

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANNIBALE COMESSATTI

## **Sugl'indici di singolarità a più dimensioni delle varietà abeliane (commento alla nota del Dr. Morin)**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 5 (1934), p. 50-79

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1934\\_\\_5\\_\\_50\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1934__5__50_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# SUGL'INDICI DI SINGOLARITÀ A PIÙ DIMENSIONI DELLE VARIETÀ ABELIANE

(commento alla Nota del Dr. MORIN)

di ANNIBALE COMESSATI

## § 1. - Premesse e posizione del problema.

Nella Nota a cui fa seguito il presente commento, il Dr. UGO MORIN ha considerato approfonditamente certe proprietà dei complessi lineari di spazi  $S_k$  in un  $S_n$  che si legano alla considerazione dell'insieme dei loro *spazi totali* di dimensione  $h$ ; ed in particolare, nella seconda parte del lavoro, ha assegnato, per  $k = 1$  ed  $h$  convenientemente limitato, la dimensione del sistema lineare degli  $h$ -complessi contenenti quell'insieme, o, per dirla in altro modo, il numero dei complessi lineari indipendenti di  $S_n$  che contengono tutti gli  $S_h$  totali di un complesso lineare (generico) di rette.

Il mio proposito iniziale, nell'accingermi a questo commento, era quello di segnalare le origini del problema da me indicato al Dr. MORIN, ed il suo significato per la teoria delle funzioni abeliane. Inevitabilmente sono stato indotto a riflettere sulla questione centrale, ed a risolverla per mio conto col ricorso all'algoritmo delle *forme differenziali simboliche* di POINCARÉ-CARTAN che qui viene applicato alla rappresentazione dei complessi lineari di spazi  $S_k$ . Le considerazioni che seguono hanno così acquistato piena autonomia.

Per il resto non sono andato al di là del primo e più elementare problema e delle illustrazioni inerenti. Ma l'argomento ne suggerisce subito altri, e più complessi, sia nel campo delle funzioni abeliane, come, più modestamente, in quello dell'appli-

cazione dei predetti algoritmi allo studio di complessi lineari di spazi  $S_k$  in un  $S_n$ . A giudicar dalla prima prova, sembra ch'essi si prestino a sostituire efficacemente gli algoritmi tradizionali, porgendo all'intuizione geometrica il soccorso d'un agile strumento.

1. - Sia  $\omega$  una matrice, ad elementi complessi, del tipo  $(m, n)$  cioè con  $m$  righe ed  $n$  colonne, e

$$(1) \quad \varphi_2 \equiv \sum_{r,s=1}^n a_{rs} x_r y_s, \quad (a_{rs} = -a_{sr})$$

una *forma bilineare alternata* nelle due serie di variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$ . Si dirà che la  $\varphi_2$  appartiene alla matrice  $\omega$  o che questa ammette la forma  $\varphi_2$ , se  $\varphi_2$  si annulla tutte le volte che alle  $x_i, y_k$  si sostituiscono gli elementi di due righe qualunque della matrice stessa.

Quando  $\omega$  è una *matrice riemanniana*, ed i coefficienti della  $\varphi_2$  sono *interi* si ha dunque da fare con una *forma riemanniana alternata* della  $\omega$ .

Analogamente si possono considerare *forme trilineari*

$$(2) \quad \varphi_3 \equiv \sum_{r,s,t=1}^n A_{rst} x_r y_s z_t,$$

e, più in generale, *forme  $\nu$ -lineari alternate* ( $\nu \leq m$ ), per le quali l'appartenenza alla matrice  $\omega$  si definisce come precedentemente. Il carattere alternato delle forme stesse si precisa nella nota ed ovvia *legge di emisimmetria* dei coefficienti, rispetto alle permutazioni degl'indici; i quali nelle (1) (2), ..., ecc., posson variare nella totalità delle corrispondenti *disposizioni* (binarie, ternarie, ... ecc.).

La (1) può anche scriversi come una forma lineare

$$(1') \quad \varphi_2 \equiv \sum a_{rs} \begin{vmatrix} x_r & x_s \\ y_r & y_s \end{vmatrix},$$

nei determinanti di 2° ordine estratti dalla matrice

$$(3) \quad \left\| \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \dots & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & \dots & y_n \end{array} \right\|,$$

ed allora è sufficiente – e sarà normativamente prescritto nel seguito – che gli indici  $r, s$  percorrano le *combinazioni* binarie della classe  $n$ , pur essendo indifferente, in ciascuna combinazione, l'ordinamento degl'indici. Naturalmente quando si devono confrontare due o più forme  $\varphi_2$  per cui quell'ordinamento sia diversamente assegnato, occorrerà tener conto della legge di emisimmetria.

Analogamente la (2) può scriversi come una forma lineare

$$(2') \quad \varphi_2 \equiv \sum A_{rst} \left| \begin{array}{ccc} x_r & x_s & x_t \\ y_r & y_s & y_t \\ x_r & x_s & x_t \end{array} \right|,$$

nei determinanti di 3° ordine estratti dalla matrice

$$(4) \quad \left\| \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \dots & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & \dots & y_n \\ x_1 & x_2 & \dots & \dots & x_n \end{array} \right\|,$$

con avvertenze analoghe circa gl'indici dei coefficienti. E così via.

Talvolta scriveremo abbreviatamente, al posto delle (1') (2'), le

$$(1'') \quad \varphi_2 \equiv \sum a_{rs} X_{rs}, \quad \varphi_3 \equiv \sum A_{rst} X_{rst},$$

e più in generale

$$(5) \quad \varphi_v \equiv \sum a_{r_1 r_2 \dots r_v} X_{r_1 r_2 \dots r_v},$$

e, per fissare una terminologia, parleremo di *forme bi-tri-... v-dimensionali*, appartenenti o no alla matrice  $\omega$ .

**2.** – Quando  $\omega$  è una matrice riemanniana quindi del tipo  $(p, 2p)$  le forme ora considerate, ed i loro valori assunti in cor-

rispondenza alle matrici del tipo (3), (4), ... ecc. estratte dalla  $\omega$  hanno dei significati che sarà opportuno ricordare. I relativi coefficienti ora si supporranno *interi*.

Alla  $\omega$  è legata una varietà abeliana  $V_p$  (di rango 1), e le righe di  $\omega$  danno i periodi di  $p$  integrali indipendenti di 1<sup>a</sup> specie  $u_1, u_2, \dots, u_p$  relativi a certi  $2p$  cicli lineari indipendenti, i quali si possono ritenere generati dai  $2p$  spigoli del parallelepipedo dei periodi che escono da un prefissato vertice  $O$ . Legando a ciascun spigolo l'indice  $r$  della colonna corrispondente, alle combinazioni binarie, ternarie, ... ecc. di quegli indici restano associate le facce bi-tri-...  $\nu$ -dimensionali del parallelepipedo uscenti da  $O$ , e queste, passando nel modo noto alla riemanniana di  $V_p$ , generano altrettanti cicli delle corrispondenti dimensioni. L'*orientazione* dei cicli stessi è individuata dall'ordine di scrittura, cioè dalla *disposizione* degli indici entro la combinazione corrispondente.

Ricorderemo ancora che tal costruzione fornisce, per ogni  $\nu$ , un sistema completo di cicli indipendenti, talchè il *numero di BETTI*  $R_\nu$  della  $V_p$  vale  $\binom{2p}{\nu}$  (1).

Se ora conveniamo che, nella (5), il simbolo  $X_{r_1 r_2 \dots r_\nu}$  rappresenti il ciclo  $\nu$ -dimensionale individuato dalla disposizione degli indici, vediamo che ad ogni  $\varphi_\nu$  resta associata una combinazione lineare di quei cicli, cioè in definitiva un ciclo  $\nu$ -dimensionale  $C_\nu$  della  $V_p$ ; e viceversa.

Torniamo ora all'accezione primitiva, e consideriamo il valore assunto da una  $\varphi_\nu$  in corrispondenza alla matrice formata colle righe di posti  $i_1, i_2, \dots, i_\nu$  della  $\omega$ . Orbene questo valore è il *periodo* dell'integrale  $\nu$ -plo di 1<sup>a</sup> specie della  $V_p$

$$(6) \quad \int du_{i_1} du_{i_2} \dots du_{i_\nu},$$

assunto al corrispondente ciclo  $C_\nu$ .

(1) Per le proprietà richiamate in questo numero, vedasi S. LEFSCHETZ, *On certain numerical invariants of algebraic varieties, ecc. I* [Transactions of the American mathematical Society, T. 22 (1921) pp. 327-406] Parte II.

Pertanto se la  $\varphi_\nu$  appartiene alla matrice  $\omega$  quel periodo è nullo qualunque sia l'integrale (6), e poichè ogni integrale  $\nu$ -plo di 1ª specie di  $V_p$  è una combinazione lineare degli integrali (6), così in definitiva si vede che ad ogni  $\varphi_\nu$  appartenente alla  $\omega$  è legato un ciclo  $\nu$ -dimensionale  $C_\nu$  al quale tutti gl'integrali  $\nu$ -pli di 1ª specie di  $V_p$  hanno periodo nullo. Laonde se  $l_\nu$  è il numero (massimo) di  $\varphi_\nu$  indipendenti a coefficienti interi che appartengono alla  $\omega$  il numero dei periodi indipendenti degli integrali  $\nu$ -pli di 1ª specie di  $V_p$  sarà  $\binom{2p}{\nu} - l_\nu$ .

