RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

Su un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del quarto ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 9 (1938), p. 150-155

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1938__9__150_0>

SU UN PROBLEMA DI VALORI AI LIMITI PER LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL QUARTO ORDINE

di GIUSEPPE ZWIRNER *a Padova.*

In questa Nota dò una nuova dimostrazione per la esistenza delle soluzioni del problema ai limiti

$$(1)\qquad \begin{aligned} & y^{IV}(x) = f(x,\ y(x),\ y'(x),\ y''(x),\ y'''(x))\,, \\ & y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0\,;\quad y(x_1) = y_1,\ y'(x_1) = y'_1\,, \end{aligned}$$

dove $f(x, y, y', y'', y''')$ è continua e limitata [1] per y, y', y'', y''' qualunque e $x_0 \leq x \leq x_1$, mentre y_0, y'_0, y_1, y'_1 sono numeri arbitrariamente prefissati.

Questo teorema rientra come caso particolare in una proposizione di CACCIOPPOLI [2]. La risposta data dal CACCIOPPOLI è affermativa. La dimostrazione invoca teoremi sui punti uniti di trasformazioni di spazi ad un numero qualunque di dimensioni, ma non presuppone nessuna conoscenza sulle soluzioni dell'equazione

$$(2)\qquad y^{IV}(x) = f(x,\ y(x),\ y'(x),\ y''(x),\ y'''(x))\,.$$

(1) Più generalmente si dovrebbe poter supporre la f continua rispetto a y, y', y'', y''' e misurabile rispetto ad x con $|f|$ minore di una funzione positiva $\chi(x)$ sommabile in $x_0 \leq x \leq x_1$.

(2) R. CACCIOPPOLI, *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un' osservazione sui problemi di valori ai limiti* [Atti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, serie 6, vol. 13 (1931) pp. 498-502]. Cfr. BIRKHOFF e KELLOG, *Invariants points in function space* [Transactions of the American mathematical Society, vol. 23 (1922), pp. 96-115], pag. 109.

Le soluzioni della (2) si possono definire in tutto (x_0, x_1). Fissatane una $y(x)$ verificante le condizioni $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ e posto

$$\xi = y''(x_0), \qquad \eta = y'''(x_0);$$
$$\sigma = y(x_1) - y_1, \quad \tau = y'(x_1) - y'_1,$$

si viene a definire una trasformazione T del piano $\pi \equiv (\xi, \eta)$ nel piano $\rho \equiv (\sigma, \tau)$. Si tratta di far vedere che l'immagine di π contiene l'origine di ρ.

Supporremo dapprima la $f(x, y, y', y'', y''')$ lipschitziana rispetto a y, y', y'', y'''. Allora T è univoca e rappresentabile con formule del tipo

$$\sigma = \varphi(\xi, \eta), \quad \tau = \psi(\xi, \eta), \tag{3}$$

dove $\varphi(\xi, \eta)$ e $\psi(\xi, \eta)$ sono funzioni continue e ad un sol valore in tutto π. La questione si traduce quindi nel dimostrare che le

$$\varphi(\xi, \eta) = 0, \quad \psi(\xi, \eta) = 0$$

sono risolubili. Per ciò basta, come è notorio (3), far vedere che l'origine O' di ρ è d'ordine diverso da zero rispetto a una curva γ' immagine, nella T, di una curva semplice, chiusa γ di π.

La condizione di Lipschitz si elimina poi facilmente con procedimenti noti.

La questione quindi si esaurisce mantenendosi nell'ambito della topologia piana (4).

1. Sia $f(x, y, y', y'', y''')$ una funzione reale, delle variabili reali x, y, y', y'', y''', continua e limitata nello strato

$$S: \quad x_0 \leq x \leq x_1,$$
$$|y| < +\infty, \quad |y'| < +\infty, \quad |y''| < +\infty, \quad |y'''| < +\infty,$$

(3) B. v. Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie* [Julius Springer, Berlin, 1923], pag. 83 e segg. e pag. 196.

