Rendiconti *del* Seminario Matematico *della* Università di Padova

Enea Bortolotti

Nuova esposizione, su basi geometriche, del calcolo assoluto generalizzato del vitali, e applicazione alle geometrie riemanniane di specie superiore

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 2 (1931), p. 164-212

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1931__2__164_0>

NUOVA ESPOSIZIONE, SU BASI GEOMETRICHE, DEL CALCOLO ASSOLUTO GENERALIZZATO DEL VITALI, E APPLICAZIONE ALLE GEOMETRIE RIEMANNIANE DI SPECIE SUPERIORE.

di ENEA BORTOLOTTI a *Cagliari*

PARTE II^a

LE GEOMETRIE RIEMANNIANE DI SPECIE SUPERIORE

CAP. 1° - Geometria intrinseca di una V_n nel gruppo delle applicabilità di specie m.

10. - **Applicabilità o deformazioni di specie m. Condizioni per l'applicabilità di specie m.** Veniamo ad applicare i risultati finora ottenuti allo studio delle proprietà metriche di una varietà riemanniana in cui interviene, insieme ad un punto generico, il suo *intorno di ordine m* sulla varietà, e precisamente, per ora, *allo studio delle varietà riemanniane nel gruppo delle applicabilità* (o deformazioni) *di specie m* qualunque.

Rammenterò che, secondo il BOMPIANI (35), si dicono *deformazioni di specie m di una varietà riemanniana V_n in R_N le trasformazioni di questa che lasciano invariati l'elemento*

(35) Ved. **11**, 1916, p. 628. Ved. anche **7**, 1914, p. 131; **9**, p. 1193; **12** p. 509; **31**, p. 388; **15**.

lineare e le curvature (assolute, cioè, relative all'ambiente R_N), *fino alla* $(m-1)$*-esima inclusa, delle curve tracciate sulla varietà supposta.*

Ebbene: *condizione necessaria e sufficiente perchè due* V_n *siano l'una sull'altra applicabili di specie* m *è che esse possano riferirsi l'una all'altra in modo che, in punti corrispondenti, e secondo elementi d'ordine* m (E_m) [36] *di due curve corrispondenti che ne escano, in relazione ad una* (qualunque) *parametrizzazione comune delle due curve* [37] *risultino eguali i valori delle forme fondamentali complete di specie* m *delle due varietà* (n. prec.). In altre parole: che esista una trasformazione (3) delle coordinate curvilinee tale che, essendo $a_{\alpha,\beta}$ ed $\bar{a}_{\gamma,\delta}$ le componenti, in relazione ai due sistemi coordinati (u^r ed $\bar{u}^r$), dei tensori fondamentali di specie m delle due varietà (n. 2), risulti

$$(130) \qquad a_{\alpha,\beta} = \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha}\frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\beta}\,\bar{a}_{\gamma,\delta} \qquad (\rho_\alpha,\ \rho_\beta,\ \rho_\gamma,\ \rho_\delta \leq m)\ [38].$$

In effetto: anzitutto se sussistono le (130) per ρ_α, ρ_β, ρ_γ, $\rho_\delta \leq m$, tenendo presente che $\dfrac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\alpha} = 0$ per $\rho_\delta > \rho_\alpha$ (form. (6) del n. 1) abbbiamo subito che le (130) sussistono anche per ρ_α, ρ_β, ρ_γ, $\rho_\delta \leq h$, con $1 \leq h \leq m$. Cosicchè se le forme fondamentali complete di specie m, Φ_m e $\bar{\Phi}_m$, sono trasformabili l'una nell'altra, lo stesso avviene (e mediante la stessa trasformazione) per tutte le forme fondamentali complete, Φ_h e $\bar{\Phi}_h$, di specie h, con $1 \leq h \leq m$. Ma conservandosi Φ_1, cioè il ds^2, si conservano le lunghezze d'arco, e in relazione a una qualunque

[36] Secondo BOMPIANI (**5**, 1913, p. 395) dico *elemento d'ordine m*, od E_m, di una curva in un punto l'insieme di questo e degli S_1, S_2, ..., S_m ivi osculatori alla curva.

[37] Data una curva e un suo elemento d'ordine m in un punto, non è corrispondentemente determinato il valore di Φ_n che se si fissa per la curva una *parametrizzazione*, cioè, se si riferiscono i punti della curva ai valori di un parametro.

[38] Cfr., pel caso $n=2$, BOMPIANI, **11**, pp. 630 e seg.

parametrizzazione *comune* di due curve omologhe, si conservano lungo queste $d^2 s$, $d^3 s$, ecc....; poichè inoltre si conserva Φ_2, che calcolata lungo una linea su cui s è la lunghezza d'arco, e $\frac{1}{\rho_1}$ è la prima curvatura, vale $\frac{ds^4}{\rho_1^2} + (d^2 s)^2$, si conserva pure $\frac{1}{\rho_1}$; conservandosi anche Φ_3, ne viene subito che pure la seconda curvatura, $\frac{1}{\rho_2}$, non è alterata dalla trasformazione supposta; infine questa conserva tutte le curvature della linea supposta fino alla $(m-1)$-esima inclusa, e quindi è una applicabilità di specie m.

Viceversa, se una supposta trasformazione della varietà è una applicabilità di specie m, due curve omologhe γ, $\bar{\gamma}$ qualunque risultano fra loro riferite per uguaglianza d'arco, ed hanno pure, in punti corrispondenti, eguali le curvature prime, seconde, ..., $(m-1)$-esime, e (in generale) non le m-esime. Allora in punti corrispondenti e secondo direzioni corrispondenti risultano eguali le forme Φ_1; preso (per semplicità) come parametro su ciascuna delle due curve considerate la lunghezza d'arco, secondo E_2 corrispondenti risultano eguali le forme Φ_2, e così via, fino alle Φ_m che risultano eguali, mentre ciò in generale non può dirsi delle Φ_{m+1}.

Dunque la forma fondamentale completa di specie m, Φ_m, può stare a base di una *geometria intrinseca di specie m*, geometria delle proprietà invarianti per le *applicabilità di specie m*: come nel caso ben noto $m = 1$ [39]. Tali proprietà potranno tutte esprimersi mediante i coefficienti di Φ_m, e viceversa, ogni proprietà intrinseca della V_n che ammetta una rappresentazione analitica in cui figurino le sole $a_{\alpha,\beta}$ $(\rho_\alpha, \rho_\beta \leq m)$ (e loro derivate) sarà una proprietà intrinseca di specie m.

Ma prima di venire ad occuparci di queste proprietà premettiamo alcune considerazioni circa la *determinazione intrinseca* di una varietà nel gruppo delle applicabilità di specie m.

(39) Le applicabilità di specie 1 sono, naturalmente, le ordinarie applicabilità (metriche).

È possibile, e manifestamente opportuno, cercare di sostituire alla forma Φ_m, che è *d'ordine* m, delle forme differenziali *del 1º ordine*. Precisamente, possiamo sostituire alla forma Φ_m le seguenti forme differenziali del primo ordine e dei gradi $2, 4, \ldots, 2m$ (*forme fondamentali semplici* 1ª, 2ª, ..., m-esima):

$$(131)\quad \begin{cases} \varphi_2 = \underset{1}{E}_{r,\,s}\, du^r\, du^s\,, \\ \varphi_4 = \underset{2}{E}_{r_1 r_2 .\, s_1 s_2}\, du^{r_1} du^{r_2} du^{s_1} du^{s_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{2m} = \underset{m}{E}_{r_1 r_2 \ldots r_m .\, s_1 s_2 \ldots s_m}\, du^{r_1} du^{r_2} \ldots du^{r_m} du^{s_1} du^{s_2} \ldots du^{s_m}\,, \end{cases}$$

ove abbiamo posto (ved. n. 5, form. (77),

$$(132)\quad \begin{cases} \underset{1}{E}_{r,\,s} = a_{r,\,s} = P_r \times P_s\,; \\ \underset{h}{E}_{\lambda,\,\mu} = \underset{h-1}{\Omega_\lambda} \times \underset{h-1}{\Omega_\mu} \quad (2 \leq h \leq m\,;\quad \rho_\lambda,\ \rho_\mu \leq h). \end{cases}$$

La forma φ_1 dunque coincide con Φ_1, cioè col ds^2; le $\varphi_4, \varphi_6, \ldots, \varphi_{2m}$ esprimono i quadrati dei moduli dei vettori

$$(133)\qquad \underset{h-1}{\Omega_\chi}\, \delta^h u^\chi = \underset{h-1}{\Omega_\chi}\, \overline{d}^{\,h}_{(h)} u^\chi = \underset{h-1}{\Omega}_{r_1 r_2 \ldots r_h}\, du^{r_1} du^{r_2} \ldots du^{r_h}$$

$$(2 \leq h \leq m: \quad \rho_\chi = h).$$

ove per uniformità abbiamo posto $du^\alpha \left(= \delta^\alpha_r\, du^r\right) = \delta u^\alpha = \overline{d}_{(h)}\, u^\alpha$.