Che cosa si può dire circa i numeri  $l_\nu$ ?

Il caso  $\nu = 2$  è classico, ed allora  $l_\nu - 1$  è l'*indice di singolarità* (diremo bidimensionale) della  $\omega$ . Invece il caso  $\nu > 2$  è stato appena sfiorato dal LEFSCHETZ <sup>(2)</sup> ai fini del problema che qui vien ripresentato e discusso; senonchè le rapide conclusioni dell'eminente A. a tal riguardo non sono corrette ed abbisognano di modificazione.

Il problema a cui s'è accennato è il primo ed il più semplice che in argomento si presenti: una matrice di Riemann  $\omega$  del tipo più generale ammette delle forme  $\varphi_\nu$  con  $\nu > 2$ ? Poichè una  $\omega$  siffatta è astretta alla sola condizione d'ammettere una  $\varphi_2$  <sup>(3)</sup>, tanto val chiedersi se l'esistenza di quella  $\varphi_2$  non trascini seco di conseguenza quella di qualche  $\varphi_\nu$ , e quale sia, per ogni  $\nu$ , la dimensione  $\sigma_\nu - 1$  del sistema lineare delle  $\varphi_\nu$  che nascono in tal guisa. Assodato che il problema ha risposta affermativa, talchè, per ogni  $\nu > 2$  è  $\sigma_\nu > 0$ , verrà fatto naturalmente di definire come *indice di singolarità  $\nu$ -dimensionale* della  $\omega$  (della  $V_p$ ) l'eccesso del numero di  $\varphi_\nu$  indipendenti (a coefficienti interi) su quello del caso generale, cioè l'intero  $k_\nu = l_\nu - \sigma_\nu$  <sup>(4)</sup>.

<sup>(2)</sup> Loco cit. (1), Parte II, Cap. I, § 2, nn. 54-55.

<sup>(3)</sup> A coefficienti interi, ed inoltre (colla denominazione di SCORZA) *principale*. Per ora questo carattere non interessa; più avanti esso interverrà a garantire la *non singolarità* del complesso lineare rappresentato da  $\varphi_2=0$ .

<sup>(4)</sup> Si vedrà in seguito che le  $\sigma_\nu$  forme indipendenti del caso generale possono scegliersi a coefficienti interi.

Andiamo ad analizzare e trasformare opportunamente la posizione del problema.

3. - Intanto, posto che  $\varphi_\nu$  e  $\varphi_\mu$  ( $\mu < \nu$ ) sian forme appartenenti ad una matrice  $\omega$ , qual'è il preciso significato della frase "la  $\varphi_\nu$  è conseguenza della  $\varphi_\mu$ ,"?

Riferiamoci al caso più semplice, senza prescrivere che  $\omega$  sia una matrice *riemanniana*, nè che i coefficienti delle forme considerate siano interi.

Suppongasì che una matrice  $(3, n)$  come la (4) ammetta una forma  $\varphi_2$  ed una  $\varphi_3$  (dei tipi (1) (2)). Per la  $\varphi_2$  cioè si esprimerà colle tre relazioni

$$(7) \quad \sum a_{rs} x_r y_s = 0, \quad \sum a_{rs} y_r z_s = 0, \quad \sum a_{rs} x_r x_s = 0,$$

e per la  $\varphi_3$  coll' unica relazione

$$(8) \quad \sum A_{rst} x_r y_s z_t = 0.$$

Finchè la matrice considerata è *particolare*, cioè i suoi elementi hanno valori numerici determinati, non ha evidentemente alcun senso il parlare di dipendenza *algebraica* della  $\varphi_3$  dalla  $\varphi_2$ . E l'astrazione dalla particolarità implica che le  $x_i, y_i, z_i$  si considerino non più come numericamente assegnate, ma come *variabili* (indipendenti), il che porta senz'altro a precisare la relazione di dipendenza, dicendosi che la  $\varphi_3$  è *conseguenza* della  $\varphi_2$  quando l'equazione (8) è soddisfatta da *tutti* i valori delle  $x_i, y_i, z_i$  che verificano il sistema (7) <sup>(5)</sup>.

Un'interpretazione geometrica che si presenta subito, viene dal considerare le  $x_i, y_i, z_i$  quali coordinate di punto in uno spazio a  $3n - 1$  dimensioni. Allora le (7) rappresentano ivi tre coni quadrici  $Q_1, Q_2, Q_3$  e la (8) una forma cubica  $K$  d'un tipo particolare che non è il caso di precisare più compiutamente:

(5) Se le (7) non hanno soluzioni comuni (nel caso semplice qui considerato ciò può verificarsi solo per  $n = 3$ ) la relazione di dipendenza perde significato: ma tal caso anzi non potrà presentarsi, in quanto presupponiamo l'esistenza di una matrice (almeno) alla quale appartiene la  $\varphi_2$ .

secondo quanto precede, la  $\varphi_3$  sarà a dirsi conseguenza della  $\varphi_2$  quando  $K$  passa per l'intersezione dei coni  $Q_1, Q_2, Q_3$ .

Senonchè tale interpretazione geometrica non sembra la più favorevole alla discussione del nostro problema. Ma v'ha un'altra interpretazione più vantaggiosa ed anche più espressiva.

Si riguardino le  $x_i, y_i, z_i$  quali variabili congrediventi (di fronte alle trasformazioni lineari) coordinate omogenee di tre punti  $X, Y, Z$  di un  $S_{n-1}$ , e, coerentemente, i determinanti  $X_{rs}, X_{rst}$  quali coordinate grassmanniane delle rette  $XY$ , e dei piani  $XYZ$  di quello spazio. In tale accezione le  $\varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0$  s'interpretano come equazioni di due *complessi lineari*, il primo di rette, il secondo di piani, dello stesso  $S_{n-1}$ .

Una matrice (4) *particolare*, individua i tre punti  $X, Y, Z$ ; e se essa ammette la forma  $\varphi_2$ , ciò vuol dire che il complesso  $\varphi_2 = 0$ , contiene le tre rette  $XY, YZ, ZX$ , quindi *tutte* le rette del piano  $\pi = (XYZ)$ . Questo è dunque, come suol dirsi, un *piano totale* nel complesso  $\varphi_2 = 0$ ; e la condizione affinchè la matrice considerata ammetta anche la forma  $\varphi_3$ , si è che quel piano appartenga al complesso  $\varphi_3 = 0$ .

Ritornando a considerare le  $x_i, y_i, z_i$  come variabili, vediamo così, in accordo con quel che precede, che la  $\varphi_3$  sarà a dirsi *conseguenza* della  $\varphi_2$  allora e solo che il complesso  $\varphi_3 = 0$  contiene tutti i piani totali del complesso  $\varphi_2 = 0$ .

Più in generale *una forma  $\nu$ -dimensionale  $\varphi_\nu$  si dirà conseguenza d'una  $\varphi_\mu$  ( $\mu \leq \nu$ ) se il complesso lineare (di spazî  $S_{\nu-1}$ ) rappresentato da  $\varphi_\nu = 0$  contiene tutti gli spazî totali  $S_{\nu-1}$  del complesso  $\varphi_\mu = 0$ , dicendosi spazio totale (di data dimensione  $> \mu - 1$ ) per quest'ultimo complesso, ogni spazio (dello  $S_{n-1}$  ambiente) del quale tutti gli  $S_{\mu-1}$  appartengano al complesso medesimo. Una matrice ( $m, n$ ) che ammetta  $\varphi_\mu$ , ammette anche ogni  $\varphi_\nu$  che ne sia conseguenza.*

È poi ovvio che tali  $\varphi_\nu$  (relative ad una  $\varphi_\mu$  prefissata) formano un *sistema lineare*  $\Sigma$ , dal momento che il sistema dei complessi lineari  $\varphi_\nu = 0$  contiene tutto il fascio individuato da due dei suoi elementi.

La determinazione del sistema  $\Sigma$ , in particolare della sua dimensione non sembra problema facile; e delicata appare la va-



lutazione dell'influenza che possono esercitare su  $\Sigma$  le particolarità del complesso  $\varphi_\mu = 0$ . La questione da noi posta alla fine del n. prec., concerne però soltanto il caso  $\mu = 2$ , sotto l'ipotesi di *genericità* per il complesso  $\varphi_2 = 0$  (cfr. la Nota <sup>(5)</sup>): e di questo appunto tratta il Dr. MORIN nella seconda parte del suo lavoro (n. 11 e segg.) concludendo coll'assegnare per  $\sigma_\nu$  il valore  $\binom{n}{\nu-2}$  (colle sue notazioni  $\binom{n+1}{h-1}$ ) e dare insieme la costruzione del sistema  $\Sigma$ .

Il nostro problema per le matrici riemanniane comporta l'ulteriore restrizione che l'intero  $n$  sia pari ( $n = 2p$ ), cioè che lo spazio ambiente  $S_{2p-1}$  dei complessi sia di dimensione dispari, ed inoltre che sia  $\nu \leq p$  <sup>(6)</sup>.

Nella trattazione di questa commento, in cui, come s'è avvertito, quel problema viene ripreso e risolto indipendentemente, il caso di  $n$  dispari (pure contemplato dal Dr. MORIN) non viene considerato.

