Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Ugo Morin

Massima dimensione dei sistemi lineari di superficie algebriche dello spazio a curva caratteristica di dato genere

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 10 (1939), p. 21-34

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1939__10__21_0>

MASSIMA DIMENSIONE DEI SISTEMI LINEARI DI SUPERFICIE ALGEBRICHE DELLO SPAZIO A CURVA CARATTERISTICA DI DATO GENERE

di Ugo Morin *a Padova.*

Jung e Castelnuovo (¹) hanno trattato e risolto il problema della determinazione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere π e massima dimensione. In questa nota classifico i sistemi lineari di superficie algebriche dello spazio, a curva-caratteristica (variabile) irriducibile di dato genere π, e massima dimensione.

Si presenta opportuna la considerazione a parte dei *sistemi lineari di monoidi di 2ª specie e indice* q; cioè dei sistemi di superficie d'ordine m con un punto-base multiplo secondo $m-1$ (monoidi), la cui imagine sia una curva d'ordine q (punto fondamentale di 2ª specie).

Arrivo alla conclusione che la dimensione massima dei sistemi lineari di superficie è $r = 2\pi + 5$ se non sono sistemi di monoidi di 2ª specie, ed $r = 3\pi + 6 - 2q$, $(2q \leq \pi)$, se sono sistemi di monoidi di 2ª specie e indice q. Questi sistemi si possono suddividere in 6 tipi, di cui 5 esistono per ogni valore di π e sono a curva-caratteristica iperellittica (nn. 6, 7) e per uno, a curva-caratteristica non iperellittica, è $\pi = 6$, (n. 22).

(¹) Jung G., *Ricerche sui sistemi lineari di curve piane algebriche* [Annali di Mat. t. 15, 16 (2), (1887-88)].

Castelnuovo G., *Massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere* [Annali di Mat. t. 18 (2), (1890)].

1. Si abbia nello spazio lineare S_3 un sistema lineare *completo* di superficie Φ con la curva caratteristica (variabile) γ irriducibile e di genere (effettivo) π. Poichè i sistemi lineari di superficie a curva-caratteristica razionale o ellittica sono completamente conosciuti, supporremo $\pi \geq 2$. Se n è il grado del sistema $|\Phi|$ ed r la sua dimensione, quando è $r > \pi + 1$ il sistema Φ è semplice (tale essendo la serie caratteristica su una γ) ed inoltre

$$(1) \qquad r = n - \pi + 2.$$

Noi ci proponiamo di determinare il valore massimo che per un dato π può avere r, e di descrivere i sistemi lineari di superficie corrispondenti a questo valore. Vedremo che rispetto a questo problema si presenta naturale la suddivisione dei sistemi lineari di superficie in 2 classi (n. 6, 7).

2. Consideriamo la varietà algebrica imagine proiettiva di $|\Phi|$. Essa è una M_3^n, a 3 dimensioni e di ordine n, normale in uno spazio lineare S_r, a curve-sezioni C di genere π. Supponiamo che le C siano iperellittiche. Allora le superficie-sezioni F della M_3^n sono a curve-sezioni iperellittiche. Vogliamo ricordare le seguenti proprietà stabilite dal CASTELNUOVO (²).

Una superficie (non rigata) a curve-sezioni iperellittiche di genere $\pi \geq 2$:

a) contiene un fascio razionale di coniche C^2 (quindi è razionale);

b) ha l'ordine $n = 4\pi + 4 - \nu$, dove $\nu \geq 0$ è il numero delle coniche degeneri del fascio $|C^2|$;

c) si rappresenta nel piano mediante il sistema $|\Gamma|$ delle curve d'ordine $\pi + 3$ con un punto-base $(\pi + 1)$ - uplo, Ω, ordinario, un punto-base doppio e ν punti-base semplici; oppure mediante un sistema $|\Gamma|$ di curve d'ordine $2\pi - \mu + 2$ con un punto base Ω multiplo secondo $2\pi - \mu$, a cui sono infinitamente vicini $\pi - \mu$ punti doppi, e ν punti-base semplici.

(²) CASTELNUOVO G., *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche* [Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. 4 (1890)].