Notando che le (115) dànno, in particolare,

$$(134)\qquad d^h P = \overline{d}^{\,h}_{(h-1)}\, u^\tau\, P_\tau + \overline{d}^{\,(h-1)}_{(h-1)} u^\tau\, \underset{h-1}{\Omega}_{\tau r}\, du^r \qquad (\rho_\tau \leq h - 1)$$

potremo anche dire che la forma φ_{2h} esprime, per $h < 1$, *il quadrato scalare del componente normale a* σ_{h-1} *del vettore* $d^h P$. In particolare per $h = 2$ si ritrova un risultato noto: giacchè la φ_4 non è che la seconda forma fondamentale (del 4º grado), secondo

Bompiani, della V_n in R_N [40], ed è ovvio che questa in ciascun punto e direzione vale appunto *il quadrato della curvatura normale* (comune) delle curve uscenti dal punto considerato secondo la supposta direzione.

Verifichiamo subito che se, in una trasformazione, si conserva la forma completa Φ_m, si conservano pure le forme di 1° ordine $\varphi_2, \varphi_4, \ldots, \varphi_{2m}$; e reciprocamente.

Infatti: si ha subito, per le (134), facendone i quadrati scalari e tenendo presenti le (128),

$$(135)\quad \left\{\begin{array}{l} \Phi_2 = a_{rs}\, d^{2}_{(1)} u^r d^{2}_{(1)} u^s + \varphi_4\,, \\[2mm] \Phi_3 = a_{\alpha_2, \beta_2} \overline{d}^{3}_{(2)}\, u^{\alpha_2} \overline{d}^{3}_{(2)}\, u^{\beta_2} + \varphi_6\,, \\[2mm] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2mm] \Phi_m = a_{\alpha_{m-1}, \beta_{m-1}} \overline{d}^{m}_{(m-1)}\, u^{\alpha_{m-1}} \overline{d}^{m}_{(m-1)}\, u^{\beta_{m-1}} + \varphi_{2m}\,, \\[2mm] \qquad\qquad (\rho_{\alpha_h} \leq h\,, \quad h = 1, 2, \ldots, m)\,; \end{array}\right.$$

formule che esprimono semplicemente la relazione pitagorica fra i moduli dei vettori $d^h P$, $h = 2, 3, \ldots, m$, e quelli dei loro componenti secondo i σ_m e normali ai σ_m. Siccome, nota Φ_m, il calcolo assoluto dei tensori a indici $\leq m$ è determinato, vediamo bene che data Φ_m risultano determinate le forme $\varphi_4, \varphi_6, \ldots, \varphi_{2m}$. (È superfluo aggiungere che lo è pure $\varphi_2 = \Phi_1 = ds^2$). Viceversa, date le $\varphi_2, \varphi_4, \ldots, \varphi_{2m}$, è già nota Φ_1, e poi, mediante le (135), successivamente ricaviamo le espressioni delle forme $\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_m$. Ciò prova infine quanto volevamo.

Si noti in particolare che *la forma* φ_4 *del* Bompiani *per una* V_n *in* R_N *ha questo significato: essa, unita all'elemento lineare* ds^2, *determina la* V_n *in* R_N *nel gruppo delle deformazioni di specie* 2 [41].

(40) Ved. **18**, p. 1117 e seg.

(41) La forma φ_4 è dunque sufficiente, unita a φ_2, per esprimere le proprietà (del 2° ordine) che fanno intervenire le prime curvature (scalari) delle curve della varietà in un punto generico. E invece non è sufficiente ad esprimere *tutte le proprietà del 2° ordine*, nell'enunciato delle quali

Le $\underset{h}{F}_{r_1 r_2 \dots r_h\,,\, s_1 s_2 \dots s_h}$ sono componenti di tensori d'ordine $2h$ (a indici di classe 1) simmetrici rispetto ad $r_1 r_2 \dots r_h$ e ad $s_1 s_2 \dots s_h$. Ma nelle (131) a tali tensori conviene sostituire i tensori ottenuti *mischiando* rispetto a tutti gli indici; *le componenti di questi* saranno da considerare come i coefficienti delle corrispondenti forme φ_{2h}. Per individuare la V_n nel gruppo delle applicabilità di specie m si dovranno dunque assegnare (in relazione a un supposto sistema coordinato) tali coefficienti

$$(136)\qquad \underset{h}{F'}_{r_1 r_2 \dots r_h s\, s_2 \dots s_h} = \underset{h}{F}_{(r_1 r_2 \dots r_h\,,\, s_1 s_2 \dots s_h)}\,,$$

in numero di $\binom{n+2m-1}{2m}$. Però se $h>1$ tali coefficienti $\underset{h}{F'}_{r_1 r_2 \dots r_h\, s_1 s_2 \dots s_h}$ non si potranno assegnare *tutti ad arbitrio*, perchè fra di essi sussistono delle relazioni necessarie; conseguenza delle relazioni fra le $a_{\alpha,\beta}$ $(\rho_\alpha, \rho_\beta \leq m)$ di cui diremo fra breve (n. seg.).

Abbiamo già osservato (all'inizio del n. 2) come i coefficienti $a_{\alpha,\beta}$ delle forme fondamentali complete pel caso $(n=2)$ delle superficie non differiscano che per la notazione dai simboli $I_{hk,\,h_1 k_1}$ di E. E. Levi (**2**, p. 8) o $[h\,k\,h_1 k_1]$ del Bompiani (**11**, p. 629). Già il Bompiani aveva osservato (**11**, p. 630 e seg.) che una superficie può individuarsi a meno di deformazioni di specie m mediante i corrispondenti simboli $[h\,k\,h_1 k_1]$ [42], e anzi, appunto per effetto di certe relazioni che sussistono fra questi, mediante l'assegnazione di alcuni soltanto di questi simboli, di quelli che egli chiama i simboli *fondamentali* (**11**, p. 632). Di

possono intervenire, oltre ai *moduli*, anche le *direzioni* dei vettori di curvatura normale. In questo senso va certamente intesa una affermazione del Cartan circa la forma φ_4 (**23**, 1925, p. 46, cfr. p. 44).

[42] Il Levi si vale invece dei simboli $I_{hk,\,h_1 k_1}$ pel problema della determinazione di una superficie di R_N nel gruppo dei movimenti di R_N. Ma questo problema non è, in sostanza, che un caso particolare di quello poi studiato dal Bompiani e qui ripreso in considerazione: in quanto, per m sufficientemente grande, le deformazioni di specie m di una superficie (o varietà) entro un ambiente euclideo di assegnata dimensione N si riducono ai movimenti.

questi ultimi egli si serve per formare un sistema di forme differenziali del 1° ordine e dei gradi 2, 4,..., $2m$ ("forme fondamentali di specie 1, 2,..., m,,); invarianti per deformazione di specie m ma non per trasformazione delle coordinate curvilinee. In un secondo tempo (ved. **15**, Nota 1, 1919, p. 256) il BOMPIANI ha sostituito a quello ora detto un altro sistema di forme differenziali, $L_1^2, L_2^2, ..., L_m^2$, pure del 1° ordine e dei gradi 2, 4,... $2m$, come le precedenti atte a individuare la superficie nel gruppo delle applicabilità di specie m, ma invarianti anche pei mutamenti delle coordinate curvilinee: appunto come le nostre $\varphi_2, \varphi_4, \ldots, \varphi_{2m}$.

È a priori prevedibile che fra le $L_1^2, L_2^2, \ldots, L_m^2$ e le $\varphi_2, \varphi_4, \ldots, \varphi_{2m}$ abbiano a sussistere semplici relazioni: in effetto si ha

$$L_m^2 = \left(\frac{1}{m\,!}\right)^2 \varphi_{2m} \tag{137}$$

come si vede, nel modo più semplice, paragonando il significato geometrico (poco sopra notato) delle nostre φ_{2h} con quello indicato dal BOMPIANI per le forme L_h^2 $(h = 1, 2, \ldots, m)$ [43].

11. - *Condizioni necessarie per l'esistenza di una varietà, della quale sia assegnata la m-esima forma fondamentale completa* Φ_m. Torniamo al caso generale (n qualunque). Abbiamo accennato, poco sopra, all'esistenza di relazioni necessarie fra i coefficienti delle forme fondamentali semplici φ_{2h}, $h = 1, 2, ..., m$, o della forma completa Φ_m: per effetto delle quali (come del resto è a priori prevedibile) non è lecito assegnare le forme φ_{2h} oppure Φ_m in modo del tutto arbitrario.

Precisamente: perchè una forma differenziale quadratica d'ordine m, $\Phi_m = a_{\alpha,\beta}\, \delta^m u^\alpha\, \delta^m u^\beta$, sia la m-esima forma fon-

([43]) La forma L_h^2 esprime il quadrato della distanza di un punto della superficie, preso nell'intorno di ordine h di un punto P, dallo spazio $(h-1)$-osculatore alla superficie in P.