La circostanza che la  $\varphi_2$  del caso sia a *coefficienti interi*, e che si ricerchino  $\varphi_\nu$  indipendenti pure a *coefficienti interi*, non porge aggravamento: giacchè da un lato la costruzione del Dr. MORIN che quì verrà ripresentata con più espressive notazioni, porge direttamente  $\sigma_\nu$  forme  $\varphi_\nu$  a coefficienti interi, dall'altro la conclusione era prevedibile *a priori*. Invero il sistema lineare  $\Sigma$  in quanto razionalmente determinato dal complesso *razionale*  $\varphi_2 = 0$  (razionale in relazione ad un fissato sistema di coordinate ed ai suoi trasformati razionali) è pure *razionale*, e quindi in esso posson trovarsi  $\sigma_\nu$  elementi razionali linearmente indipendenti.

In definitiva, per una matrice riemanniana generale, il numero  $\sigma_\nu$  vale  $\binom{2p}{\nu-2}$  cioè eguaglia il numero di BETTI  $R_{\nu-2}$ . Di qualche conseguenza, nei confronti colle conclusioni del LEFSCHETZ, si parlerà alla fine di questo commento.

<sup>(6)</sup> Questa non è poi una restrizione, giacchè un complesso generale di rette di un  $S_n$  non ammette spazî totali di dimensione  $h > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  (vedasi il lavoro del Dr. MORIN).

**§ 2. - Algoritmo differenziale simbolico  
per la rappresentazione dei complessi lineari.**

4. - Nello spazio  $S_n$ , dove ora indicheremo con  $x_0, x_1, \dots, x_n$  coordinate proiettive omogenee, sia

$$(9) \quad \sum A_{r_0 r_1 \dots r_h} X_{r_0 r_1 \dots r_h} = 0,$$

l'equazione d'un *complesso lineare* di spazi  $S_h$  (la somma essendo estesa alle *combinazioni* di classe  $h$  degl'indici  $0, 1, \dots, n$ , colle avvertenze del n. 1). Colle notazioni correnti la coordinata grassmanniana  $X_{r_0 r_1 \dots r_h}$  è il determinante  $|x_{r_i}^{(t)}|$  ( $i, t=0, 1, \dots, h$ ) delle coordinate di  $h+1$  punti indipendenti dello  $S_n$ .

Il comportamento formale delle coordinate  $X$  è caratterizzato dalle proprietà seguenti:

a) Le  $X$  soddisfano alla *legge di emisimmetria* (hanno comportamento alternato) di fronte alle permutazioni degli indici, in particolare una  $X$  con due indici eguali è nulla;

b) Per una trasformazione di coordinate (sostituzione lineare) che faccia passare dalle  $x_i$  alle  $y_i$ , esse si trasformano secondo la legge espressa dalla formula

$$Y_{r_0 r_1 \dots r_h} = \sum_{s_0 s_1 \dots s_h} \frac{D(y_{r_0}, y_{r_1}, \dots, y_{r_h})}{D(x_{s_0}, x_{s_1}, \dots, x_{s_h})} X_{s_0 s_1 \dots s_h},$$

nella quale i coefficienti delle  $X$  sono, colla usuale notazione, determinanti jacobiani.

Ciò mostra che le  $X$  si comportano alla stregua dei *prodotti differenziali simbolici*

$$(10) \quad dx_{r_0} dx_{r_1} \dots dx_{r_h},$$

che compariscono nelle espressioni degl'integrali  $h+1$ -pli estesi ad una  $V_{h+1}$  immersa in una  $V_{n+1}$ . E tale identità di comportamento suggerisce d'introdurre, nei complessi lineari in discorso, la *notazione simbolica* che deriva dal sostituire, nel primo mem-

bro della (9), al posto di ogni  $X$ , il corrispondente prodotto (10). Con tal sostituzione quel primo membro assume l'aspetto d'una forma differenziale simbolica  $\Phi$  (di grado  $h+1$ , in  $n+1$  variabili) a coefficienti costanti (7); orbene noi diremo che quella forma rappresenta il complesso (9), e designeremo il complesso colla stessa lettera  $\Phi$  (o più compiutamente con  $\Phi_{h+1}$  ove interessi mettere in vista la dimensione  $h$  degli elementi del complesso).

Va avvertito che un complesso individua la corrispondente forma  $\Phi$  solo a meno d'un fattore costante, e che pertanto due forme  $\Phi$  differenti per un fattore costante (in particolare per il segno) rappresentano lo stesso complesso.

5. - I vantaggi della nuova notazione si rivelano principalmente attraverso al trasporto ai complessi della nozione di prodotto di due forme differenziali simboliche.

Ricordiamo brevemente che quando le due forme sono ciascuna di un solo termine, p. es.  $A dx_{r_0} \dots dx_{r_h}$ ,  $B dx_{s_0} \dots dx_{s_h}$  ( $A, B$ , nel nostro caso, costanti) il loro prodotto è la forma  $AB dx_{r_0} \dots dx_{r_h} dx_{s_0} \dots dx_{s_h}$  (nulla se in essa compariscono due  $dx$  collo stesso indice): nel caso generale il prodotto  $\Phi\Psi$  d'una  $\Phi$  per una  $\Psi$  si ottiene sommando i prodotti dei termini di  $\Phi$  per quelli di  $\Psi$  e riducendo, nella somma, i termini simili, cioè quelli che contengono le stesse  $dx$  (con riguardo alla legge di alternanza) per guisa che, in definitiva, i termini corrispondano a combinazioni distinte dei relativi indici.

Invertendo i fattori il prodotto cambia al più di segno (e ciò accade quando entrambi son di grado dispari) quindi non

(7) Per tali forme, e per talune proprietà considerate nel seguito, veda si E. GOURSAT, *Leçons sur le problème de Pfaff* [Paris, Hermann, 1922] Cap. III. Se nel primo membro della (9) si sviluppano i determinanti, esso assume l'aspetto d'una forma plurilineare in  $h+1$  serie di variabili; ed allora è facile vedere che i coefficienti (i cui indici percorrono ora le disposizioni) si comportano, di fronte alle trasformazioni di coordinate come gli elementi d'un tensore covariante. È però un tensore emisimmetrico; quindi ad esso può associarsi una forma differenziale simbolica, ch'è precisamente la nostra  $\Phi$ . Cfr. per analogia E. KAEHLER, *Forme differenziali e funzioni algebriche* [Memorie Acc. Italia, III (1922) Mem. n. 3] n. 8.

muta il complesso associato alla forma prodotto. Si può pertanto parlare, senz'ambiguità dipendente dall'ordine, di *prodotto di due complessi lineari*.

Qual'è il significato geometrico di questo prodotto? Ecco brevemente come vi si può pervenire.

Siano  $\Phi_{h+1}$ ,  $\Psi_{k+1}$ , i due complessi. Intanto se  $h+k+1 > n$ , il prodotto svanisce identicamente <sup>(8)</sup>; e se  $h+k+1 = n$ , cioè se gli spazî  $S_h$ ,  $S_k$  dei due complessi hanno *dimensioni duali*, la forma prodotto è di un solo termine il quale contiene tutti i  $dx$ . Neppure in questo caso quella forma rappresenta un complesso; però il suo coefficiente è un *invariante simultaneo* (relativo) dei due complessi, che, ove si operi una trasformazione di coordinate, si riproduce moltiplicato per il modulo della sostituzione relativa.

Quando quell'invariante è nullo, diremo che *i due complessi sono in involuzione*. In particolare, per due complessi di rette dello  $S_3$ , si ricade sulla relazione di KLEIN <sup>(9)</sup>.

Non ci preoccuperemo di caratterizzare, in forma più geometrica, tal relazione involutoria; ci basti avvertire, perchè dovremo tenerne conto in seguito, che quando uno dei due complessi è identico (cioè la corrispondente forma è nulla) la relazione involutoria è sempre verificata <sup>(10)</sup>.

Premesso ciò, ecco il significato geometrico che vogliamo indicare:

*Il complesso lineare  $\Phi_{h+k+2}$  prodotto di due complessi  $\Phi_{h+1}$ ,  $\Psi_{k+1}$  ( $h+k < n-1$ ) è l'insieme degli spazî  $S_{h+k+1}$  entro ai quali i due dati complessi subordinano due complessi in involuzione.*

<sup>(8)</sup> È il momento per avvertire che la scrittura  $\Phi=0$  sta ad esprimere che la forma  $\Phi$  è nulla identicamente, cioè ha tutti i coefficienti nulli.

<sup>(9)</sup> Cfr. le mie *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*. [Padova, Cedam, 1930-31]. Parte II, n. 341.

<sup>(10)</sup> Il lettore vedrà subito che se  $\Phi_{h+1}$  è un complesso speciale (insieme degli  $S_h$  appoggiati ad un  $S_{n-h-1}$ ) i  $\Phi_{n-h}$  che sono con esso in relazione involutoria son quelli ai quali appartiene lo  $S_{n-h-1}$  direttore. Cosicchè per due complessi  $\Phi_{h+1}$ ,  $\Phi_{n-h}$  entrambi speciali la relazione involutoria si caratterizza geometricamente coll'incidenza dei relativi spazî direttori. Ma in argomento si può certo dire molto di più.