3. Verifichiamo che per $n \geq 3\pi + 2$ (e quindi la dimensione $\geq 2\pi + 3$) da *c*) segue che se due piani α e β di due coniche del fascio $|C^2|$ hanno in comune un punto P, tutte le coniche del fascio passano per P.

Si consideri infatti il sistema lineare $|\Gamma|$ rappresentativo della F in un piano ($\nu \leq \pi + 2$). Se i piani α e β sono incidenti in un punto, allora affinchè un iperpiano per α contenga anche β dovranno essere soddisfatte *due* condizioni.

Quindi (le Γ essendo di ordine m, n. 2), se consideriamo il sistema $|\Gamma^{m-1}|$, residuo del sistema $|\Gamma|$ rispetto ad una retta a per Ω (imagine della conica C^2 del piano α) e vogliamo che affinchè questo sistema contenga la retta b per Ω (imagine della conica C^2 del piano β) siano soddisfatte due condizioni, o il sistema $|\Gamma^{m-1}|$ dovrebbe subordinare sulla retta b una serie g_2^1, oppure il punto Ω dovrebbe essere per $|\Gamma^{m-1}|$ multiplo dell'ordine $m-2$.

La prima eventualità si esclude, poichè se essa si verificasse il sistema $|\Gamma^{m-1}|$ sarebbe composto con un'involuzione piana, ciò che è escluso poichè (dall'ipotesi $r \geq 2\pi + 3$ segue che) la sua dimensione è $r' \geq 2\pi$ e il suo genere è $\pi' = \pi - 1$ (³).

La seconda eventualità invece si verifica esclusivamente quando tutte le tangenti alle Γ nel punto Ω multiplo dell'ordine $m-2$ sono fisse, cioè questo punto è imagine di un punto P della F comune a tutte le coniche C^2, c. v. d.

4. Una M_3^n dell'S_r a curve-sezioni iperellittiche (che non sia generata da un fascio ellittico di piani, nel qual caso non è razionale ed ha l'irregolarità superficiale $= \pi$) contiene un fascio razionale di quadriche Q. Supponiamo

$$(2) \qquad r \geq 2\pi + 5\,, \quad \text{cioè} \quad n \geq 3\pi + 3\,.$$

Allora (n. 3) se gli S_3 di due quadriche Q hanno un punto P in comune, tutte le quadriche del fascio $|Q|$ passano per P.

(³) Quindi la serie-caratteristiche avendo dimensione maggiore della serie canonica, è semplice.

Verifichiamo che ciò nell'ipotesi (2) può verificarsi soltanto se le Q sono coni col vertice in P, e quindi la M_3^n stessa è un cono.

Se le Q non sono coni col vertice in P, questo punto è multiplo per la M_3^n dell'ordine $\pi + 1$, [4]. Le rette tangenti alla M_3^n in P, cioè i piani tangenti alle Q in P, formano dunque un cono K_3, dell'ordine $\pi + 1$. Poichè le rette delle Q per il punto P stanno a coppie nei piani del cono K_3, il cono K_2 da da esse generato ha l'ordine $\nu \geq \pi + 2$. Se la superficie-sezione F generica non è rigata, poichè essa contiene ν rette ($\nu =$ ordine di K_2) per il punto P, sarà (n. 2) $n = 4\pi + 4 - \nu \leq 3\pi + 2$; in contrasto coll'ipotesi (2).

Se le F per P sono *rigate*, poichè le loro curve-sezioni sono normali [5] esse sono coni col vertice in P, cioè la M_3^n stessa è un cono.

5. Se la M_3^n non è un cono, si potrà quindi proiettarla biunivocamente dall' S_3 di una quadrica del fascio $|Q|$ sopra uno spazio S_{r-4}. La proiezione sarà una varietà $M_3^{n_1}$, d'ordine $n_1 = n - 6$, a curve-sezioni di genere $\pi_1 = \pi - 2$. Infatti un'iperpiano dell' S_r per l'S_3 sega la M_3^n nella quadrica Q dell' S_3 e in una superficie F^{n-2}, d'ordine $n - 2$, a curve-sezioni di genere $\pi - 1$. Questa F^{n-2} ha in comune con la Q dell' S_3 una conica, dalla quale si proietta in una F^{n-6} a curve-sezioni di genere $\pi - 2$.