Alle nostre $\varphi_2, \varphi_4, \ldots, \varphi_{2m}$ sono pure equivalenti quelle che W. MAYER chiama "die Formenquadrate,,: $I_1, I_2, \ldots, I_m$ (ved. **100**, pp. 205 e 219, e ulteriore bibliogr. a p. VI). Precisamente, si ha $\varphi_{2h} = ds^{2h} I_h$.

damentale completa di una V_n *è condizione necessaria che le* $a_{\alpha,\beta}$ $(\rho_\alpha, \rho_\beta \leq m)$ *soddisfino alle seguenti relazioni differenziali* ([44]):

$$a)\quad \frac{\partial a_{\lambda,\mu}}{\partial u^r} - a_{\lambda r,\mu} - a_{\lambda,\mu r} = 0 \qquad \rho_\lambda, \rho_\mu \leq m-1$$

$$(138)\quad \begin{cases} b)\quad \dfrac{\partial a_{\lambda,\varkappa r}}{\partial u^s} - \dfrac{\partial a_{\lambda,\varkappa s}}{\partial u^r} + a_{\varkappa s,\lambda r} - a_{\varkappa r,\lambda s} = 0 \\ \qquad\qquad \rho_\lambda \leq m-1;\quad \rho_\varkappa = m-1 \\ c)\quad \dfrac{\partial a_{\varkappa s,\pi t}}{\partial u^r} + \dfrac{\partial a_{\varkappa t,\pi r}}{\partial u^s} + \dfrac{\partial a_{\varkappa r,\pi s}}{\partial u^t} - \dfrac{\partial a_{\varkappa t,\pi s}}{\partial u^r} - \\ \qquad - \dfrac{\partial a_{\varkappa r,\pi t}}{\partial u^s} - \dfrac{\partial a_{\varkappa s,\pi r}}{\partial u^t} = 0, \quad \rho_\varkappa = \rho_\pi = m-1 \ ([45]). \end{cases}$$

Infatti si esprime che $a_{\alpha,\beta}$ $(\rho_\alpha, \rho_\beta \leq m)$ è il tensore fondamentale di specie m della varietà $P = P(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ scrivendo

$$(139)\quad \begin{cases} a)\quad P_\lambda \times P_\mu - a_{\lambda,\mu} = 0 & \rho_\lambda, \rho_\mu \leq m-1, \\ b)\quad P_\lambda \times P_{\varkappa s} - a_{\lambda,\varkappa s} = 0 & \rho_\lambda \leq m-1,\ \rho_\varkappa = m-1 \\ c)\quad P_{\varkappa r} \times P_{\pi s} - a_{\varkappa r,\pi s} = 0 & \rho_\varkappa = \rho_\pi = m-1. \end{cases}$$

([44]) Cfr. (pel caso $n = 2$) LEVI, **2**, pp. 11-17; BOMPIANI, **11**, pp. 630-633; ove sono indicate relazioni che rientrano fra le (138) *a*) e *b*). Le "condizioni di compatibilità degli I in termini finiti" del LEVI (**2**, pp. 9-11) non hanno qui riscontro, come è naturale, in quanto esse si presentano soltanto quali condizioni perchè i $\sigma_{,n}$ osculatori alla superficie abbiano un numero assegnato di dimensioni (o in particolare, perchè la superficie esista in un ambiente euclideo di cui è assegnato il numero delle dimensioni). A queste condizioni avremo occasione d'accennare più oltre: sono le $L_{n,N}$ del n. 15, esprimenti che la caratteristica della matrice $\|a_{\alpha,\beta}\|$ non supera un numero assegnato N.

([45]) Le formule (138) sono riportate anche nella Nota preventiva **92**: sono in questa le (31) di p. 473, ove va corretto un evidente errore di stampa. $\left(\text{V' è fatto uso del simbolo } \dfrac{d}{du^r} \text{ al luogo di } \dfrac{\partial}{\partial u^r}\right)$.

Ora: le (138) si hanno agevolmente *quali conseguenze differenziali delle* (139), supposte soddisfatte.

Anche per altre vie si giunge alle equazioni (138), che appaiono fondamentali nella presente teoria: otteniamo facilmente le (138) *b*) e *c*) quali *condizioni necessarie e sufficienti perchè le espressioni dei simboli di* Christoffel *generalizzati* $C_{\tau,\alpha}\,(\rho_\tau \leq m+1,\ \rho_\alpha \leq m)$ *date dalle* (82) *e* (84) n. 6, *e corrispondenti alle diverse permutazioni delle cifre di* τ, *o di* α, *siano tutte fra loro equivalenti.*

Inoltre: le (138) *a*) *b*) e *c*) si ottengono pure eliminando, dalle equazioni esprimenti il lemma di Ricci generalizzato ((101) n. 7, od (80) n. 6),

$$(140) \qquad \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial u^r} = C_{\alpha r,\beta} + C_{\alpha,\beta r} \qquad \rho_\alpha,\ \rho_\beta \leq m,$$

tutti i simboli di Christoffel generalizzati mediante le loro espressioni (81), (82), (84). Cosicchè:

Dato il tensore covariante, a due indici di classe m, $a_{\alpha,\beta}$, *e definiti mediante le* (81), (82), (84) *i relativi simboli di* Christoffel $C_{\tau,\alpha}$, *le* (138) *sono condizioni necessarie e sufficienti perchè detti simboli (e quindi anche, il corrispondente calcolo assoluto) risultino univocamente determinati, e insieme perchè sussistano, pel supposto tensore* $a_{\alpha,\beta}$, *le formule di* Ricci *generalizzate*, (140) *o* (101).

Infine, come vedremo al n. 15 (cfr. anche n. 12) le (138) *b*) e *c*) (o le equivalenti equazioni invariantive (166) *b*) e *c*) del n. 12) si ottengono come caso particolare delle equazioni di Gauss generalizzate (le (203) del n. 15); anzi le (138) *b*) e *c*), insieme a combinazioni lineari delle (138) *a*), sono tutte e sole [46] *le relazioni fra le sole* $\alpha_{\alpha,\beta}$ che si possono ricavare dalle equazioni fondamentali (di Gauss, di Codazzi, di Kühne generalizzate) esprimenti le condizioni necessarie e sufficienti per

[46] Ciò se si fa astrazione dalle relazioni $L_{n,N}$ in termini finiti già menzionate in una nota precedente, [14]. (Ved. n. 15).

l'esistenza di una varietà di R_N per la quale il tensore $a_{\alpha,\beta}$ e certi altri enti ($\underset{m}{A_{i,r}}$, $\underset{m}{\overset{i}{\omega_\tau}}$: ved. n. 15) siano assegnati.

Concludendo, le (138) si presentano quali condizioni *necessarie e sufficienti* perchè sul tensore $a_{\alpha,\beta}$ si possa basare un calcolo differenziale assoluto, del tipo generale che abbiamo studiato nella Parte I; e quali condizioni *almeno necessarie* perchè tale tensore (come tensore fondamentale di specie m) e tale calcolo assoluto *siano suscettibili di una effettiva realizzazione geometrica*, su di una corrispondente V_n, immersa in uno spazio euclideo a un numero convenientemente grande di dimensioni. (O, se si vuole, nello *spazio hilbertiano*).

L'interesse delle (138) aumenterebbe assai se si potesse affermare che esse sono pure condizioni *sufficienti* per l'esistenza di una V_n su cui $a_{\alpha,\beta}$ sia il tensore fondamentale di specie m, entro uno spazio euclideo a un numero convenientemente grande di dimensioni: di questa proprietà, pel caso generale, non posseggo fino ad ora una dimostrazione soddisfacente.

Vi è un caso assai particolare, ma non del tutto privo d'interesse, in cui il teorema certo sussiste: il caso ($n = 1$) delle curve ([47]). In questo caso le (138) b) e c) si riducono ad identità; e modificate opportunamente le notazioni con lo scrivere u al luogo di u^1, e (cfr. **40**, p. 1204) $P_{[a]}$ al luogo di $P_{11\ldots1} = \dfrac{\partial^a P}{\partial u^a}$ $(a \leq m)$, $a_{[a,b]}$ per $P_{[a]} \times P_{[b]}$, $(a, b \leq m)$, le (138) a) prendono la seguente forma:

$$\frac{\partial a_{[c,d]}}{\partial u} = a_{[c+1,d]} + a_{[c,d+1]}, \qquad (c, d \leq m - 1). \tag{141}$$

Ora: se sono assegnate a priori le $a_{[a,b]}$, $(a, b \leq m)$, le (141) sono condizioni necessarie e sufficienti perchè possa costruirsi in R_N, $N \geq m$, una corrispondente curva sulla quale $a_{[a,b]}$ sia il tensore fondamentale di specie m, si abbia cioè

([47]) Allo studio metrico differenziale delle curve di R_N mediante il calcolo assoluto generalizzato del VITALI è dedicata una ricerca di ALIPRANDI (**40**). Ved. anche VITALI, **65**, pp. 214-222.

$$P_{[a]} \times P_{[b]} = a_{[a,\,b]}\,, \qquad (a,\ b \leq m). \tag{142}$$

La dimostrazione è agevole. Posto $a_{[a,\,b]}(u_0) = a^0_{[a,\,b]}$, essendo $N > m-1$ in infiniti modi possiamo determinare in R_N $m-1$ vettori $P^0_{[1]}, P^0_{[2]}, \ldots, P^0_{[m-1]}$ pei quali si abbia

$$P^0_{[c]} \times P^0_{[d]} = a^0_{[c,\,d]}\,, \qquad c,\, d \leq m-1\,; \tag{143}$$

ricaviamo poi dalle

$$P_{[a]} \times P_{[m]} = a_{[a,\,m]}\,, \qquad a \leq m, \tag{144}$$

risolte rispetto a $P_{[m]}$, un sistema differenziale d'ordine m in $P(u)$; la soluzione di questo sistema che soddisfa alle condizioni iniziali

$$P(u_0) = P^0, \quad P_{[1]}(u_0) = P^0_{[1]}, \ldots, P_{[m-1]}(u_0) = P^0_{[m-1]} \tag{145}$$

(ove P^0 è un punto arbitrario di R_N) soddisfa anche a tutte le (142).

