^2)$$

ricaveremmo invece

$$H_{2n}(x) = \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s \Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right) 2^{2n} n!}{(n-s)!\, \Gamma\left(\alpha - n + s + \frac{3}{2}\right)} L_s^{(\alpha)}(x^2)$$

e quindi

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha H_{2n}(\sqrt{x}) L_k^{(\alpha)}(x) dx = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k \binom{n}{k} 2^{2n} \Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right) \Gamma(\alpha + k + 1)}{\Gamma\left(\alpha - n + k + \frac{3}{2}\right)}, & 0 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Si osservi che il precedente integrale è anche nullo se è

$$\alpha = \frac{2r - 1}{2}, \qquad r = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

ed r tale ancora da aversi

$$r \leq n - k - 1, \qquad \text{con} \quad k < n.$$

6. Notiamo infine la seguente immediata generalizzazione dei risultati stabiliti ai N. 4, 5.

Posto

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{s=0}^{n} a_s L_s^{(\beta)}(x), \tag{20}$$

si trova la seguente formula ricorrente:

$$\begin{aligned} &(\beta + s + 1)(\beta - \alpha - n + s + 1) a_{s+1} + \\ &+ [(\alpha - \beta) s + (n - s)(2s + \beta + 1)] a_s - (n - s + 1) a_{s-1} = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

per a_s, essendo

$$a_n = 1, \quad a_{n+i} = 0, \quad i = 1,\ 2, \ldots$$

Dalla (21) non è difficile trarre

$$a_{n-s} = \frac{(-1)^s \Gamma(\beta - \alpha + 1)}{s!\, \Gamma(\beta - \alpha - s + 1)}$$

la cui esattezza può dimostrarsi con il metodo d'induzione completa, quindi la (20), può scriversi

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^{n-s}\,\Gamma(\beta-\alpha+1)\,L_s^{(\beta)}(x)}{(n-s)!\,\Gamma(\beta-\alpha-n+s+1)},$$

che dà

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\beta L_n^{(\alpha)}(x)\, L_k^{(\beta)}(x)\, dx = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n-k}\,\Gamma(\beta-\alpha+1)\,\Gamma(\beta+k+1)}{(n-k)!\,\Gamma(\beta-\alpha-n+k+1)\,k!}, & 0 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Se $k = n$, si ha

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\beta L_n^{(\alpha)} L_n^{(\beta)}(x)\, dx = \frac{\Gamma(\beta+n+1)}{n!}$$

cioè lo stesso risultato di quello che si avrebbe qualora fosse $\alpha = \beta$.