Poichè per la $M_3^{n_1}$ è ancora soddisfatta la disuguaglianza (2), si potrà a partire dall' S_3 di una sua Q ripetere l'operazione di proiezione, fino ad arrivare ad una varietà M_3^{*}:

a) non cono, a curve-sezioni razionali o ellittiche;

b) cono, a curve-sezioni iperellittiche di genere $\pi^* \geq 0$.

(4) Ciò risulta sia dalla considerazione del sistema lineare rappresentativo in un piano della superficie-sezione F per P (n. 2); sia osservando che da P la M_3^n si proietta sopra un S_{r-1} in una M_3 generata da un fascio razionale di piani, quindi di ordine $r - 3 = n - (\pi + 1)$.

(5) Infatti, se la F non è un cono, un S_{r-1} generico per una sua generatrice g sega la F ulteriormente in una curva irriducibile la quale, dovendo avere lo stesso genere π della rigata, apparterrà ad un S_{r-2}. Ma allora il fascio degli S_{r-1} per l' S_{r-2} è riferito proiettivamente alle g della F, cioè $\pi = 0$.

Nel caso b) la M_3^n contiene un fascio di coni (quadrici) i cui vertici generano un curva di un certo ordine i. Conveniamo di chiamare una tale M_3^* un *pseudo-cono di indice* i. In particolare dunque un pseudo-cono di indice 0 è un cono.

Se la M_3^* è, nell'ipotesi a), a curve-sezioni razionali (d'ordine $n^* = 2$), cioè una quadrica, poichè $\pi = 2q$ (cioè pari), sarà $n = 6q + n^* = 3\pi + n^* \leq 3\pi + 4$; cioè inferiore all'ipotesi (2).

Se la M_3^* è a curve-sezioni ellittiche d'ordine n^*, poichè $\pi = 2q + 1$ (cioè dispari) sarà

$$n = 6q + n^* = 3\pi + n^* - 3 . \tag{3}$$

Per raggiungere nella (3) un valore di n compatibile colla (2) bisogna fare $n^* = 6$. E non è possibile supporre $n^* > 6$ poichè una M_3^* di quell'ordine, a curve-sezioni ellittiche e non cono, non può contenere un fascio di quadriche [6].

6. Proviamo la effettiva esistenza di 3 tipi proiettivamente distinti di M_3^* in corrispondenza di $n^* = 6$; e diamone i relativi sistemi lineari rappresentati nell' S_3. Anzi noi proveremo l'esistenza delle M_3^* attraverso a quella dei loro sistemi rappresentativi.

Una M_3^* a curve-sezioni ellittiche d'ordine $n^* = 6$, contenente un fascio di quadriche e non conica, può essere rappresentata nell' S_3 da un sistema lineare di:

I) quadriche con 2 punti-base:

II) superficie cubiche con 3 rette-base sghembe;

III) superficie cubiche con un punto-base doppio O, una retta-base l per O, ed una conica-base C^2 appoggiata ad l [7].

In corrispondenza a queste M_3^* (n. 5) avremo *delle* M_3^* *dell'* S_3 , *a curve sezioni di genere* $\pi = 2q + 1$, *con*

$$r = 2\pi + 5 , \quad n = 3\pi + 3 . \tag{4}$$

[6] Enriques F., *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche* [Mathem. Annalen, t. 46 (1896)].

[7] Enriques F., loco cit. [6], (ho fatti degenerare alcuni degli elementi base ivi indicati, affinchè la M_3^* contenga un fascio di quadriche).

rappresentate nell' S_3 da un sistema lineare di superficie Φ :

I) *d'ordine* $q + 2$, *con 2 punti-base multipli d'ordine* $q + 1$;

II) *d' ordine* $q + 3$, *con 3 rette-base sghembe, di cui due semplici ed una multipla d' ordine* $q + 1$;

III) *d'ordine* $q + 3$, *con un punto-base O multiplo d'ordine* $q + 2$, *per esso una retta-base l multipla d' ordine* $q + 1$, *ed una conica-base semplice, appoggiata alla l.*

Infatti si passa dal sistema lineare delle $|\Phi|$, rappresentativo della M_3^n e al cui fascio di quadriche Q corrisponde un certo fascio di piani dell' S_3, costruendo il sistema residuo di Φ rispetto ad gruppo di q piani di quel fascio (e viceversa).