Poichè la nozione di prodotto di due forme differenziali simboliche è invariante di fronte alle trasformazioni delle variabili, possiamo limitarci a cercare la condizione perchè una faccia  $S$  ad  $h + k + 1$  dimensioni della piramide fondamentale, ad esempio quella individuata dai punti fondamentali  $A_0, A_1, \dots, A_{h+k}$  appartenga al complesso prodotto. Tenendo conto che lo spazio  $S$  ha una sola coordinata non nulla si vede subito che la condizione cercata si riduce a ciò che in  $\Phi_{h+k+1}$  manchi il termine in  $dx_0 dx_1 \dots dx_{h+k}$ ; ma il coefficiente di quel termine è proprio l'invariante simultaneo dei due complessi indotti dai dati entro  $S$ , perchè le forme che ivi li rappresentano si deducono dalle  $\Phi_{h+1}, \Psi_{k+1}$  sopprimendovi i termini che contengono qualche  $dx$  con indice maggiore di  $h + k$ .

**6.** - Una conseguenza immediata, ma per noi fondamentale, della caratterizzazione assegnata è la seguente:

*Il complesso prodotto di due complessi lineari  $\Phi_{h+1}, \Psi_{k+1}$  contiene tutti gli spazi totali di dimensione  $h + k + 1$  dei complessi dati.*

Ciò è evidente dal momento che entro ad un  $S_{h+k+1}$  totale il complesso  $\Phi_{h+1}$  subordina un complesso identico, quindi involutorio con quello indotto da  $\Psi_{k+1}$  <sup>(11)</sup>.

Ognun vede la portata della conclusione: Dato un complesso  $\Phi_{h+1}$ , e fissato un intero  $\nu > h + 1$ , per costruire un complesso di spazi  $S_{\nu-1}$  che contenga tutti gli  $S_{\nu-1}$  totali del complesso dato, basta moltiplicare la  $\Phi_{h+1}$  per un'arbitraria forma  $\Psi$  di grado  $\nu - h - 1$ .

Dopo di che si presenta spontanea la domanda: I complessi così costruiti in relazione alle  $\binom{n+1}{\nu-h-1}$  forme  $\Psi$  indipendenti, sono essi pure indipendenti? E con tal costruzione si ottengono proprio *tutti* i complessi che contengono l'insieme degli  $S_{\nu-1}$  totali per il dato?

<sup>(11)</sup> Il teorema trovasi sostanzialmente anche nel lavoro del Dr. MORIN. Vedasi la (14) del n. 11 la quale rappresenta (colle nostre notazioni) il prodotto del complesso  $\Sigma A_{r_0 r_1 \dots r_h} dx_{r_0} \dots dx_{r_h}$  per il complesso  $dx_{h+1} \dots dx_n$  e la dimostrazione successiva.

La questione non ammette una risposta generale, e le prime indagini mostrano, come si chiarirà meglio tra poco, che sulle conclusioni ha influenza sia il valore di  $\nu$  che la maggiore o minor particolarità del complesso  $\Phi_{h+1}$ . Tuttavia, nei limiti del caso particolare aderente al nostro problema, e precisato alla fine del n. 3, la risposta generale esiste; e si consegue coi passi che andiamo ad indicare.

In quelle condizioni il complesso  $\varphi_2 = 0$  di partenza è un complesso di rette d'uno spazio  $S_{2p-1}$ , quindi è rappresentato da una *forma simbolica quadratica* (a coefficienti interi) che d'ora in poi indicheremo con  $\omega$ . Per di più si tratta d'un complesso generico, o con maggior precisione, *non singolare* <sup>(12)</sup>.

Se  $\Phi$  è una forma simbolica di grado  $\nu - 2$ , la forma  $\omega\Phi$  rappresenta un complesso che contiene tutti gli  $S_{\nu-1}$  totali di  $\omega$ , quindi dà luogo ad una  $\varphi_\nu$  *conseguenza* (nel senso del § 1) di  $\varphi_2$ . Noi vogliamo far vedere che tal costruzione esaurisce tutte le  $\varphi_\nu$  e di più che a  $\Phi$  linearmente indipendenti corrispondono forme  $\omega\Phi$  pure linearmente indipendenti, talchè il numero delle  $\varphi_\nu$  indipendenti è precisamente  $\sigma_\nu = \binom{2p}{\nu-2}$  come s'è asserito al n. 3. Ciò conseguirà dai seguenti teoremi:

**Teorema d'indipendenza:** *Se  $\omega$  è una forma quadratica simbolica in  $2p$  differenziali, rappresentante un complesso non singolare e  $\Phi$  una forma simbolica di grado  $l \leq p-1$ , condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia  $\omega\Phi = 0$  è che sia  $\Phi = 0$ .*

**Teorema di completezza:** *Una forma differenziale simbolica  $\Psi$  di grado  $\nu \leq p$ , tale che il corrispondente complesso contenga tutti gli spazi totali di  $\omega$ , è divisibile per  $\omega$ , cioè è del tipo  $\omega\Phi$ .*

7. - Aggiungiamo alcuni commenti e preliminari algoritmici. Intanto se la  $\omega$  è a coefficienti interi, ammesso il teorema d'indipendenza, si costruiscono subito  $\sigma_\nu$  forme  $\omega\Phi$  (quindi  $\varphi_\nu$ )

<sup>(12)</sup> G. SCORZA, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann*, ecc. [Rendiconti Palermo T. 41 (1916) pp. 263-380] n. 12.

pure a coefficienti interi. Basta scegliere i  $\omega_\nu$  fattori  $\Phi$  di un sol termine (col coefficiente 1).

Il teorema d'indipendenza sussiste sotto le due condizioni che  $\omega$  sia non singolare, e che sia  $l \leq p-1$ ; se esse si lasciano cadere, il teorema può risultare falso. Per la prima si guardi ad esempio al caso in cui  $\omega$  è speciale; allora si può supporre  $\omega = dx_0 dx_1$  ed il prodotto  $\omega\Phi$  è nullo non appena  $\Phi$  contenga in ogni termine uno dei due differenziali  $dx_0, dx_1$ . Quanto alla seconda, essa è tassativa, giacchè se  $l > p-1$  il teorema è sempre falso, altrimenti si avrebbero tante  $\omega\Phi$  indipendenti quante sono le  $\Phi$ , mentre il numero delle forme indipendenti di grado  $l+2$  è minore di quello delle forme indipendenti di grado  $l$ .

Avvertasi che il teorema d'indipendenza va un momentino oltre quel che a noi occorre, in quanto sussiste anche per  $l=p-1$ , mentre a noi basta che sia  $l \leq p-2$  ( $\nu \leq p$ ).

Se poi si vuol gettare uno sguardo più in là, con riferimento a forme  $\omega$  di grado  $> 2$ , s'incontrano subito dei casi in cui, anche supponendo  $\omega$  del tutto generale, il teorema è falso. Per esempio se  $\omega$  è di grado dispari e  $\Phi$  di grado maggiore di quello di  $\omega$ , basta scegliere una  $\Phi$  del tipo  $\omega\Psi$  per avere  $\omega\Phi = \omega^2\Psi = 0$  senza che lo sia  $\Phi$ . Ciò perchè il quadrato d'una forma di grado dispari è sempre nullo.

Questi brevi commenti suggeriscono problemi nuovi, e forse interessanti, ma nello stesso tempo ne indicano la complessività.

Poichè il complesso  $\omega$  è non singolare, scelte opportunamente le coordinate, potremo assumere,  $\omega$  sotto la forma canonica

$$(11) \quad \omega = dx_1 dx_{p+1} + dx_2 dx_{p+2} + \dots + dx_p dx_{2p}^{(13)},$$

che, fatta la posizione

$$(12) \quad \omega_i = dx_i dx_{p+i},$$

(13) Cfr. E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, ecc. [Messina, Principato, 1923] Cap. 5<sup>o</sup>, nn. 6, 8. Nella dimostrazione dei due teoremi enunciati non porremo alcuna restrizione ai coefficienti di  $\omega$  nè a quelli delle trasformazioni di coordinate: insomma prescindere dalle questioni di razionalità.

scriveremo anche

$$(13) \quad \omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_p,$$

attribuendo ora alle coordinate di  $S_{2p-1}$  i più comodi indici  $1, 2, \dots, 2p$ .

Le  $\omega_i$  son forme di grado pari, quindi liberamente permutabili nei prodotti con forme qualsiasi. Inoltre tutte le loro potenze sono nulle.

Tenendo conto di ciò si vede che nell'espressione di  $\omega^r$  dedotta dalla (13) a norma della formula del polinomio (la quale è applicabile senza riserve, tenuto conto della permutabilità delle  $\omega_i$ ) spariscono i termini che contengono potenze di qualche  $\omega_i$  e restan soltanto quelli che contengono fattori tutti differenti. Ne consegue che, per  $r > p$  è  $\omega^r = 0$ , e, per  $r = p$

$$\omega^p = p! \omega_1 \omega_2 \dots \omega_p.$$

Più in generale se  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_h$  son forme dello stesso grado pari, le cui potenza siano nulle, è analogamente

$$(14) \quad (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_h)^h = h! \omega_1 \omega_2 \dots \omega_h.$$

Profitteremo di questa formula per dimostrare una proposizione che applicheremo più avanti in un caso particolare. Si tratta del seguente:

**Lemma:** *Se  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\lambda-1}$  sono forme differenziali simboliche dello stesso grado pari, aventi le potenze nulle, ogni forma (algebraica)  $\Omega$  nelle  $\omega_i$ , di grado  $h \geq \lambda$  (nelle stesse) è divisibile per  $\bar{\omega} = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{2\lambda-1}$ .*

Dimostriamo che ogni termine di  $\Omega$  è divisibile per  $\bar{\omega}$ . Un termine siffatto è, a meno del coefficiente, un prodotto di  $h$  differenti tra le  $\omega_i$ , ad es.  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_h$ . Posto per abbreviare

$$\alpha = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_h, \quad -\beta = \omega_{h+1} + \dots + \omega_{2\lambda-1}, \quad \alpha - \beta = \bar{\omega}$$

si osservi che, stante l'ipotesi  $h \geq \lambda$ ,  $\beta$  contiene meno di  $\lambda$  termini, talchè  $\beta^h$  è nullo. Il primo membro  $\alpha^h$  della (14) si potrà quindi anche scrivere  $\alpha^h - \beta^h$ , e si avrà pertanto dalla (14) stessa



$$\begin{aligned}\omega_1 \omega_2 \dots \omega_h &= \frac{1}{h!} (\alpha^h - \beta^h) = \frac{1}{h!} (\alpha - \beta) (\alpha^{h-1} + \alpha^{h-2} \beta + \dots + \beta^{h-1}) = \\ &= \frac{1}{h!} \bar{\omega} (\alpha^{h-1} + \dots + \beta^{h-1})\end{aligned}$$

che dimostra il lemma.