Ho accennato alle linee di questa dimostrazione, relativa al caso assai elementare $n = 1$, m qualunque, perchè penso che una opportuna generalizzazione di questo procedimento dimostrativo e ad un tempo di quello analogo, seguito per l'altro caso particolare $m = 1$, n qualunque (cioè, pel così detto teorema di Schläfli) dal Janet (ved. **28**, 1926; cfr. Cartan, **30**, 1927) possa forse condurre a stabilire in generale la sufficienza delle (138) per l'esistenza di una varietà corrispondente a un assegnato tensore $a_{\alpha,\,\beta}$.

Una dimostrazione di questo tipo, soggetta veramente a certe restrizioni ([48]), ho potuto ottenere pel caso $n = 2$, $m = 2$. Se $m = 2$ le (138) si scrivono

([48]) Anche nella dimostrazione di Janet appaiono restrizioni analoghe (**28**, p. 42); che però sono inessenziali, e in effetto possono togliersi. (Ved. Cartan, **30**). È presumibile che lo stesso possa dirsi per le restrizioni qui sopra accennate.

$$
(146)\quad \left\{
\begin{aligned}
&a)\quad \frac{\partial a_{s,t}}{\partial u^r} - a_{sr,t} - a_{tr,s} = 0,\\
&b)\quad \frac{\partial a_{rs,p}}{\partial u^t} - a_{rs,pt} = \frac{\partial a_{st,p}}{\partial u^r} - a_{st,pr} = \frac{\partial a_{tr,p}}{\partial u^s} - a_{tr,ps},\\
&c)\quad \frac{\partial a_{rs,pq}}{\partial u^t} + \frac{\partial a_{rq,pt}}{\partial u^s} + \frac{\partial a_{rt,ps}}{\partial u^q} - \frac{\partial a_{rq,ps}}{\partial u^t} -\\
&\qquad\qquad - \frac{\partial a_{rt,pq}}{\partial u^s} - \frac{\partial a_{rs,pt}}{\partial u^q} = 0\,;
\end{aligned}
\right.
$$

se poi *anche* $n=2$, le (146) c) si riducono ad identità; le (146) a) sono sei relazioni fra le $a_{\alpha,\beta}$, da cui si possono ricavare, espresse per le $a_{r,s}$, in termini finiti tutte le $a_{rs,t}$ (come del resto è ben naturale, trattandosi degli usuali simboli di CHRISTOFFEL di prima specie):

$$
(147)\quad \left\{
\begin{aligned}
&a_{11,1} = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{1,1}}{\partial u^1},\quad a_{12,1} = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{1,1}}{\partial u^2},\\
&\qquad a_{22,1} = \frac{\partial a_{1,2}}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{2,2}}{\partial u^1},\\
&a_{22,2} = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{2,2}}{\partial u^2},\quad a_{21,2} = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{2,2}}{\partial u^1},\\
&\qquad a_{11,2} = \frac{\partial a_{2,1}}{\partial u^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{1,1}}{\partial u^2}\,;
\end{aligned}
\right.
$$

le (146) b) in forza delle (146) a) e delle loro conseguenze differenziali si riducono a una sola relazione fra le $a_{r,s}$ ed $a_{11,22}$, $a_{12,12}$ (che corrisponde alla classica equazione di GAUSS):

$$
(148)\qquad a_{11,22} - a_{12,12} = \frac{\partial^2 a_{1,2}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{1,1}}{\partial (u^2)^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{2,2}}{\partial (u^1)^2}.
$$

Le (139) poi nel caso attuale si scrivono

$$
(149)\qquad P_r \times P_s = a_{r,s}\,;\quad P_r \times P_{st} = a_{r,st}\,;\quad P_{rs} \times P_{pq} = a_{rs,pq}\,,
$$

$$
r,\ s,\ t,\ p,\ q = 1,\ 2.
$$

Ora: tenute presenti le (147) e (148), dalle (149) e dalle loro conseguenze differenziali possiamo ricavare successivamente cinque gruppi di equazioni, che per brevità non staremo a scrivere, ma che indicheremo semplicemente con A, B, C, D, E: esprimenti i prodotti scalari rispettivamente a fianco indicati (in A, B, per le $a_{\alpha,\beta}$ e loro derivate soltanto; in C, D, E anche per derivate di P, le quali in C sono, rispetto ad u^2, d'ordine non superiore al 1°; in D, d'ordine non superiore al 2°; in E, d'ordine non superiore al 3°):

$$(150)\quad \left|\begin{array}{lllll}
A - 1) & P_1\times P_1, & & & \\
\quad\;\; 2) & P_1\times P_{11}, & P_{11}\times P_{11}; & & \\
B - 1) & P_1\times P_2, & P_2\times P_2, & P_{11}\times P_2, & P_{111}\times P_2, \\
\quad\;\; 2) & P_1\times P_{12}, & P_{12}\times P_{12}, & P_{11}\times P_{12}, & P_{111}\times P_{12}; \\
C & P_1\times P_{22}, & P_2\times P_{22}, & P_{11}\times P_{22}, & P_{12}\times P_{22}, \\
 & P_{22}\times P_{22}, & P_{111}\times P_{22}, & P_{112}\times P_{22}, & P_{1111}\times P_{22}; \\
D & P_1\times P_{222}, & P_2\times P_{222}, & P_{11}\times P_{222}, & P_{12}\times P_{222}, \\
 & P_{22}\times P_{222}, & P_{111}\times P_{222}, & P_{112}\times P_{222}, & P_{1111}\times P_{222}, \\
E & P_1\times P_{2222}, & P_2\times P_{2222}, & P_{11}\times P_{2222}, & P_{12}\times P_{2222}, \\
 & P_{22}\times P_{2222}, & P_{111}\times P_{2222}, & P_{112}\times P_{2222}, & P_{1111}\times P_{2222}.
\end{array}\right.$$

Diamo nelle A, B, C, D un valore iniziale u_0^2 ad u^2: siano A^0, B^0, C^0, D^0, le equazioni così ottenute. Dalle A^0 2), considerate come equazioni differenziali nella funzione $P(u^1, u_0^2)$, assunta la A^0 1) come condizione iniziale (per $u^1 = u_0^1$) possiamo ricavare, in infiniti modi purchè sia $N > 2$, la rappresentazione parametrica $P = P^0(u^1)$, di una linea γ tale che il vettore tangente $P_1^0(u^1) = \frac{\partial P^0}{\partial u^1}$, insieme al suo vettore derivato $P_{11}^0(u^1) = \frac{\partial P_1^0}{\partial u^1}$, $P_{11}^0(u^1) = \frac{\partial P_1^0}{\partial u^1}$, soddisfi a tutte le A^0; otteniamo anche corrispondenti espressioni per $P_{111}^0 = \frac{\partial P_{11}^0}{\partial u^1}, \ldots$ Dalle B^0, poste pei vettori P_1^0, $P_{11}^0, \ldots$ le espressioni ora dette, *se* $N \geq 8$, *almeno nelle ipotesi più generali circa le* $a_{\alpha,\beta}$ (soltanto soddisfacenti alle (147), (148)) è possibile ricavare due vettori $P_2^0(u^1)$, $P_{12}^0(u^1)$ di R_N tali che sia $P_{12}^0(u^1) = \dfrac{\partial P_2^0}{\partial u^1}$: e quindi anche $P_{112}^0, \ldots$. *In generale* i sette vettori P_1^0, P_2^0, P_{11}^0, P_{12}^0, P_{111}^0, P_{112}^0, P_{1111}^0 di R_N risulteranno lungo γ *indipendenti*, e si potrà, fatte le sostituzioni, e sempre nell'ipotesi che sia $N \geq 8$, ricavare $P_{22}^0(u^1)$ dalle C^0. Ancora: in generale questo vettore P_{22}^0 e i sette detti sopra formeranno in R_N ($N \geq 8$) un gruppo di *otto vettori indipendenti*, e si potrà ricavare dalle D^0 un vettore $P_{222}^0(u^1)$; dalle E, analogamente, un sistema differenziale del 4° ordine, risolubile rispetto alle componenti di $P_{2222}(u^1, u^2)$, per la funzione incognita $P(u^1, u^2)$. La soluzione di questo sistema che soddisfa alle condizioni iniziali

$$(151)\qquad P(u^1, u_0^2) = P^0(u^1)\,,\quad P_2(u^1, u_0^2) = P_2^0(u^1)\,,$$
$$P_{22}(u^1, u_0^2) = P_{22}^0(u^1)\,,\quad P_{222}(u^1, u_0^2) = P_{222}^0(u^1)$$

soddisfa a tutte le (149). Dunque: almeno quando non si facciano ulteriori ipotesi circa le $a_{\alpha,\beta}$ $(\rho_\alpha, \rho_\beta \leq 2)$ *le* (147) *e* (148) *risultano condizioni (oltrechè necessarie) sufficienti perchè, in uno spazio euclideo ad almeno 8 dimensioni possa effettivamente costruirsi una superficie per la quale* $a_{\alpha,\beta}$ *sia il tensore fondamentale di 2ª specie.*

In altre parole: *una superficie generica di* R_N *euclideo* (N comunque grande) *è rappresentabile per applicabilità di 2ª specie* (cioè, con conservazione delle lunghezze d'arco e delle prime curvature) *su di uno spazio euclideo ad 8 dimensioni* (cioè: su di una conveniente superficie di R_8).