7. Supponiamo ora che la M_3^* sia un cono che dal vertice P proietta una superficie a curve–sezioni iperellittiche (ellittiche, razionali) di genere π^*, e di massima dimensione (n. 5, *b*). Indicati con r^* ed n^* la dimensione dello spazio d' appartenenza e l' ordine della M_3^*, sarà

$$r^* = 3\pi^* + 6\,, \quad n = 4\pi^* + 4\,; \tag{5}$$

per $\pi^* \geq 2$ in base al n. 2; per $\pi^* = 1$ in quanto il cono a curve–sezioni ellittiche e di ordine massimo, che contiene un fascio di quadriche, è dell' 8° ordine; per $\pi^* = 0$ poichè da P si proietterà una superficie di Veronese, oppure una rigata del 4° ordine (che contiene un fascio di coniche).

La M_3^* è rappresentata nell' S_3 da un sistema lineare di superficie d' ordine m, con un punto-base O multiplo dell' ordine $m - 1$ ed $m - 1$ rette-base infinitesime nei successivi intorni infinitesimali di O (cioè aventi in O un unico piano tangente fisso); ed inoltre in un piano generico α

I) per $m = \pi^* + 3$: un punto-base Ω multiplo secondo $\pi^* + 1$ ed un punto-base doppio;

II) per $m = 2\pi^* - \mu + 2$, $(\mu \leq \pi^*)$: un bunto-base Ω multiplo secondo $2\pi^* - \mu$, a cui sono infinitamente vicini $\pi^* - \mu$ punti doppi.

Infatti se nel piano affine (x, y) la superficie-sezione F del cono M_3^* è rappresentata dal sistema lineare di curve di equazione $f(x, y) = 0$ (n. 2), M_3^* sarà rappresentato nello spazio affine (x, y, z) da $az + f(x, y) = 0$.

Per la corrispondente M_3^* *sarà quindi, posto* $2q = \pi - \pi^*$, *cioè* $\pi = \pi^* + 2q$:

$$(6) \quad \begin{cases} r = 4q + 3\pi^* + 6 = 3\pi + 6 - 2q = 2\pi + 6 + \pi^* \\ n = 6q + 4\pi^* + 4 = 4\pi + 4 - 2q = 3\pi + 4 + \pi^*, \end{cases}$$

ed essa è rappresentata nell' S_3 *da un sistema lineare di superficie* Φ *d'ordine* $m + q$, *con un punto-base* O *multiplo dell'ordine* $m + q - 1$ *ed* $m - 1$ *rette-base infinitesime nei suoi successivi intorni infinitesimali; ed inoltre in un piano generico* α

I) *per* $m = \pi^* + 3$: *un punto-base* Ω *multiplo secondo* $\pi^* + q + 1$ *ed un punto-base doppio*;

II) *per* $m = 2\pi^* - \mu + 2$, $(\mu \leq \pi^*)$: *un punto-base* Ω *multiplo secondo* $2\pi^* - \mu + q$, *a cui sono infinitamente vicini* $\pi^* - \mu$ *punti doppi.*

La retta $O\Omega$ viene ad avere per le Φ^{m+q} la molteplicità effettiva $m + q - 2$, e le quadriche Q corrispondenti ai piani per la retta $O\Omega$ sono coni, i cui vertici descrivono una curva d'ordine q, imagine del punto O. Cioè le M_3^n *sono pseudo-coni di indice* q (n. 5).

Questi sistemi lineari di superficie Φ^{m+q} con un punto-base O multiplo dell'ordine $m + q - 1$ (monoidi), la cui imagine è una curva (punto fondamentale di 2ª specie) verranno detti *sistemi lineari di monoidi di 2ª specie di indice* q.

8. Studiamo ora le M_3^n normali dell' S_r a curve-sezioni non iperellittiche $(\pi > 2)$, per le quali i valori di r ed n possono raggiungere (od eventualmente superare) i valori massimi (4) o (6).

Per garantire la razionalità della M_3^n è sufficiente che supponiamo *nulla* la sua irregolarità superficiale [8]. Infatti, poichè

[8] Severi F., *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* [Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. 28 1909)].