(4) Il procedimento non sembra legato al carattere bidimensionale del problema, a patto di ricorrere alla nozione di ordine di un punto rispetto ad una varietà.

e lipschitziana rispetto a y, y', y'', y''' in ogni porzione limitata di S.

Dimostriamo allora che il problema (1) *ammette soluzioni.*

2. Sia $y = y(x)$ un integrale della (2) che verifica le condizioni $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Tale integrale si puo definire in tutto l'intervallo chiuso $x_0 \leq x \leq x_1$. Sia m un numero per il quale si abbia

$$|f(x, y, y', y'', y''')| < m .$$

Allora

$$y'(x_1) < y'_0 + (x_1 - x_0)\, y''(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2!}\, y'''(x_0) + m\,\frac{(x_1 - x_0)^3}{3!};$$

$$y'(x_1) > y'_0 + (x_1 - x_0)\, y''(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2!}\, y'''(x_0) - m\,\frac{(x_1 - x_0)^3}{3!};$$

$$y(x_1) < y_0 + (x_1 - x_0)\, y'_0 + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2!}\, y''(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^3}{3!}\, y'''(x_0) + m\,\frac{(x_1 - x_0)^4}{4!};$$

$$y(x_1) > y_0 + (x_1 - x_0)\, y'_0 + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2!}\, y''(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^3}{3!}\, y'''(x_0) - m\,\frac{(x_1 - x_0)^4}{4!}.$$

Diciamo ora: t, t', r, r' le rette di π le cui equazioni sono rispettivamente

$$(x_1 - x_0)\,\xi + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2!}\,\eta + y'_0 + m\,\frac{(x_1 - x_0)^3}{3!} = y'_1;$$

$$(x_1 - x_0)\,\xi + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2!}\,\eta + y'_0 - m\,\frac{(x_1 - x_0)^3}{3!} = y'_1;$$

$$\frac{(x_1 - x_0)^2}{2!}\,\xi + \frac{(x_1 - x_0)^3}{3!}\,\eta + (x_1 - x_0)\, y'_0 + y_0 + m\,\frac{(x_1 - x_0)^4}{4!} = y_1;$$

$$\frac{(x_1 - x_0)^2}{2!}\,\xi + \frac{(x_1 - x_0)^3}{3!}\,\eta + (x_1 - x_0)\, y'_0 + y_0 - m\,\frac{(x_1 - x_0)^4}{4!} = y_1;$$

$A \equiv (\xi_1, \eta_1)$ e $C \equiv (\xi_2, \eta_2)$ sieno rispettivamente i punti d'intersezione delle rette t', r e t, r', di guisa che

$$\xi_1 = -\frac{7}{12} m (x_1 - x_0)^2 - 2 \frac{y_1' + 2 y_0'}{x_1 - x_0} + 6 \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)^2},$$

$$\eta_1 = \frac{3}{2} m (x_1 - x_0) + 6 \frac{y_1' + y_0'}{(x_1 - x_0)^2} - 12 \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)^3};$$

$$\xi_2 = \frac{7}{12} m (x_1 - x_0)^2 - 2 \frac{y_1' + 2 y_0'}{x_1 - x_0} + 6 \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)^2},$$

$$\eta_2 = -\frac{3}{2} m (x_1 - x_0) + 6 \frac{y_1' + y_0'}{(x_1 - x_0)^2} - 12 \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)^3}.$$

Si consideri poi il rettangolo $ABCD$ con $B \equiv (\xi_2, \eta_1)$, $D \equiv (\xi_1, \eta_2)$; se ne dica γ il perimetro e γ' sia la trasformata di γ mediante le (3).

Dimostriamo allora che γ' non passa per O' e che l'ordine di O' rispetto a γ' è 1.