E probabile che ulteriori ipotesi circa le $a_{\alpha,\beta}$ portino soltanto, eventualmente, ad abbassare il numero (8) di dimensioni di questo ambiente euclideo minimo. (Che in casi particolari, assai facilmente costruibili, vi sia effettivo abbassamento, è ovvio).

Su questo argomento mi propongo di tornare (e spero, con risultati più completi e conclusivi) in altro prossimo lavoro.

12. - **Proprietà intrinseche di specie m di una V_n riemanniana (geometria intrinseca tangenziale).** - Riprendiamo il caso generale (n, m qualunque). Da quanto s'è visto ai nn. prec. (10, 11) ricaviamo che la geometria intrinseca di specie m di una V_n è determinata quando di questa sia assegnato il tensore fondamentale di specie m, tensore simmetrico $a_{\alpha, \beta}$ di σ_m, le cui componenti soddisfano alle condizioni (138). Da un punto di vista analitico, tale geometria *è la teoria degli invarianti della m-esima forma fondamentale completa,* e il corrispondente *calcolo assoluto*, che ha come operatori differenziali $\overline{d}_{(m)}$ e $\underset{(m)}{D_r}$ (nn. 5, 7), ne è il naturale strumento di ricerca. Rammentiamo che esso è *determinato* dalla conoscenza delle $a_{\alpha, \beta}$, pel fatto, a suo tempo stabilito (n. 6), che queste determinano i valori dei simboli $C_{\tau, \alpha}$ ($\rho_\tau \leq m + 1$, $\rho_\alpha \leq m$).

Per bene intendere la vera essenza di questa *geometria intrinseca di specie m* (che diremo, quando occorra distinguerla dalla geometria intrinseca *normale* considerata al n. seg., geometria intrinseca *tangenziale* di specie m per la V_n) conviene riprendere per un momento in esame il caso classico $m = 1$.

Data una X_n, cioè una varietà n-dimensionale, indipendentemente da ogni ipotesi sull'esistenza di un ambiente euclideo R_N in cui la X_n sia immersa, è lecito interpretare geometricamente il fatto analitico, che una qualunque trasformazione sulle coordinate curvilinee u^r induce una trasformazione lineare sui differenziali du^r, *riguardando l'intorno del primo ordine di un punto generico P della X_n come appartenente ad uno spazio affine: lo spazio affine tangente in P alla X_n, $\underset{P}{E_n}$* (Cartan). I vettori (controvarianti o covarianti) della X_n in P sono allora tutti e soli i vettori di $\underset{P}{E_n}$; le componenti ξ^r di un vettore controvariante ξ della X_n in P sono le coordinate cartesiane del punto $Q = P + \xi$ di E_n nel sistema che ha P come origine, e i vettori di componenti $10\ldots0$, $01\ldots0$, ..., $00\ldots1$ come *vettori fondamentali* degli n assi. In questo sistema le du^r sono le coordinate cartesiane del punto P^* della X_n, nell'intorno del 1° ordine di P, avente le coordinate curvilinee $u^r + du^r$.

Se alla X_n si dà una *metrica* riemanniana, cioè, se ne fa una V_n, assegnando un (arbitrario) tensore simmetrico $a_{r,s}$, tale soltanto che sia $|a_{r,s}| \neq 0$, come tensore fondamentale, ossia una forma differenziale quadratica (non specializzata) del 1° ordine, $\Phi_1 = a_{r,s} du^r du^s$, come espressione del ds^2, si fa anche di ciascuno spazio affine tangente $\underset{P}{E_n}$ uno spazio euclideo, $\underset{P}{R_n}$, e insieme, si viene a determinare, mediante il trasporto per equipollenza di Levi-Civita subordinato a Φ_1, un raccordo metrico (cioè, una rappresentazione congruente) fra gli spazi euclidei tangenti in punti infinitamente vicini. Si può anche dire, secondo Cartan, che alla varietà è data una *connessione euclidea* (che chiameremo: *di prima specie*).

Ogni trasformazione puntuale fra due V_n muta gli spazi euclidei tangenti all'una negli spazi euclidei tangenti all'altra: fra di esse le *applicabilità* (di specie 1) sono caratterizzate dal fatto che *esse subordinano delle rappresentazioni congruenti fra spazi affini tangenti in punti omologhi*. Tali rappresentazioni *conservano l'equipollenza* (di prima specie); questa però non è una proprietà *caratteristica* per esse.

Non è difficile ora passare dal caso $m = 1$ al caso generale (m qualunque). Si osserverà anzitutto che una trasformazione sulle u^r induce anche sui differenziali l-esimi di Pascal, $\delta^l u^\lambda (\rho_\lambda \leq l;\ l = 2, 3, \ldots, m$; ved. n. 9, form. (121) o (124)) una trasformazione lineare, di coefficienti $\dfrac{\partial u^\lambda}{\partial \bar{u}^\mu}$ $(\rho_\lambda, \rho_\mu \leq l)$.

Di più; se, scritto per uniformità $\delta^1 u^r$ per du^r, completiamo i sistemi $\delta^l u^\lambda$ $(\rho_\lambda \leq l)$, facendone dei sistemi a un indice di classe m, $\delta^l u^\alpha$ $(\rho_\alpha \leq m)$ col porre $\delta^l u^\alpha = \delta^\alpha_\lambda \delta^l u^\lambda$, (cioè $\delta^l u^\alpha = 0$ per $l < \rho_\alpha \leq m$ (cfr. n. 8)), abbiamo anche, più in generale, che tutte le $\delta^l u^\alpha$, per $1 \leq l \leq m$, e quindi anche le quantità

$$(152) \qquad \xi^\alpha_{(m)} = \delta u^\alpha + \frac{1}{2}\delta^2 u^\alpha + \ldots\ldots + \frac{1}{m!}\delta^m u^\alpha$$

subiscono una stessa trasformazione lineare, di coefficienti

$\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta}$ $(\rho_\alpha, \rho_\beta \leq m)$. Se la X_n esiste in un R_N euclideo, per le (120) le $\xi^\alpha_{(m)}$ sono, nello spazio σ_m (m-osculatore alla V_n nel punto P generico) σ_m-componenti controvarianti del vettore $P^* - P = dP + \frac{1}{2} d^2 P + \ldots + \frac{1}{m!} d^m P$, e quindi anche, sono le coordinate cartesiane (in σ_m) del punto P^* (che è un qualunque punto della varietà nell'intorno di ordine m di P) in un sistema cartesiano di origine P e avente i vettori P_α $(\rho_\alpha \leq m)$ come vettori fondamentali dei ν assi ([49]).

Ma indipendentemente dall'esistenza dell'ambiente euclideo, la proprietà sopra notata a proposito delle $\xi^\alpha_{(m)}$ è sufficiente a permetterci di *riguardare l'intorno dell'ordine m del punto generico P sulla X_n come appartenente ad uno spazio affine*, *che diremo: spazio affine m-osculatore alla X_n in P,* e che indicheremo ancora con σ_m. In questo spazio le $\xi^\alpha_{(m)}$ sono coordinate cartesiane del punto (della X_n) di coordinate curvilinee $u^r + du^r + \frac{1}{2} d^2 u^r + \ldots + \frac{1}{m!} d^m u^r$. Un qualunque sistema controvariante a un indice di classe m, η^α, può considerarsi costituito dalle componenti cartesiane di un vettore η di quello spazio, e le η^α possono pure interpretarsi come coordinate cartesiane, in σ_m, del punto $P + \eta$. Se si assegna un tensore simmetrico $a_{\alpha,\beta}$ a due indici di classe m, tale che le sue componenti soddisfino alle (138), e per la caratteristica μ di $\|a_{\alpha,\beta}\|$ si abbia $n \leq \mu \left(\leq \nu = \binom{n+m}{m} - 1\right)$, e del resto arbitrario, come tensore fondamentale di una metrica, si fa di ciascuno spazio

([49]) Intendiamo qui "sistema cartesiano" in un significato più ampio di quello usuale, in quanto i ν assi possono non essere indipendenti. Essendo P l'origine, e_α i vettori fondamentali dei ν assi, a coordinate di un punto Q si dovranno assumere ν numeri x^α tali che sia $P + x^\alpha\, e_\alpha = Q$. Un punto avrà dunque *infiniti sistemi di coordinate* se i ν assi sono linearmente legati; ciò non porta inconvenienti, ma va tenuto presente.

affine m-osculatore alla varietà uno spazio euclideo a μ dimensioni (e insieme, anche degli spazi l-osculatori, $1 \leq l \leq m$, degli spazi euclidei, e della varietà stessa, una varietà riemanniana). D'altra parte al tensore $a_{\alpha, \beta}$ è subordinato un trasporto (per equipollenza) dei vettori di σ_m, e mediante questo trasporto risulta definito un raccordo metrico (congruente) fra i σ_m relativi a due punti infinitamente vicini della varietà; si può dire allora che a questa è data *una connessione euclidea di specie m.*

Ogni trasformazione puntuale fra due V_n muta gli spazi affini m-osculatori all'una negli spazi affini m-osculatori all'altra; ciò equivale a dire che la trasformazione muta l'intorno d'ordine m di un punto nell'intorno d'ordine m del punto omologo, e sotto questo aspetto la cosa è evidente. Fra le trasformazioni puntuali le applicabilità di specie m sono caratterizzate dal fatto che *esse subordinano delle rappresentazioni congruenti fra gli spazi m-osculatori in punti omologhi.* Tali rappresentazioni conservano l'equipollenza di specie m (proprietà non caratteristica).