$n > 2\pi - 2$, la superficie-sezione F è allora, in base ad un teorema di CASTELNUOVO e ENRIQUES [9] razionale, ed una M_3^n a superficie-sezioni F razionali e di ordine $n > 3$ è razionale [10]. La M_3^n essendo dunque razionale, le sue superficie-sezioni F e le sue curve-sezioni C saranno normali, cioè (n. 1)

$$r = n - \pi + 2\,. \tag{7}$$

9. Consideriamo di una superficie-sezione F generica la rappresentazione sopra un piano α mediante un sistema lineare di curve $|\Gamma|$, di un certo ordine m, di dimensione $r \geq 2\pi + 5$. Il sistema lineare $|\Gamma'|$, aggiunto puro di $|\Gamma|$, è formato da curve d'ordine $m' \leq m - 3$ le quali nei punti base P_i $(i = 1, \ldots h)$ di $|\Gamma|$, di molteplicità ν_i, hanno molteplicità $\nu'_i \leq \nu_i - 1$. Il sistema lineare di curve Γ^*, d'ordine $m^* = m - m'$ e che nei punti P_i hanno le molteplicità virtuati $\nu_i - \nu'_i$, si dice *sistema residuo* di $|\Gamma|$ rispetto $|\Gamma'|$, e si può scrivere

$$|\Gamma| = |\Gamma'| + |\Gamma^*|\,. \tag{8}$$

Poichè è $r \geq 2\pi + 5$, la dimensione virtuale di $|\Gamma^*|$ è $r^* > 0$. Da una ricerca del CASTELNUOVO [11] risulta allora che il sistema $|\Gamma^*|$ è regolare e che il suo genere (virtuale = effettivo) è 1. Se la generica Γ^* è irriducibile, il sistema di curve ellittiche $|\Gamma^*|$ ha dunque la dimensione effettiva $r^* \leq 9$. Se $|\Gamma^*|$ è riducibile, il sistema si spezza (in virtù della sua regolarità e del teorema di BERTINI sui sistemi riducibili) in una curva fissa e in un sistema irriducibile $|\gamma^*|$ di dimensione effettiva $r^* \leq 8$ [12], (la γ^* potendo anche essere razionale).

[9] CASTELNUOVO - ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une varieté algebriques a plusieurs dimensions* [Annales Sc. de École Nat. supr. (Paris) t. 23 (3), 1906)].

[10] FANO G., *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali* [Annali di Mat. t. 24 (3), (1915)].

[11] CASTELNUOVO G., *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* [Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, t. 42 (2), (1891)].

[12] CASTELNUOVO G., loco cit. [11].

10. Vogliamo mostrare che se γ^* è razionale, non è solamente $r^* \leq 8$, ma addirittura $r^* \leq 5$. Cominciamo perciò con ricordare il seguente lemma del CASTELNUOVO sui sistemi riducibili [13] : Se le curve d'ordine m che passano colle molteplicità virtuali $\nu_1, \ldots \nu_h$ per certi h punti del piano, formano un *sistema ridubile* di dimensione virtuale ≥ 1, avente il genere effettivo uguale al genere virtuale, le curve d'ordine m passanti colle molteplicità virtuali $\nu_1, \ldots \nu_h$ per h punti presi in posizione generica nel piano, formano un sistema irriducibile.

11. Se consideriamo in un piano α_1 un sistema di curve Γ_1^*, d'ordine m^*, che nei punti base P_{1i}, in posizione generica, hanno le molteplicità $\nu_i - \nu_i'$ (n. 9), queste curve saranno (in base al precedente lemma) irriducibili e ellittiche. Supponiamo che Γ_1^* abbia la dimensione $r^* \neq 8$. Consideriamo allora una certa trasformazione cremeniana Ω che trasforma Γ_1^* in un sistema lineare di cubiche di un piano α_2, con $9 - r^*$ punti-base.

Al sistema lineare di tutte le cubiche del piano α_2 corrisponde nella Ω^{-1} un sistema di curve ellittiche $\overline{\Gamma}_1^*$, di dimensione $\overline{r}^* = 9$ e di ordine $\overline{m}^* \geq m^*$, che contiene parzialmente il sistema Γ_1^*. Possiamo quindi dire che il gruppo dei punti base $\overline{P}_{1i}$ di $|\overline{\Gamma}_1^*|$ è sovrapposto al gruppo dei punti-base P_{1i} di $|\Gamma_1^*|$.