### § 3. - Teorema d'indipendenza.

**8.** - Dimostreremo il teorema per induzione da  $p - 1$  a  $p$ . Esso è evidente per  $p = 1$ , giacchè allora  $\omega = dx_1 dx_2$  e  $\Phi$  è di grado zero, cioè una costante, nulla se  $\omega\Phi = 0$  <sup>(14)</sup>.

Manterremo per  $\omega$  le espressioni e notazioni (11) (12) (13) del n. prec. ed inoltre porremo

$$(15) \quad \bar{\omega} = \omega - \omega_p = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{p-1}.$$

Supposto vero il teorema per una forma, come la  $\bar{\omega}$ , in  $p - 1$  coppie di differenziali associati (tali si diranno  $dx_i$  e  $d_{p+i}$ ) dimostriamolo per la nostra  $\omega$ .

Proviamo anzitutto che, nell'ipotesi  $\omega\Phi = 0$  del teorema, un termine di  $\Phi$  che contenga  $dx_i$  contiene anche l'associato  $dx_{p+i}$ . Con ciò, quando l'ordine  $l$  di  $\Phi$  è *dispari*, il teorema stesso sarà dimostrato, e resterà da considerare soltanto il caso di  $l$  pari.

Fatto, per facilitare il riferimento alle notazioni,  $i = p$ , isoliamo in  $\Phi$  i termini che contengono  $dx_p$  scrivendo

$$(16) \quad \Phi = dx_p \Omega + \Gamma,$$

dove nè  $\Omega$  nè  $\Gamma$  contengono  $dx_p$  e la  $\Omega$  è una forma di grado

<sup>(14)</sup> L'opportunità di considerare quale forma differenziale (a coefficienti costanti) di grado zero una costante, è evidente, e contribuisce ad evitare distinzioni superflue nella trattazione algebrica.

$l' = l - 1$ , in particolare una costante se  $l = 1$ . Dalla (16) tenendo conto che  $dx_p \omega_p$  è nullo, si deduce

$$\omega \Phi = dx_p \bar{\omega} \Omega + \omega \Gamma .$$

I termini del 2° membro che contengono  $dx_p$  sono

$$dx_p (\bar{\omega} \Omega + dx_{2p} \Gamma) ,$$

e per l'ipotesi  $\omega \Phi = 0$  devono annullarsi; ma il 2° fattore non contiene  $dx_p$ , dunque sarà esso stesso nullo, cioè

$$(17) \quad \bar{\omega} \Omega + dx_{2p} \Gamma = 0 .$$

Pongasi ancora, mettendo in evidenza in  $\Omega$  i termini che contengono  $dx_{2p}$

$$(18) \quad \Omega = dx_{2p} \Omega' + \Omega'' ,$$

dove la  $\Omega''$ , di grado  $l'$  non contiene più nè  $dx_p$  nè  $dx_{2p}$ . La (17) diventa

$$dx_{2p} (\bar{\omega} \Omega' + \Gamma) + \bar{\omega} \Omega'' = 0 ,$$

e poichè  $\bar{\omega} \Omega''$  non contiene  $dx_{2p}$ , così sarà  $\bar{\omega} \Omega'' = 0$ , ed in definitiva essendosi ammesso il teorema per  $p' = p - 1$  (tenuto conto che per essere  $l \leq p - 1$  è  $l' \leq p' - 1$ )  $\Omega'' = 0$ . Ma allora la (18) mostra che  $\Omega$  è divisibile per  $dx_{2p}$ , il che prova l'asserto.

**9.** - Liberato il teorema dal caso di  $l$  dispari, supponiamo  $l = 2\lambda$  pari; per quel che s'è ora visto la  $\Phi$  sarà una forma (algebraica) di grado  $\lambda$  nelle  $\omega_i$ .

Dimostriamo più in generale che:

Se  $1 \leq r \leq p$ ,  $l \leq p - r$  condizione necessaria e sufficiente affinchè sia  $\omega^r \Phi = 0$  è che sia  $\Phi = 0$ . Ciò, in particolare, per  $r = 1$  darà il nostro teorema.

Intanto la proposizione è vera per  $r = p$ ,  $r = p - 1$ . Nel 1° caso  $\Phi$  è di grado zero, ed  $\omega^p = p! \omega_1 \omega_2 \dots \omega_p$  (n. 7) non è

nullo, dunque  $\Phi$  dev'essere una costante nulla; nel secondo caso è  $l \leq 1$ , quindi, in quanto  $l$  è pari, ancora  $l = 0$ , ed  $\omega^{p-1}$  non è nullo, dunque si conclude come precedentemente. Con ciò la proposizione stessa resta provata per  $p=2$  ( $r=1, l=0$ ;  $r=2, l=0$ ) cosicchè basterà procedere per ricorrenza <sup>(15)</sup>.

Anzitutto se il grado  $l$  di  $\Phi$  è zero la conclusione è ovvia, perchè  $\omega^r$  non è nulla.

Se  $l$  è  $> 0$ ,  $\Phi$  conterrà almeno una delle  $\omega_i$ , sia  $\omega_p$ , onde si potrà porre

$$(18) \quad \Phi = \omega_p \Omega + \Gamma,$$

dove nè  $\Omega$ , nè  $\Gamma$ , contengono  $\omega_p$ . Ove poi si osservi che

$$\omega^r = (\bar{\omega} + \omega_p)^r = \bar{\omega}^r + r \bar{\omega}^{r-1} \omega_p,$$

si ricava subito

$$\omega^r \Phi = \bar{\omega}^r \omega_p \Omega + \bar{\omega}^r \Gamma + \bar{\omega}^{r-1} \omega_p \Gamma,$$

ed in termini del 2° membro che contengono  $\omega_p$  sono

$$\omega_p (\bar{\omega}^r \Omega + r \bar{\omega}^{r-1} \Gamma).$$

Poichè supponiamo  $\omega^r \Phi = 0$ , quei termini devono annullarsi; ma il fattore in parentesi non contiene  $\omega_p$ , dunque sarà esso stesso nullo, cioè

$$(20) \quad \bar{\omega}^{r-1} (\bar{\omega} \Omega + r \Gamma) = 0.$$

Se  $r = 0$  se ne deduce senz'altro

$$(21) \quad \bar{\omega} \Omega + r \Gamma = 0,$$

ma tal relazione sussiste anche per  $r > 1$  in forza dell'ipotesi di ricorrenza. Difatti il primo membro della (19) è del tipo

<sup>(15)</sup> Il nostro ragionamento si affida dunque ad una *doppia induzione*, il cui meccanismo graduale è d'altronde ben chiaro.

$\omega^{r'} \Phi'$  con  $p' = p - 1$ ,  $r' = r - 1$ ,  $l' = l$ , quindi (posto che  $r > 1$ )  $1 \leq r' \leq p'$ ,  $l' \leq p' - r'$ .

La (21) porge senz'altro

$$\Gamma = - \frac{1}{r} \bar{\omega} \Omega,$$

e, sostituendo nella (18)

$$(23) \quad \Phi = \frac{1}{r} (r \omega_p - \bar{\omega}) \Omega,$$

dopo di che risulta

$$\omega^r \Phi = \frac{1}{r} (\bar{\omega}^r + r \bar{\omega}^{r-1} \omega_p) (r \omega_p - \bar{\omega}) \Omega,$$

e, con facili calcoli

$$\omega_r \Phi = - \frac{1}{r} \bar{\omega}^{r+1} \Omega,$$

talchè, in forza dell'ipotesi, sarà

$$\bar{\omega}^{r+1} \Omega = 0.$$

Ma anche qui è applicabile l'ipotesi di ricorrenza con  $p' = p - 1$ ,  $r' = r + 1$ ,  $l' = l - 2$ , appena si tenga conto che, essendosi già assodata la consistenza del teorema per  $r = p$ ,  $p - 1$ , si può supporre  $r \leq p - 2$ , quindi  $r' \leq p - 1$ . Il suo presupposto implica che deva essere  $\Omega = 0$ , dopo di che la (22) porge senz'altro  $\Phi = 0$ , c. d. d.