In particolare la nozione di equipollenza (o di parallelismo) di specie m (e ovviamente, anche quelle di equipollenza o parallelismo di specie l, $1 \leq l \leq m$) sono nozioni invarianti per applicabilità di specie m, cioè, appartengono alla geometria intrinseca di specie m; naturalmente nello sviluppo di questa avranno quel ruolo fondamentale che nel caso classico ($m = 1$) è tenuto dal parallelismo di Levi-Civita.

Non ci restringeremo, nel seguito, a considerazioni rigorosamente intrinseche di specie m: cioè *torneremo a supporre, in generale,* anche ove questa ipotesi non sia essenziale, *l'esistenza di un ambiente euclideo R_N* in cui la V_n sia immersa.

Curvature di specie m - Nuove leggi di trasporto per le direzioni e i vettori. Oltre alle nozioni, già più volte e anche poco sopra accennate, di equipollenza e parallelismo di specie m, molte altre nozioni e risultati relativi al caso generale, della geometria intrinseca di specie m qualunque, possono ricavarsi quali agevoli estensioni di nozioni e risultati della geometria intrinseca usuale (di specie 1). Ad es.: Data una serie di vettori $\xi(s)$ di σ_m, applicati ai punti di una curva γ di V_n, di cui

s è la lunghezza d' arco, si potrà definire la *curvatura (tangenziale) di specie m della serie* $\xi(s)$ nel seguente modo:

$$(153) \qquad \frac{1}{\rho'_{[m]}} = \operatorname{mod} \frac{d'_{(m)}\xi}{ds} = \sqrt{a_{\alpha,\beta} \frac{\bar{d}_{(m)}\xi^\alpha}{ds} \frac{\bar{d}_{(m)}\xi^\beta}{ds}}, \quad \rho_\alpha, \rho_\beta \leq m ;$$

e anche questa sarà invariante per applicabilità di specie m. Se analogamente chiamiamo *curvatura normale di specie m della serie* $\xi(s)$ la quantità

$$(154) \qquad \frac{1}{\rho''_{[m]}} = \operatorname{mod}\left(\underset{m}{\Omega}_{\alpha r} \xi^\alpha \frac{du^r}{ds}\right) = \sqrt{\underset{m+1}{E}_{\alpha r,\beta s} \xi^\alpha \xi^\beta \frac{du^r}{ds}\frac{du^s}{ds}},$$

e indichiamo con $\frac{1}{\rho_1}$ la (1ª) curvatura ordinaria in R_N, $\operatorname{mod}\frac{d\xi}{ds}$, si ha la relazione pitagorica

$$(155) \qquad \left(\frac{1}{\rho_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{\rho'_{[m]}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho''_{[m]}}\right)^2,$$

e sussistono interpretazioni geometriche analoghe a quelle note pel caso $m = 1$ ([50]). Ad es. $\frac{1}{\rho''_{[m]}}$ indica lo scostarsi della serie di vettori $\xi(s)$, nel punto P considerato, dalle serie dei loro componenti secondo il σ_m osculatore a V_n in P. Si noti che la curvatura normale di specie m di una serie di vettori di σ_m (e non di σ_{m-1}) *non è un elemento intrinseco di specie m, ma lo è di specie m + 1*: tale è dunque anche *la curvatura ordinaria* (in R_N) della serie, che per una serie di vettori di σ_m coincide con la curvatura tangenziale di specie $m + 1$.

In particolare è sempre $\frac{1}{\rho''_{[m]}} = 0$, cioè $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho'_{[m]}}$, per vettori di σ_{m-1} o, a maggior ragione, di σ_h, $1 \leq h \leq m-1$. Per una *curva* di V_n, cioè pel caso in cui la serie $\xi(s)$ è la serie

([50]) Per vettori $\xi(s)$ di V_n, $\frac{1}{\rho'_{[1]}}$ è la *curvatura associata*, secondo Bianchi.

dei vettori unitari tangenti a γ, la curvatura $\frac{1}{\rho'_{[2]}}$ è quella ordinaria, e così tutte le successive $\frac{1}{\rho'_{[h]}}$ $(h > 2)$. Se i vettori $\xi(s)$ sono di $\sigma_h (1 \leq h \leq m)$ la curvatura $\frac{1}{\rho'_{[h]}}$ è invariante per applicabilità di specie $\geq h$.

Si può introdurre come *prima normale principale*, relativa a σ_h, associata alla serie di vettori $\xi(s)$ la direzione di $\frac{d'_{(h)}\xi}{ds}$, e giungere a costruire, se il σ_h osculatore ha $\varkappa$ dimensioni, un sistema principale di $\varkappa$ direzioni due a due ortogonali associate alla serie $\xi(s)$ in ciascun punto di γ, e $\varkappa - 1$ curvature, e ottenere infine un gruppo di *formule di* Frenet generalizzate, tutti gli elementi introdotti essendo invarianti per applicabilità di specie $\geq h$.

Il parallelismo di specie m o $(m, 1)$-parallelismo, porta vettori di σ_m in vettori di σ_m; non porta però, generalmente, vettori di σ_h in vettori di σ_h, per $h < m$; e in particolare, se $m > 1$, non porta vettori di σ_1 (cioè, tangenti a V_n) in vettori di σ_1: ciò può accadere soltanto per particolari vettori, e in particolari classi di varietà, che probabilmente presentano un certo interesse.

Ma si possono definire altre specie di trasporto dei vettori che portano invece sempre vettori di σ_1 in vettori di σ_1, o più in generale, vettori di σ_h in vettori di $\sigma_h (1 \leq h \leq m)$, pure essendo *invarianti per le deformazioni di specie m e non per tutte le deformazioni di specie m* — 1; in particolare, non per tutte le deformazioni di specie h, se $h < m$.

Diciamo *parallelismo di ordine m*, o $(1, m)$*-parallelismo*, o anche *m-parallelismo*, la legge di trasporto di un vettore $\xi(s)$ di V_n lungo una curva γ, $P = P(s)$, definita dalla condizione che l' *m-esima normale principale (assoluta, cioè relativa ad* R_N*) associata alla serie* $\xi(s)$ *lungo* γ *sia, in ciascun punto di questa curva, normale a* σ_1, cioè alla varietà. Se di più nel trasporto si conserva il modulo del vettore trasportato, si dirà che questo varia per $(1, m)$*-equipollenza*, o *equipollenza di ordine m*.

Prima di venire alla rappresentazione analitica di questa legge di trasporto per parallelismo (o equipollenza) di ordine m mostriamo con semplici considerazioni geometriche come una serie di vettori $\xi(s)$ che varino lungo una curva γ di V_n secondo la legge ora detta risulti in effetto determinata quando siano assegnati, in un punto P iniziale di γ, $(s=s_0)$, m vettori arbitrari (indipendenti) di σ_m quali vettore iniziale della serie e vettori derivati: primo, secondo,..., $(m-1)$-esimo di $\xi(s)$ nel punto supposto:

$$(156)\qquad \xi_0=\xi(s_0)\,,\quad \xi_0'=\left(\frac{d\xi}{ds}\right)_{s=s_0},\ \ldots,\quad \xi_0^{(m-1)}=\left(\frac{d^{m-1}\xi}{ds^{m-1}}\right)_{s=s_0}.$$

Per questo premettiamo che, chiamando S_h *osculatore associato* a una serie di vettori $\xi(s)$ di R_N uscenti dai punti di una curva γ, in un punto P di γ, l'S_h di appartenenza del vettore della serie uscente da P e dei vettori derivato primo, secondo,..., $(h-1)$–esimo, si può facilmente dimostrare ([51]) che lo spazio d'appartenenza degli S_{h+1} osculatori associati, in un punto P di γ, alle serie di vettori di V_n uscenti dai punti della data curva γ e aventi in P a comune gli spazi S_1 (cioè: il vettore iniziale), S_2, S_3,..., S_h osculatori associati (o brevemente: aventi in P a comune un elemento E_h' d'ordine $h-1$) è in generale un S_{n+h}, contenente l'E_k' comune e l'S_n tangente in P a V_n. Tale S_{n+h} si potrà dire $(h+1,\, h)$- *osculatore alla* V_n, *lungo* γ, *secondo l'* E_h' *supposto* ([52]).