Consideriamo ora il sistema di curve $\overline{\Gamma}^*$ del piano α, d'ordine $\overline{m}^*$, col gruppo di punti base $\overline{P}_i$ sovrapposto al gruppo dei punti-base P_i di Γ^*. Poichè il genere di $\overline{\Gamma}^*$ è 1 e la sua dimensione è 9, $|\overline{\Gamma}^*|$ è irriducibile (n. 9). $|\overline{\Gamma}^*|$ contiene parzialmente $|\gamma^*|$. Inoltre $|\overline{\Gamma}^*|$ si può trasformare cremonianamente nel sistema delle cubiche, che conterrà parzialmente il sistema di curve razionali trasformato di $|\gamma^*|$; dunque la dimensione effettiva di γ^* è $r^* \leq 5$, c. v. d.

12. Possiamo infine constatare che non si può verificare il caso escluso di $r^* = 8$. Infatti, imponendo al sistema $|\Gamma|$, e

[13] CASTELNUOVO G., loco cit. [11].

quindi al sistema Γ^*, un punto-base semplice P in posizione generica, si otterrebbe un sistema nella situazione del n. precedente, per cui dunque $r^* - 1 \leq 5$, in contrasto coll'ipotesi $r^* = 8$.

13. Ai sistemi lineari $|\Gamma|$, $|\Gamma'|$ e $|\Gamma^*|$ di α corrispondono nella superficie-sezione F i sistemi lineari $|C|$, $|C'|$ e $|C^*|$, $|C|$ essendo il sistema delle curve-sezioni, tali che

$$(9) \qquad |C| = |C'| + |C^*|.$$

Poichè la generica C' è irriducibile (C non essendo iperellittica), il sistema $|C^*|$ determina su una C' una serie lineari di punti la quale (se non è speciale e se C' non è contenuto in $|C^*|$) ha la dimensione r^* e quindi l'ordine

$$(10) \qquad \mu \geq \pi' + r^*.$$

Se la serie fosse speciale, sarebbe $r^* \leq \pi'$.

Se C' è contenuta in $|C^*|$ potrà essere $\pi' = 1$ oppure $\pi' = 0$. Se è $\pi' = 1$, sarà $\mu \geq r^*$.

Si osservi inoltre che se la C^* è ellittica essa è certamente *normale*. Infatti i punti-base di $|\Gamma|$ appartengono tutti ad una Γ^*, quindi determinano su essa una serie completa.

14. Ritorniamo alla considerazione della M_3^n dell' S_r, $r \geq 2\pi + 5$ (n. 8). Il sistema $|F + F'|$, aggiunto al sistema $|2F|$, depurato dalle eventuali componenti fisse, determina su una F il sistema $|C'|$ aggiunto a $|C|$, ([14]).

Lo spazio d'appartenenza $S_{r'}$ della $(F + F')$, di dimensione $r' \leq 2\pi - \pi' - 1$, potrà segare la M_3^n soltanto nella $(F + F')$, d'ordine $2\pi - 2$ e a curve-sezioni di genere π'; oppure potrà segarla inoltre in una superficie f, la quale apparterrà allora a tutti gli spazi $S_{r'}$ (in quanto la curva-sezione della f con una F è una componente fissa del sistema aggiunto impuro di $|C|$).

Un S_{r-1} generico per l' $S_{r'}$ sega la M_3^n (oltre che nelle $(F + F')$ e f) in una superficie Ψ, le cui curve-sezioni sono le C^* delle F (n. 13). La Ψ è quindi a curve-sezioni ellittiche

([14]) Fano G., loco cit. ([10]).

o razionali (n. 9). La dimensione del sistema $|\Psi|$ è uguale a quello del sistema $|C^*|$ di una F, cioè r^* (n. 15).