#### § 4. - Teorema di completezza.

**10.** - Procederemo anche ora per induzione da  $p - 1$  a  $p$ .  
Modificando lievemente le notazioni dell'enunciato al n. 6, porremo  $v - 1 = l$  (quindi  $l \leq p - 1$ ) onde  $\Psi$  sarà una forma

di grado  $l + 1$  rappresentante un complesso di spazi  $S_l$  che contiene tutti gli  $S_l$  totali di  $\omega$ .

Se  $l = 1$  il teorema è evidente giacchè allora il complesso  $\Psi$  deve identificarsi con  $\omega$ , quindi la forma  $\Psi$  può differir dalla  $\omega$  solo per un fattore costante. Potremo quindi supporre  $l > 1$ .

Dimostriamo in primo luogo che si ci può sempre ricondurre al caso in cui nella  $\Psi$  ogni termine che contenga  $dx_i$  contenga anche l'associato  $dx_{p+i}$ , cioè  $\Psi$  sia una forma nelle  $\omega_i$ , quindi d'ordine  $l + 1 = 2\lambda$  pari nelle  $dx$ .

Premettiamo un'osservazione geometrica: Sia  $K$  un complesso lineare di rette, generale, in uno  $S_p$  di dimensione pari, quindi dotato d'un punto singolare  $A$ ; e  $\bar{K}$  il complesso indotto da  $K$  in un  $S_{n-1}$  che non passi per  $A$ . Ogni  $S_{l-1}$ , totale per  $\bar{K}$ , proiettato da  $A$ , dà un  $S_l$  totale per  $K$  (basta tener presente che  $K$  contiene tutte le rette della stella  $A$ ) e viceversa ogni  $S_l$  totale di  $K$  passante (e anche non passante) per  $A$  sega  $S_{n-1}$  in un  $S_{l-1}$  totale per  $\bar{K}$  (naturalmente se lo  $S_l$  non passa per  $A$  esso può anche giacere in  $S_{n-1}$ ).

Ciò premesso, mettiamo in vista i termini di  $\Psi$  che contengono  $dx_p$ , ma non  $dx_{2p}$  scrivendo

$$(23) \quad \Psi = dx_p \Omega + \Psi_1,$$

dove  $\Omega$  è una forma di grado  $l$  che non contiene nè  $dx_p$  nè  $dx_{p+1}$  e la  $\Psi_1$ , di grado  $l + 1$ , è tale che ogni suo termine il quale contenga  $dx_p$  contiene anche  $dx_{2p}$ . Indicando con  $\bar{\Psi}$ ,  $\bar{\Psi}_1$  le forme dedotte da  $\Psi$ ,  $\Psi_1$  sopprimendovi i termini che contengono  $dx_{2p}$ , dalla (23) deduciamo

$$(24) \quad \bar{\Psi} = dx_p \Omega + \bar{\Psi}_1.$$

Le forme  $\bar{\Psi}$ ,  $\bar{\Psi}_1$  rappresentano i complessi indotti da  $\Psi$ ,  $\Psi_1$  nello spazio  $x_{2p} = 0$  (cfr. la fine del n. 5); quindi intanto  $\bar{\Psi}$  contiene tutti gli  $S_l$  totali di  $\omega$  contenuti in quello spazio. Atteso il comportamento di  $\Psi_1$  rispetto a  $dx_p$ ,  $dx_{2p}$  la forma  $\bar{\Psi}_1$  non contiene  $dx_p$ , quindi il relativo complesso ha il punto singolare  $A_p$  cioè contiene tutti gli  $S_l$  di  $x_{2p} = 0$  passanti per  $A_p$ , in par-

ticolare quelli che son totali per il complesso  $\omega$ . Tali spazi appartengono dunque ad entrambi i complessi  $\bar{\Psi}$ ,  $\bar{\Psi}_1$ , quindi, in forza della (24), anche al complesso  $dx_p \Omega$ .

Poichè la forma  $\Omega$ , di grado  $l$ , non contiene nè  $dx_p$ , nè  $dx_{2p}$ , essa può interpretarsi come rappresentante un complesso lineare di  $S_{l-1}$  nello spazio  $x_p = x_{2p} = 0$ ; dopo di che si vede facilmente che la  $dx_p \Omega$  rappresenta in  $x_{2p} = 0$  il complesso degli  $S_l$  che passano per gli  $S_{l-1}$  predetti (16). Ma il complesso  $dx_p \Omega$  contiene tutti gli  $S_l$  totali di  $\omega$  appartenenti allo spazio  $x_{2p} = 0$  e passanti per  $A_p$  (ch'è il punto singolare del complesso indotto da  $\omega$  in  $x_{2p} = 0$ ); dunque, a tenore dell'osservazione premessa,  $\Omega$  dovrà contenere tutti gli  $S_{l-1}$  totali del complesso indotto, nel relativo  $S_{2p-3}$ , da  $\omega$ , ch'è precisamente  $\bar{\omega} = \omega - \omega_p$ .

In forza dell'ipotesi che sta a base del procedimento induttivo (avvertito che, per  $\bar{\omega}$ ,  $\Omega$  gl'interi  $p$ ,  $l$  hanno i valori  $p' = p - 1$ ,  $l' = l - 1$ ) potremo scrivere

$$\Omega = \bar{\omega} \Gamma,$$

quindi, sostituendo nella (23)

$$\Psi = \bar{\omega} dx_p \Gamma + \Psi_1 = \omega dx_p \Gamma + \Psi_1,$$

ed ancora, posto  $\Lambda = dx_p \Gamma$

$$(25) \quad \Psi = \omega \Lambda + \Psi_1.$$

Il complesso  $\Psi_1$  si trova, di fronte al nostro problema, nelle stesse condizioni di  $\Psi$ , cioè contiene tutti gli  $S_l$  totali di  $\omega$ ; ciò perchè così è, per ipotesi, di  $\Psi$ , e di  $\omega \Lambda$  in quanto contiene a fattore  $\omega$  (n. 6). La questione di provare che  $\Psi$  è divisibile per  $\omega$  è così ricondotta a  $\Psi_1$ , la quale ha però in più, la particolarità che ogni suo termine, il quale contenga  $dx_p$  contiene anche  $dx_{2p}$ .

(16) Più in generale una  $\Psi$ , di grado  $l + 1$ , del tipo  $dx_1 dx_2 \dots dx_k \Phi$  rappresenta il complesso degli  $S_p$  che tagliano lo spazio  $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$  secondo  $S_{l-k}$  del complesso  $\Phi$ .

Procedendo analogamente con riferimento ad un'altra coppia di differenziali associati  $dx_{p-1}$ ,  $dx_{2p-1}$ , si troverà

$$\Psi_1 = \omega \Lambda_1 + \Psi_2,$$

e, combinando colla (25)

$$\Psi = \omega H + \Psi_2,$$

dove nei termini della  $\Psi_2$  i differenziali  $dx_p$ ,  $dx_{p-1}$  compariscono sempre coi loro associati; ed in definitiva si arriverà a porre  $\Psi$  sotto la forma

$$\Psi = \omega M + \bar{\Psi},$$

dove nei termini della  $\bar{\Psi}$  ogni differenziale figura assieme all'associato. Ciò intanto è assurdo se il grado  $l+1$  di  $\Psi$  è dispari, a meno che non sia  $\bar{\Psi} = 0$ ; ed allora il teorema è dimostrato. Se poi  $l+1$  è pari  $=2\lambda$  la questione è ricondotta alla  $\bar{\Psi}$  (che d'ora in poi scriveremo di nuovo  $\Psi'$ ) la quale è una forma di grado  $\lambda$  nelle  $\omega_i$ .

**11.** - Premetteremo anche alla trattazione del caso restante un'osservazione geometrica: Uno spazio  $S_t$  totale per un complesso generale di rette d'un  $S_n$ , per cui sia  $2t \leq n-3$  sta sempre in un  $S_{t+1}$  totale.

Ragioneremo nel caso, che a noi interessa, in cui  $n$  è dispari, quindi il sistema nullo legato al complesso non è degenere (singolare); però il ragionamento, completato da qualche avvertenza, vale anche per  $n$  pari.

Tutto si riduce ad osservare che la condizione affinché (nel caso del complesso generico) un  $S_t$  sia totale è ch'esso sia contenuto nello  $S_{n-t-1}$  polare. Allora è facile vedere che ogni  $S_{t+1}$  condotto per lo  $S_t$  nello  $S_{n-t-1}$  (e, per la disuguaglianza di condizione, un tale  $S_{t+1}$  non invade tutto lo  $S_{n-t-1}$ ) giace pure nel proprio  $S_{n-t-2}$  polare (o, nel caso estremo, coincide con esso) quindi è pure totale. Invero, se  $P$  è un punto generico dello  $S_{t+1}$ , il suo iperpiano polare passa per  $P$  e per lo  $S_t$  (perchè  $P$

sta in  $S_{n-t-1}$ ) dunque contiene lo  $S_{t+1}$ . In definitiva questo spazio è contenuto negli'iperpiani polari di tutti i suoi punti, quindi nella loro intersezione, ch'è il relativo  $S_{n-t-2}$  polare.

Applicando ripetutamente l'osservazione, se ne deduce che un  $S_t$  totale sta sempre in un  $S_{t+h}$  totale con  $h \leq \frac{n-1}{2} - t$ .