Ciò premesso: data dunque la curva (direttrice) γ sulla V_n e in un punto iniziale P di γ un elemento E_m' della serie $\xi(s)$ da costruire (in modo che, lungo γ, $\xi(s)$ vari secondo la legge dell'm-parallelismo), la m-esima normale principale associata in P alla serie da costruire è determinata quale intersezione dell'R_{N-n} normale in R_N a V_n in P, e dell'R_n intersezione dell'$R_{n+m}(m+1,\, m)$-osculatore lungo γ in P alla V_n secondo

([51]) Con considerazioni analoghe a quelle seguite dal Bompiani pel caso degli S_{h+1} osculatori a una curva (cioè, pel caso in cui i vettori $\xi(s)$ siano i vettori unitari tangenti a γ). Ved. **5**, 1913, pp. 395-396.

([52]) Cfr. Bompiani, **5**, p. 402. (La corrispondente notazione del Bompiani è $S(h+1,\, h)$).

l'E'_m supposto, e dell'R_{N-m} normale all'E'_m medesimo. Tali spazi R_{N-m} ed R_n s'intersecano in effetto (generalmente) lungo una retta, giacendo entrambi nell'R_{N-1} normale alla direzione iniziale (ξ_0) assegnata per $\xi(s)$ in P, la quale sta nel σ_1 tangente ivi a V_n.

Il fatto che, assegnato un elemento E'_m della serie $\xi(s)$ in un punto di γ, risulta ivi determinata la m-esima normale principale associata e quindi l'elemento E'_{m+1}, è, ovviamente, sufficiente ad assicurarci che quelle condizioni iniziali determinano la serie $\xi(s)$.

Considerazioni analoghe (non le stesse) servono a dimostrare che esiste una e una sola curva Γ *autoparallela per m-parallelismo*, o *m-geodetica*, di V_n uscente da un punto secondo un E'_m assegnato. Tali curve m-geodetiche sono state introdotte dal Bompiani (**31**, 1927, p. 388); il quale pel caso ($n=2$) delle superficie ne ha anche indicato (ibid., p. 388 e seg.) le proprietà più essenziali: in particolare, l'invarianza per deformazioni di specie m.

Veniamo a dare, più in generale, dell'*m-parallelismo* (e insieme, anche dell'm-equipollenza) delle rappresentazioni analitiche, il che in particolare ci porterà appunto a stabilirne il carattere *invariante per deformazioni di specie m*.

Le equazioni dell'm-parallelismo si scrivono assai facilmente in forma vettoriale. Basta esprimere che l'R_{m+1} dei vettori ξ, $d\xi, \ldots, d^m\xi$ è normale a ciascuno degli R_{m+1} determinati dai vettori $P_r = \dfrac{\partial P}{\partial u^r}$, ξ, $d\xi, \ldots, d^{m-1}\xi$, per $r = 1, 2, \ldots, n$. Queste condizioni si scrivono, ricordando la formula per l'angolo di due $(m+1)$-vettori, nel modo seguente:

$$\text{(157)}\qquad \begin{vmatrix} \xi\times P_r & d\xi\times P_r & \ldots\ldots & d^m\xi\times P_r \\ \xi\times\xi & d\xi\times\xi & \ldots\ldots & d^m\xi\times\xi \\ \xi\times d\xi & d\xi\times d\xi & \ldots\ldots & d^m\xi\times d\xi \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi\times d^{m-1}\xi & d\xi\times d^{m-1}\xi & \ldots & d^m\xi\times d^{m-1}\xi \end{vmatrix} = 0\,. \text{ [53]}$$

[53] Si confronti con le equazioni date dal Bompiani per le curve k-geodetiche di una superficie: **31**, 1927, p. 389.

Ora: tenendo presenti le formule (111) - (116) (n. 8), vediamo subito che le (157) si possono anche scrivere nella forma seguente:

$$
(158)\qquad \xi^{\alpha_1}\,\bar d_{(2)}\xi^{\alpha_2}\,\bar d^{2}_{(3)}\xi^{\alpha_3}\dots\bar d^{m-1}_{(m)}\xi^{\alpha_m}
\begin{vmatrix}
\xi_r & \bar d_{(1)}\xi_r & \bar d^{2}_{(2)}\xi_r & \dots & \bar d^{m}_{(m)}\xi_r \\
\xi_{\alpha_1} & \bar d_{(1)}\xi_{\alpha_1} & \bar d^{2}_{(2)}\xi_{\alpha_1} & \dots & \bar d^{m}_{(m)}\xi_{\alpha_1} \\
\xi_{\alpha_2} & \bar d_{(2)}\xi_{\alpha_2} & \bar d^{2}_{(2)}\xi_{\alpha_2} & \dots & \bar d^{m}_{(m)}\xi_{\alpha_2} \\
\xi_{\alpha_3} & \bar d_{(3)}\xi_{\alpha_3} & \bar d^{2}_{(3)}\xi_{\alpha_3} & \dots & \bar d^{m}_{(m)}\xi_{\alpha_3} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\xi_{\alpha_m} & \bar d_{(m)}\xi_{\alpha_m} & \bar d^{2}_{(m)}\xi_{\alpha_m} & \dots & \bar d^{m}_{(m)}\xi_{\alpha_m}
\end{vmatrix} = 0
$$

intendendo, come al n. 8, che la somma rispetto ad $\alpha_h (h=1,\dots,m)$ sia estesa agli stati di α_h pei quali $\rho_{\alpha_h}\leq h$. Nelle (158) non figurano che *elementi invarianti per deformazioni di specie m*; ciò prova quanto volevamo. Le (157), (158) sono equazioni differenziali d'ordine m, lineari nelle derivate m-esime, come era facilmente prevedibile.

Le formule (157) e (158) hanno forma invariante per una trasformazione $\xi^* = \lambda\xi$, con λ funzione scalare arbitraria del punto variabile su V_n: dunque esse sono propriamente atte a definire l'm-parallelismo, cioè il trasporto delle direzioni, ed è sempre lecito aggiungere ad esse la condizione della conservazione dei moduli, ottenendo così la rappresentazione della *m-equipollenza*.

Non possiamo soffermarci più a lungo su questo trasporto delle direzioni e dei vettori di V_n. Aggiungiamo soltanto che le leggi di trasporto che abbiamo chiamato *$(m, 1)$-equipollenza* (pei vettori di σ_m) ed *$(1, m)$-equipollenza* (pei vettori di σ_1) sono i casi estremi di una serie di trasporti, relativi a V_n, dei vettori dei suoi spazi osculatori, *tutti invarianti per applicabilità di specie m.* Il caso generale è costituito dalla legge di trasporto, relativa a V_n e a σ_m, dei vettori di $\sigma_h (h = 1, 2, \dots, m)$ per la quale *la $(m-h+1)$-esima normale principale associata* (relativa all'ambiente R_N) *è normale al σ_h osculatore;* e si conservano i moduli dei vettori trasportati. Una serie di vettori $\xi(s)$ che varino lungo una curva γ di V_n secondo questa legge – che potrà dirsi: $(h,\ m-h+1)$-equipollenza ([54]) – è determinata dall'elemento E'_{m-h+1} d'ordine $m-h$ in un punto iniziale P di γ. Non presenta difficoltà lo scrivere anche per questo trasporto più generale equazioni del tipo (157) o (158), che risultano d'ordine $m-h+1$, e lineari nelle derivate di questo ordine massimo. Su questa e su altre possibili, ulteriori generalizzazioni non aggiungeremo altro nel presente lavoro.

Curvatura riemanniana (tangenziale) di specie m. I trasporti dei vettori e delle direzioni di cui ora (e al n. 4) si è parlato non sono ancora che *elementi* per una costruzione della geometria intrinseca di specie m di una varietà riemanniana. E anzi si comprende come sia veramente essenziale per questo la sola $(m,\ 1)$-equipollenza, che ha d'altra parte la rappresentazione analitica più semplice.