Risulta quindi

$$r = r' + r^* + 1 \leq 2\pi - \pi' + r^* . \tag{11}$$

15. Se la serie di punti determinata da $|C^*|$ su una C' fosse speciale, quindi $r^* \leq \pi'$ (n. 13), dalla (11) segue $r \leq 2\pi - \pi' + \pi'$, in contrasto all'ipotesi $r \geq 2\pi + 5$. Questa eventualità verrà quindi nel seguito esclusa.

La $(F + F')$ e una Ψ hanno in comune una curva C^{μ}, d'ordine μ (n. 13). Un iperpiano generico $\overline{S}_{r-1}$ per la $(F + F')$ sega la Ψ (oltre che nella componente fissa C^{μ}) in una curva comune alla Ψ e alla $\overline{\Psi}$ contenuta nell'$\overline{S}_{r-1}$. L'ordine di questa curva è quindi uguale all'ordine della serie caratteristica del sistema $|C^*|$ di una F, cioè r^* oppure $r^* - 1$ (a seconda che la componente variabile di $|C^*|$ è ellittica oppure razionale, n. 9). Quindi l'ordine ν della Ψ è

$$\nu \geq \mu + r^*, \quad \text{oppure} \quad \nu \geq \mu + r^* - 1 . \tag{12}$$

16. Se la generica Ψ è non rigata e a curve-sezioni razionali il suo ordine è (come noto) $\nu = 4 - \varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$.

Dal n. 13 e dalla (12) segue che in questo caso è $\nu \geq 2r^* - 2$. Quindi $2r^* - 2 \leq 4 - \nu$, cioè $r^* \leq 3 - \frac{\varepsilon}{2}$; ed infine dalla (11) $r \leq 2\pi + 3$; in contrasto coll'ipotesi (4).

17. Supponiamo Ψ a curve-sezioni ellittiche e $\pi' \geq 1$. Allora dal n. 13 e dalla (12) segue $2r^* \leq 9 - \varepsilon$, cioè $r^* \leq 4$. Quindi dalla (11) $r = 2\pi - \pi' + r^* = 2\pi + 3$, in contrasto coll'ipotesi (4).

18. Supponiamo Ψ a curve-sezioni ellittiche e $\pi' = 0$. Allora dal n. 13 e dalla (12) segue $2r^* - 1 \leq 9 - \varepsilon$, cioè $r^* \leq 5 - \frac{\varepsilon}{2}$. Perchè risulti $r \geq 2\pi + 5$, dovrebbe essere $\varepsilon = 0$, cioè $\nu = 9$. Ma la curva comune a Ψ e $\overline{\Psi}$ avrebbe l'ordine

$r^* = 5$, mentre in una Ψ (rappresentata nel piano dal sistema lineare di tutte le cubiche) non esistono curve del 5° ordine.

19. Supponiamo Ψ rigata a curve-sezioni ellittiche. Ora una rigata ellittica a curve-sezioni normali (n. 13) è necessariamente un cono ([15]); e allora (la dimensione di $|\Psi|$ essendo $r^* \geq 5$), la M_3^n stessa è un cono (il cui ordine, la F non essendo a curve-sezioni iperellittiche, è $n < 3\pi + 4$).

20. Supponiamo infine che le Ψ siano rigate a curve-sezioni razionali. Dal n. 10 sappiamo che è $r^* \leq 5$. Quindi la (11) dà $r \leq 2\pi - \pi' + 5$. L'unico caso che ci interessa, in relazione alla limitazione $r \geq 2\pi + 5$, è $\pi' = 0$, $r^* = 5$.

In questo caso la superficie-sezione F si può rappresentare in un piano α mediante il sistema di curve d'ordine m, $|\Gamma| = |\Gamma'| + |\Gamma^*|$, dove $|\Gamma^*|$ si spezza in una retta λ per i quattro punti-base P_1, P_2, P_3, P_4 di $|\Gamma|$ e nel sistema di tutte le coniche γ^* del piano (n. 11). Indichiamo con ν_i la molteplicità del punto-base P_i, $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \nu_3 \geq \nu_4$. Sarà

$$(13) \qquad \sum_{1}^{4}{}_i\, \nu_i = m - \nu, \qquad (\nu \geq 0).$$

Le curve Γ', d'ordine $m - 3$, hanno i punti-base P_i multipli rispettivamente dell'ordine $\nu_i - 1$. Poniamo $\mu = m - 3$, $\mu_i = \nu_i - 1 \geq 0$, quindi