Sbrigata l'osservazione, torniamo alla nostra  $\Psi$ , di grado  $\lambda$  nelle  $\omega_i$  (e di grado  $l+1 = 2\lambda$  nelle  $dx_i$ ) e mettiamo in evidenza i termini che contengono  $\omega_p$  scrivendo

$$(26) \quad \Psi = \omega_p \Psi_1 + \Omega,$$

dove  $\Psi_1$  ed  $\Omega$  non contengono  $\omega_p$ . Indicando, come prima, con  $\bar{\Psi}$  la forma dedotta da  $\Psi$  col sopprimervi i termini che contengono  $dx_p$ , con che sparisce anche  $dx_{2p}$ , nè deduciamo

$$\bar{\Psi} = \Omega,$$

onde, nello  $S_{2p-2}$  rappresentato da  $x_p = x_{2p} = 0$  il complesso  $\Omega$  dovrà come  $\bar{\Psi}$  (ch'è il complesso indotto da  $\Psi$ ) contenere tutti gli  $S_l$  totali di  $\omega$  ivi giacenti (ove ve ne siano) cioè tutti gli  $S_l$  totali di  $\bar{\omega} = \omega - \omega_p$ . Se  $l < p-1$  (quindi  $\leq p'-1$  ove si ponga  $p' = p-1$  con che la dimensione dell'ambiente è  $2p'-1$ ) sono soddisfatte le condizioni sotto cui il teorema è stato ammesso per  $p' = p-1$ , e pertanto

$$(27) \quad \Omega = \bar{\omega} \Gamma = (\omega - \omega_p) \Gamma,$$

quindi, sostituendo nella (26)

$$(28) \quad \Psi = \omega \Gamma + \omega_p \Phi,$$

dove  $\Phi = \Psi_1 - \Gamma$  non contiene  $\omega_p$ .

Quando  $l = p-1$  non è più applicabile l'induzione, ma la (27) e la sua conseguenza (28) sussistono ancora in forza del Lemma al n. 7. Difatti allora  $p = l+1 = 2\lambda$  è pari, e la  $\Omega$  è una forma di grado  $\lambda$  in  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\lambda-1}$ .

Poichè i complessi  $\Psi$  ed  $\omega\Gamma$  contengono tutti gli  $S_l$  totali di  $\omega$  (il primo per ipotesi, il secondo per il teorema del n. 6)



così, stante la (28), lo stesso dovrà accadere per il complesso  $\omega_p \Phi = dx_p d\tau_{2p} \Phi$ . Questo è formato (cfr. la nota (16)) dagli  $S_l$  che tagliano lo spazio  $x_p = x_{2p} = 0$  in  $S_{l-2}$  del complesso  $\Phi$ ; e poichè ogni  $S_l$  totale di  $\omega$ , il quale, come si è visto, appartiene ad  $\omega \Phi$  sega ivi (in generale) un  $S_{l-2}$  totale per il complesso  $\bar{\omega}$  indotto da  $\omega$ , e, viceversa, per quel che s'è osservato in principio del n., ogni  $S_{l-2}$  siffatto sta in qualche  $S_l$  totale di  $\omega$ , così si conclude che  $\Phi$  dovrà contenere tutti  $S_{l-2}$  totali di  $\bar{\omega}$ .

Ma per  $\bar{\omega}$  e  $\Phi$  siamo nel caso di  $p' = p - 1$ ,  $l' = l - 2 < p' - 1$ , quindi sarà

$$\Phi = \bar{\omega} \Lambda,$$

ed infine, sostituendo nella (28) e tenendo presente che  $\omega_p \bar{\omega} = \omega_p \omega$

$$\Psi = \omega (\Gamma + \omega_p \Lambda),$$

con che il teorema è dimostrato.

## § 5. - Confronti ed osservazioni finali.

**12.** - Ritornando all'ordine d'idee del § 1, abbiamo dunque assodato che per una matrice riemanniana  $\omega$  del tipo più generale il numero  $\sigma_\nu$  di  $\nu_\nu$  indipendenti a coefficienti interi (ammesse dalla matrice) cioè il numero di cicli  $\nu$ -dimensionali indipendenti, ai quali gl'integrali  $\nu$ -pli di 1<sup>a</sup> specie della  $V_p$  (legata ad  $\omega$ ) hanno periodi nulli; vale  $\binom{2p}{\nu-2} = R_{\nu-2}$ .

Abbiamo già avvertito che la questione è stata brevemente considerata dal LEFSCHETZ; il quale però espone in dettaglio le regole del computo, solo per  $\nu = p$ , mentre per  $\nu < p$  si limita ad enunciare una conclusione la quale fornisce indirettamente il valore di  $\sigma_\nu$ .

Comunque, siccome i valori del LEFSCHETZ non coincidono con quelli assegnati dal Dr. MORIN, e qui riottenuti (17), troviamo

(17) La constatazione della discordanza è dovuta al Dr. MORIN, al quale

non superfluo ricordare il suo procedimento, ed analizzarne in un caso particolare le conclusioni, nei confronti con le nostre :

Si *normalizzi* la matrice  $\omega$  riducendo l'unica  $\varphi_2$  (principale) che le appartiene, alla *forma normale di FROBENIUS*, e scegliendo parametri  $u_i$  normali. Supposti, per semplicità, i divisori della  $\varphi_2$  unitari, il che non tocca la sostanza del procedimento in discussione, la  $\varphi_2$  normale sarà, colle notazioni differenziali dei §§ precedenti

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_p,$$

e la matrice normale

$$(29) \quad \omega = \| 1 | \tau \|,$$

dove con 1 s'indica la matrice identica d'ordine  $p$ , e con  $\tau$  una matrice quadrata *simmetrica*  $\| \tau_{ik} \|$  pure d'ordine  $p$ . Ora si avverte subito col LEFSCHETZ, che l'eguaglianza di due minori simmetrici d'ordine arbitrario della matrice  $\tau$ , può scriversi come una relazione lineare fra i determinanti d'ordine  $p$  estratti dalla matrice (29), quindi dà luogo ad una  $\varphi_p$ . Così, per fare un esempio la relazione  $\tau_{12} = \tau_{21}$  (eguaglianza tra due minori del 1° ordine) può scriversi

$$X_{p+1, 1, 3, \dots, p} + X_{p+2, 2, 3, \dots, p} = 0,$$

col noto significato delle notazioni. Le  $\varphi_p$  costruite con tal procedimento sono, come mostra un facile computo, in numero di

$$(30) \quad \sigma'_p = \frac{1}{2} \binom{2p}{p} - 2^{p-1},$$

ch'è appunto il valore assegnato da LEFSCHETZ per  $\sigma_p$ , in base

lo scrivente aveva comunicato il valore assegnato dal LEFSCHETZ per  $\sigma_p$ . Non v'ha quasi bisogno di dichiarare che la lieve incrinatura che qui si rileva non intacca la poderosa mole delle Memorie dell'illustre collega ed amico, coronate dal *premio BORDIN*, tanto più in quanto non interferisce con risultati essenziali.

alla presunzione che ogni altra  $\varphi_p$  dipenda linearmente da quelle così ottenute. Ma tale presunzione è manchevole.

Si verifica subito, che per  $p < 3$  è sempre  $\sigma_p > \sigma'_p$ , cosicchè col procedimento ora ricordato si perdono delle  $\varphi_p$ . Val la pena di esaminare, anche per controllo delle nostre conclusioni, il caso più semplice  $p = 4$ , nel quale il nostro computo dà 28  $\varphi_p$  mentre quello di LEFSCHETZ, ne porge solo 27.

Modificando le precedenti notazioni, poniamo  $\omega_{ik} = dx_i dx_k$ , e conformemente scriviamo

$$(31) \quad \omega = \omega_{15} + \omega_{26} + \omega_{37} + \omega_{48},$$

allora, secondo quel che ci apprende il precedente discorso, le 28  $\varphi_4$  indipendenti si possono (nella notazione differenziale) identificare colle

$$(32) \quad \omega \omega_{ik},$$

dove gl'indici  $i, k$  descrivono le 28 combinazioni binarie di 8 elementi.

Verifichiamo direttamente l'indipendenza delle (32).

A calcoli fatti si vede che 24 delle  $\omega \omega_{ik}$  sono a due termini, così ad esempio la  $\omega \omega_{12}$  è

$$\omega_{12} \omega_{37} + \omega_{12} \omega_{48},$$

o, coll'altra scrittura

$$X_{1237} + X_{1248},$$

mentre le rimanenti 4, specificamente le

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{15} = \omega \omega_{15} = \omega_{15} \omega_{26} + \omega_{15} \omega_{37} + \omega_{15} \omega_{48} \\ \varphi_{26} = \omega \omega_{26} = \omega_{26} \omega_{15} + \omega_{26} \omega_{37} + \omega_{26} \omega_{48} \\ \varphi_{37} = \omega \omega_{37} = \omega_{37} \omega_{15} + \omega_{37} \omega_{26} + \omega_{37} \omega_{48} \\ \varphi_{48} = \omega \omega_{48} = \omega_{48} \omega_{15} + \omega_{48} \omega_{26} + \omega_{48} \omega_{37}, \end{array} \right.$$

sono invece a tre termini.

Nelle 24 forme a 2 termini figurano 48 determinanti di 4°

ordine (o, se si vuole, prodotti di differenziali) tutti differenti; dunque non v'ha dubbio circa la loro indipendenza. Infine i sei determinanti  $X_{1526}$ ,  $X_{1537}$ ,  $X_{1548}$ ,  $X_{2637}$ ,  $X_{2648}$ ,  $X_{3748}$  che figurano nelle (33) son diversi dai precedenti, e l'indipendenza delle (33) stesse si controlla elementarmente.