A tale scopo sieno A', B', C', D' e $\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3', \gamma_4'$ rispettivamente gli omologhi nella T dei punti A, B, C, D e dei segmenti $\gamma_1 = AB$, $\gamma_2 = BC$, $\gamma_3 = CD$, $\gamma_4 = DA$. Allora si vede facilmente che gli archi $\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3', \gamma_4'$ sono contenuti rispettivamente nell'*interno* dei rettangoli

$$-\frac{1}{12} m (x_1 - x_0)^4 \leq \sigma \leq \frac{7}{12} m (x_1 - x_0)^4,$$
$$0 \leq \tau \leq \frac{3}{2} m (x_1 - x_0)^3;$$

$$0 \leq \sigma \leq \frac{7}{12} m (x_1 - x_0)^4,$$
$$-\frac{1}{3} m (x_1 - x_0)^3 \leq \tau \leq \frac{3}{2} m (x_1 - x_0)^3;$$

$$-\frac{7}{12} m (x_1 - x_0)^4 \leq \sigma \leq \frac{1}{12} m (x_1 - x_0)^4,$$
$$-\frac{3}{2} m (x_1 - x_0)^3 \leq \tau \leq 0;$$

$$-\frac{7}{12}m(x_1-x_0)^4 \leq \sigma \leq 0 \ ,$$

$$-\frac{3}{2}m(x_1-x_0)^3 \leq \tau \leq \frac{1}{3}m(x_1-x_0)^3 \ .$$

Ne segue in particolare

$$\varphi(\xi_1, \eta_1) < 0 \ , \ \psi(\xi_1, \eta_1) > 0 \ ; \quad \varphi(\xi_2, \eta_1) > 0 \ , \ \psi(\xi_2, \eta_1) > 0 \ ;$$

$$\varphi(\xi_2, \eta_2) > 0 \ , \ \psi(\xi_2, \eta_2) < 0 \ ; \quad \varphi(\xi_1, \eta_2) < 0 \ , \ \psi(\xi_1, \eta_2) < 0 \ .$$

Se M'_1 è il punto di γ'_1 corrispondente al punto $M_1 \equiv (\xi, \eta_1)$ di γ_1, rappresenteremo con $[\xi, \eta_1]_{0'}$ l'angolo di cui bisogna far ruotare la semiretta $O'A'$ per sovrapporsi, senza incontrare l'asse σ, alla semiretta $O'M'$. Sarà allora

$$[\xi_2, \eta_1]_{0'} = A'\widehat{O'}B' \ ,$$

dove $A'\widehat{O'}B'$ indica l'angolo acuto formato dalle semirette $O'A'$, $0'B'$. Quest'angolo rappresenta quindi (in valore assoluto) la variazione dell'angolo acuto $A'O'M'_1$ quando M_1 descrive γ_1 a partire da A (5).

Ragionando in modo analogo sugli archi $\gamma'_2, \gamma'_3, \gamma'_4$ si trova, evidentemente, che se M è il punto corrente di γ ed M' il suo corrispondente su γ', la variazione subita dall'angolo $A'\widehat{O'}M'$ (al variare di M su γ a partire da A e in un verso conveniente) è uguale a 2π; cioè l'ordine di O' rispetto a γ' è uguale ad 1.

In $ABCD$ esiste quindi un punto (ξ_0, η_0) tale che la soluzione della (2) verificante le

$$y(x_0) = y_0 \ , \quad y'(x_0) = y'_0 \ , \quad y''(x_0) = \xi_0 \ , \quad y'''(x_0) = \eta_0$$

soddisfaccia alle

$$y(x_1) = y_1 \ , \quad y'(x_1) = y'_1 \ .$$

(5) J. Tannery, *Théorie des fonctions d'une variable* [Paris, A. Hermann, 1910], vol. II, pag. 173.

Inoltre in quanto precede è implicito anche che

$$|y(x)| \leq H, \quad |y'(x)| \leq H, \quad |y''(x)| \leq H, \quad |y'''(x)| \leq H,$$

con H costante opportuna dipendente solo da $m, y_0, y'_0, y_1, y'_1, x_0, x_1$. Di qui segue, mediante noti procedimenti di approssimazione, che la condizione di Lipschitz può essere soppressa senza che il teorema dimostrato perda la sua validità.