$$(14) \qquad \sum_{1}^{4}{}_i\, \mu_i = \mu - 1 - \nu.$$

Poichè Γ' è razionale sarà

$$(15) \qquad (\mu - 1)(\mu - 2) = \sum_{1}^{4}{}_i\, \mu_i(\mu_i - 1).$$

Eliminando μ dalle (14) e (15) si trova

$$(16) \qquad \sum_{1}^{4}{}_{ij}\, \mu_i \mu_j + 2\nu \sum_{1}^{4}{}_i\, \mu_i + \nu(\nu - 1) = 0, \qquad (j \neq i).$$

([15]) Vedi cit. ([5]).

21. Se nella (16) è $\nu = 0$, sarà $\mu_1 > 0$ e $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$. Quindi, dalla (13), $\nu_1 = m - 3$, $\nu_2 = \nu_2 = \nu_4 = 1$. Se nella (16) è $\nu = 1$, dovranno essere nulli tutti i μ_i, cioè $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 1$. Infine $\nu > 1$ non è compatibile con la (16).

Nel caso $\nu = 0$, il sistema $|\Gamma|$ è dunque un sistema di curve d'ordine $m \geq 4$ con un punto-base P_1 multiplo d'ordine $m - 3$ e tre punti-base P_2, P_3, P_4 appartenenti a una medesima retta λ. A questa retta λ fondamentale di $|\Gamma|$ corrisponde un punto triplo L^3 della F. Il grado n di $|\Gamma|$, cioè l'ordine della F, si calcola direttamente, $n = 3\pi + 3$. Cioè la dimensione dell'S_r della M_3^n è $r = 2\pi + 5$.

Al variare della F il punto triplo L^3 descrive una retta tripla l^3 della M_3^n. Le rette della rigata M_3^n che passano per un punto L^3 della l^3 formano un cono cubico K_2^3 (segato da una F per L^3 nelle 3 rette che nella rappresentazione piana della F hanno per imagini i punti base P_2, P_3, P_4).

La nostra M_3^n è dunque un pseudo-cono di indice 1, e poichè il suo ordine $n = 3\pi + 3$ è inferiore all'ordine massimo $4\pi + 2$ $(\pi \geq 3)$ spettante ad un pseudo-cono di indice 1 (n. 7), noi la scarteremo dalla nostra considerazione (quantunque sia facile provare l'esistenza di una tale M_3^n).

22. Supponiamo ora che nella (16) sia $\nu = 1$. Allora dalla (13) segue che $|\Gamma|$ è un sistema di curve del 5° ordine con 4 punti-base su una retta λ.

Il grado di $|\Gamma|$ è $n = 21$ e il genere $\pi = 6$. Per la M_3^n dell'S_r è quindi $n = 3\pi + 3 = 21$, $r = 2\pi + 5 = 17$.

Alla retta λ del piano α corrisponde nella superficie-sezione F una retta semplice l la quale, al variare della F, descrive un piano S_2 semplice della M_3^{21}. Questo piano è un piano direttore della rigata M_3^{21}. Le rette della M_3^{21} che si appoggiano ad una retta l dell'S_2 generano una superficie rigata R^5, del 5° ordine. Un S_{16} dell'S_{17} generico per l'R^5 taglia la M_3^{21} ulteriormente in una superficie F^{16}, d'ordine 16, a curve-sezioni di genere 3. La F^{16} è quindi rappresentata nel piano dal sistema di tutte le quartiche, e su essa è individuata una rete omaloidica di C^4 normali del 4° ordine.

Le rette della M_3^{21} stabiliscono una corrispondenza birazionale tra il piano S_2 e la F^{16} (d' un S_{14}) nella quale alle rette del piano S_2 corrispondono le C^4 della F^{16} (e viceversa).

Questa M_3^{21} si proietta semplicemente dall' S_{13} di una curva-sezione C^{16} della F^{16} sopra un S_3. Come sistema lineare di superficie rappresentativo della M_3^{21} nell' S_3 si ottiene così il *sistema delle superficie del 5° ordine con un punto base quadruplo e una quartica base di genere 3 (eventualmente degenere).*