Le 24 forme a due termini rientrano tutte nel computo del LEFSCHETZ (d'altronde tutte le sue forme sono a due termini) e precisamente, esponendo solo il fattore  $\omega_{4k}$  della (32), restano così raggruppate

$$\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{23}, \omega_{24}, \omega_{34}$$

$$\omega_{56}, \omega_{57}, \omega_{58}, \omega_{67}, \omega_{68}, \omega_{78}$$

$$\omega_{16}, \omega_{17}, \omega_{18}, \omega_{25}, \omega_{27}, \omega_{28}, \omega_{35}, \omega_{36}, \omega_{38}, \omega_{45}, \omega_{46}, \omega_{47},$$

il primo gruppo contenendo le forme che esprimono l'eguaglianza degli *elementi* simmetrici della matrice  $\tau$ , il secondo quella dei *minori del 3° ordine*, il terzo quella dei *minori del secondo ordine*, esclusi i sei che stanno intorno alla diagonale secondaria. L'eguaglianza a coppie di quest'ultimi, porge le altre tre forme del LEFSCHETZ che son le seguenti combinazioni lineari (in definitiva a due termini) delle (33)

$$\varphi_{15} + \varphi_{26} - \varphi_{37} - \varphi_{48}$$

$$\varphi_{15} + \varphi_{37} - \varphi_{26} - \varphi_{48}$$

$$\varphi_{15} + \varphi_{48} - \varphi_{26} - \varphi_{37},$$

cosicchè in definitiva delle 28 forme  $\varphi_k$  indipendenti, 27 possono scegliersi a 2 termini ed una a 3 termini; e quest'ultima appunto è sfuggita al LEFSCHETZ <sup>(18)</sup>.

**13.** — Le conseguenze che il LEFSCHETZ deduce dal suo computo (limitandosi ad enunciarle per  $v \neq p$ ) e che pertanto convien rettificare, risguardano i valori dei caratteri  $\rho_v$ ,  $\rho_v^0 = R_v - R_{v-2} - \rho_v$ .

<sup>(18)</sup> I 54 determinanti di 4° ordine che compariscono nelle 27 relazioni a due termini sono tutti differenti; perciò nessuna loro combinazione lineare può essere a 3 termini.

Quest'ultimo dà il numero degli integrali  $\nu$ -pli di 2<sup>a</sup> specie indipendenti della  $V_p$  <sup>(19)</sup>.

Per una  $V_p$  abeliana generale tutte scende dalla disuguaglianza

$$(34) \quad \sigma_\nu \geq \rho_\nu + R_{\nu-2} - R_{\nu-4} + R_{\nu-6} \dots ,$$

fondata sopra un precedente teorema dell'  $A$  <sup>(20)</sup>, secondo il quale esistono sempre almeno  $\rho_\nu + R_{\nu-2} - R_{\nu-4} + R_{\nu-6} \dots$  cicli  $\nu$ -dimensionali, relativamente ai quali gl'integrali  $\nu$ -pli di 1<sup>a</sup> specie danno periodi nulli. Per  $\nu = p$ , sostituendo il valore di  $\sigma_\nu$  dato dalla (30), che si riscontra facilmente essere uguale a

$$R_{p-2} - R_{p-4} + R_{p-6} \dots ,$$

il LEFSCHETZ trova che  $\rho_p = 0$ . Per  $\nu \neq p$  l' $A$  si accontenta solo di affermare che « una discussione analoga quantunque alquanto

<sup>(19)</sup> Il numero  $\rho_\nu$  si definisce topologicamente come segue: Sia  $C$  una  $V_{p-1}$  algebrica in  $V_p$  pensata come riemanniana entro a quella di  $V_p$ . Un ciclo  $\nu$ -dimensionale  $\Gamma_\nu$  ci dica *effettivo* rispetto a  $C$ , se, previa eventuale variazione di  $\Gamma_\nu$  entro la totalità dei cicli ad esso omologhi, e di  $C$  entro al sistema algebrico che la contiene, si può far sì che  $\Gamma_\nu$  e  $C$  non abbiano punti comuni. Quando  $C$  è sufficientemente generale il numero dei  $\Gamma_\nu$  indipendenti, effettivi rispetto ad essa, è  $R'_\nu = R_\nu - R_{\nu-2}$ . Se invece d'una  $C$  si considera un insieme d'un numero arbitrario di  $V_{p-1}$  qualunque, il numero dei  $\Gamma_\nu$  indipendenti che sono effettivi rispetto a *tutte* quelle  $C$ , sarà  $R'_\nu - r_\nu$  con  $r_\nu \leq R'_\nu$ : il massimo di  $r_\nu$ , quando si considerano tutti gl'insiemi possibili è precisamente  $\rho_\nu$  (e  $\rho_\nu^0$  è il minimo di  $R'_\nu - r_\nu$ ). In particolare per  $\nu = 2$ ,  $\rho_2 + 1$  è il numero  $\rho$  di PICARD-SEVERI.

Circa il legame tra  $\rho_\nu$  e il numero degli integrali  $\nu$ -pli di 2<sup>a</sup> specie, vedasi l'altra Memoria del LEFSCHETZ, *Sur les intégrales multiples des variétés algébriques* [Journal de Mathématiques, t. III (1924) pp. 319-343].

Nell'occasione crediamo di dover avvertire che nell'articolo *Géométrie sur les surfaces et les variétés algébriques* [Mémoires des Sciences mathématiques XL] l' $A$ . ha modificato leggermente le notazioni, ed indica (nn. 36, 37) con  $\rho_\nu$  quello che rispetto alla primitiva (e qui conservata) notazione, è  $R_{\nu-2} + \rho_\nu$ .

<sup>(20)</sup> Loco cit. (1), n. 16.

più complicata che non abbiamo sviluppata in dettaglio, conduce senza dubbio alla  $\rho_v = 0$ ; e ciò implicherebbe che fosse

$$\sigma_v = R_{v-2} - R_{v-4} + R_{v-6} \dots,$$

mentre come sappiamo il valore di  $\sigma_v$  è dato dal primo termine. Con tal valore la (34) porge

$$(35) \quad \rho_v \leq R_{v-4} - R_{v-6} + \dots$$

ed in tal senso va dunque rettificata la conclusione  $\rho_v = 0$  del LEFSCHETZ. Se ne deduce per  $\rho_v^0$  che

$$(36) \quad \rho_v^0 \geq R_v - R_{v-2} - R_{v-4} + R_{v-6} - R_{v-8} \dots$$

Quando la  $V_p$  ammette un indice di singolarità  $v$ -dimensionale  $k_v$  non nullo, nel 1° membro della (34) si può scrivere  $\sigma_v + k_v$ , ed allora al posto delle (35) (36) si ottengono le

$$(35') \quad \rho_v \leq k_v + R_{v-4} - R_{v-6} + \dots$$

$$(36') \quad \rho_v^0 \geq R_v - R_{v-2} - k_v - (R_{v-4} - R_{v-6} + \dots)$$

$$\left[ R_v = \binom{2p}{v} \right]$$

la seconda delle quali porge un limite inferiore per il numero degli integrali  $v$ -pli indipendenti di 2ª specie d'una varietà abeliana  $V_p$  con indice di singolarità  $v$ -dimensionale  $k_v$ .

**14.** - Il lungo commento che così si chiude, ha solo sfiorato dei problemi che forse possono meritare l'attenzione dei studiosi.

L'ultima conclusione, espressa formalmente dalla (36'), indica un, sia pure incompleto, significato funzionale dell'indice  $k_v$ ; il quale si consoliderebbe, se, come nel caso  $p = v = 2$ , quella formula si potesse convertire, in un'eguaglianza. Ma forse — il significato di  $k_2$  per l'esistenza di funzioni intermedie è suggestivo — sull'argomento del significato funzionale di  $k_v$  c'è qualche altra parola da dire.

Comunque, anche dal punto di vista più strettamente arit-

metico, una teoria degl' indici di singolarità pluridimensionali delle matrici riemanniane non sembra priva d' interesse. La concatenazione è delicata, in quanto ogni indice influisce su quelli di dimensione superiore, per ciò che l' esistenza d' una  $\varphi_\mu$  appartenente alla matrice  $\omega$  trae seco quella d' un certo numero di  $\varphi_\nu$  ( $\nu > \mu$ ) *conseguenze* della  $\varphi_\mu$ . Già nel caso più semplice di due  $\varphi_2$  indipendenti ( $k_2 = 1$ ) che si possono supporre entrambe generali (in quanto nel loro fascio  $v$  ha sempre una  $\varphi_2$  *principale*) e quindi origini ciascuna d' un sistema di  $\sigma_\nu = \binom{2p}{\nu - 2} \varphi_\nu$  indipendenti, si presenta il problema di determinare quante fra le  $2\sigma_\nu$  forme così ottenute restino in definitiva indipendenti; e non sembra affrettato il prevedere che la conclusione debba dipendere da un *carattere simultaneo* delle due  $\varphi_\nu$ , cioè da un invariante (o da più d' uno) del loro fascio; dopo di che si porrà ancora, per la  $V_p$ , o se essa è jacobiana, per la curva algebrica che le è legata e per i sistemi di corrispondenze generati dalle  $\varphi_2$ , la questione del significato funzionale di quegl' invarianti. Così è da sperare che la teoria delle funzioni abeliane possa ancor suscitare discussioni attraenti.

---