Come nell'ordinaria geometria riemanniana (intrinseca di prima specie) si ricava, secondo LEVI-CIVITA, SCHOUTEN, PÉRÈS, quell'invariante fondamentale che è il tensore di curvatura riemanniana, o di RIEMANN-CHRISTOFFEL, avente per componenti i simboli di RIEMANN, così ora, più in generale, il trasporto ciclico di un vettore di σ_m secondo la legge della $(m,\ 1)$-equipollenza dà luogo, in modo perfettamente analogo, a un tensore a due indici di classe 1 e due indici di classe m, che chiameremo *il tensore di curvatura riemanniana di specie m.* Precisamente si hanno (anche nel caso attuale), pel divario fra i valori iniziali e finali delle componenti (ad es., covarianti) di un vettore ξ di σ_m trasportato per equipollenza, relativa a V_n, di specie m lungo il contorno del parallelegrammo infinitesimo di vertici $P,\ P_1 = P + d_1 P,\ P_{12} = P_{21} = P_1 + d_1 P + d_2 P + \frac{1}{2} d_1 d_2 P,$ $P_2 = P + d_2 P,$ le note formule

$$(159) \qquad D\xi_\alpha = (\bar{d}_{2(m)} \bar{d}_{1(m)} - \bar{d}_{1(m)} \bar{d}_{2(m)})\, \xi_\alpha = - {}_m R'{}_{r,\,s;\,\alpha}^{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \beta}\, \xi_\beta\, d_1 u^r d_2 u^s,$$
$$(\rho_\alpha,\ \rho_\beta \leq m)$$

([54]) Si noti dunque: l'*$(h,\ k)$-equipollenza è invariante per deformazioni di specie $h+k-1$.* Cfr. BOMPIANI, **31**, p. 388.

ove

$$(160)\qquad \underset{m}{R'}{}_{r,s:\alpha}^{\cdot\ \cdot\ \cdot\beta} = \frac{\partial}{\partial u^s} \underset{m}{C}{}^{\beta}_{\alpha r} - \frac{\partial}{\partial u^r} \underset{m}{C}{}^{\beta}_{\alpha s} + \underset{m}{C}{}^{\gamma}_{\alpha r} \underset{m}{C}{}^{\beta}_{\gamma s} - \underset{m}{C}{}^{\gamma}_{\alpha s} \underset{m}{C}{}^{\beta}_{\gamma r}\,.$$

Queste sono le componenti del *tensore di curvatura riemanniana di specie m*, o secondo il VITALI e la Sig.[na] SACILOTTO (che le hanno introdotte, con altra notazione, pel caso normale) *i simboli di* RIEMANN *generalizzati di 2ª specie e di classe m* (ved. **65**, p. 202 e seg.; **50, 51, 98**).

Volendo far uso anche di elementi non intrinseci di specie m alla varietà, e precisamente, del tensore di curvatura euleriana di specie m (n. 5), si può agevolmente ricavare dalle (159) una espressione interessante per le componenti totalmente covarianti $\underset{m}{R'}{}_{r,s;\alpha,\beta}$ ottenuta per altra via (pel caso normale) dal VITALI (**34**, p. 394, caso $m=1$; **65**, p. 202). Abbiamo

$$(\bar d_{2(m)} d_{1(m)} - \bar d_{1(m)} \bar d_{2(m)})\,\xi_\alpha = \bar d_{2(m)} (d_1 \xi \times P_\alpha) - \bar d_{1(m)} (d_2 \xi \times P_\alpha) =$$

$$= d_1 \xi \times \bar d_{2(m)} P_\alpha - d_2 \xi \times \bar d_{1(m)} P_\alpha =$$

$$= (\bar d_{1(m)} P_\beta \times \bar d_{2(m)} P_\alpha - \bar d_{2(m)} P_\beta \times \bar d_{1(m)} P_\alpha)\,\xi^\beta\,, \qquad (\rho_\alpha, \rho_\beta \leq m),$$

e infine, per la (159),

$$(161)\qquad \underset{m}{R'}{}_{r,s:\alpha}^{\cdot\ \cdot\ \cdot\beta}\, d_1 u^r d_2 u^s \xi_\beta =$$

$$= (\underset{(m)}{D_r} P_\alpha \times \underset{(m)}{D_s} P_\beta - \underset{(m)}{D_s} P_\alpha \times \underset{(m)}{D_r} P_\beta)\, d_1 u^r d_2 u^s \xi^\beta\,,$$

e quindi

$$(162)\qquad \underset{m}{R'}{}_{r,s;\alpha,\beta} = \underset{(m)}{D_r} P_\alpha \times \underset{(m)}{D_s} P_\beta - \underset{(m)}{D_s} P_\alpha \times \underset{(m)}{D_r} P_\beta$$

$$= \underset{m}{\Omega}{}_{\alpha r} \times \underset{m}{\Omega}{}_{\beta s} - \underset{m}{\Omega}{}_{\alpha s} \times \underset{m}{\Omega}{}_{\beta r}\,.$$

Questa è l'espressione cui accennavo. Ritroveremo più innanzi (n. 15) le formule ora ottenute sotto altro aspetto, come *equazioni di* Gauss *generalizzate.*

Dalle (160), (45), (101) agevolmente si hanno per $\underset{m}{R'}_{r,s;\alpha,\beta}$ queste altre espressioni, ben note pel caso $m=1$ (ved. **51**, p. 217):

$$(163)\quad \left\{\begin{aligned} &\underset{m}{R'}_{r,s;\alpha,\beta} = \frac{\partial C_{\alpha r,\beta}}{\partial u^s} - \frac{\partial C_{\alpha s,\beta}}{\partial u^r} - \\ &- \underset{m}{a}^{\gamma,\delta}(C_{\alpha r,\gamma}C_{\beta s,\delta} - C_{\alpha s,\gamma}C_{\beta r,\delta}),\quad \rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma, \rho_\delta \leq m. \end{aligned}\right.$$

È interessante notare che le (163) dànno in particolare:

$$(164)\quad \underset{m}{R'}_{r,s;\lambda,\mu} = \frac{\partial a_{\lambda r,\mu}}{\partial u^s} - \frac{\partial a_{\lambda s,\mu}}{\partial u^r} + a_{\lambda s,\mu r} - a_{\lambda r,\mu s}\,.$$

$$\text{per } \rho_\lambda, \rho_\mu \leq m-1\,;$$

$$(165)\quad \left\{\begin{aligned} \underset{m}{R'}_{r,s;\lambda t,\mu} = \frac{1}{2}\Big(&\frac{\partial a_{\lambda t,\mu s}}{\partial u^r} + \frac{\partial a_{\lambda s,\mu r}}{\partial u^t} + \frac{\partial a_{\lambda r,\mu t}}{\partial u^s} - \\ &- \frac{\partial a_{\lambda s,\mu t}}{\partial u^r} - \frac{\partial a_{\lambda r,\mu s}}{\partial u^t} - \frac{\partial a_{\lambda t,\mu r}}{\partial u^s}\Big) \\ &\text{per } \rho_\lambda = \rho_\mu = m-1\,. \end{aligned}\right.$$

Dunque alle (138) *a*), *b*), *c*) del n. 11 possiamo dare questa forma invariantiva semplicissima:

$$(166)\quad \left\{\begin{aligned} &a)\quad \underset{m}{D_r}\, a_{\lambda,\mu} = 0 && \rho_\lambda, \rho_\mu \leq m-1 \\ &b)\quad \underset{m}{R'}_{r,s;\varkappa,\lambda} = 0 && \rho_\lambda \leq m-1,\ \rho_\varkappa = m-1 \\ &c)\quad \underset{m}{R'}_{r,s;\varkappa t,\pi} = 0 && \rho_\varkappa = \rho_\pi = m-1\,. \end{aligned}\right.$$

Su questo avremo occasione di tornare (n. 15).

Si presentano molti problemi interessanti, ma debbo per ora limitarmi ad enunciarne qualcuno: ad es. lo studio delle varietà in cui *si annulla il tensore di curvatura riemanniana di* *specie m* $(m = 2, 3, \ldots)$; lo studio delle relazioni fra questo invariante di curvatura per deformazioni di specie m e certe espressioni pure invarianti introdotte dal BOMPIANI (**15**); la determinazione di un sistema completo di invarianti differenziali di una V_n per le deformazioni medesime.

13. – **Cenno sulla geometria intrinseca normale di specie m. Il tensore di curvatura riemanniana normale di specie m.** Abbiamo definito, al n. 4, il *trasporto per equipollenza, relativo a V_n, dei vettori normali ai suoi σ_m osculatori*, e ne abbiamo dato, al n. 5, la rappresentazione analitica (61), cioè

$$\overline{d}_{(m)} \xi_i = \underset{(m)}{D_r} \xi_i \cdot du^r = d\xi_i - \underset{m}{A_{ijr}} \xi_j du^r = 0 . \tag{167}$$

È evidente che questo trasporto, o gli operatori differenziali $\underset{m}{D_r}$ e $\overline{d}_{(m)}$ che ad esso corrispondono, determinano, per l'ente costituito dalla V_n e dagli spazi normali, nei suoi punti, ai rispettivi σ_m osculatori, una sorta di *geometria a connessione metrica* (euclidea) nel senso più generale, di *parametri* $\underset{m}{A_{ijr}}$. (Cfr. KÖNIG, CARTAN, SCHOUTEN: **17**, **24**, **27**. Ved. anche **90**, **91**). Tale geometria si dirà *geometria intrinseca normale di specie m* per la V_n. (Cfr., pel caso $m = 1$, CARTAN, **23**, p. 46 e seg.).

Una tale geometria, intesa in un senso un po' più generale, si può definire per una V_n anche indipendentemente da ogni ipotesi sull'esistenza della V_n in un ambiente euclideo R_N. Basterà associare (cfr. **90**) al punto generico della V_n un E_p passante per essa, indi assegnare una metrica euclidea non specializzata, e del resto arbitraria, e arbitrariamente variabile da punto a punto della V_n, per gli E_p, facendone così degli spazi euclidei R_p; infine, assegnare un sistema di quantità A_{ijr}, soddisfacenti alle condizioni (86) n. 6 e del resto arbitrarie; le quali rispetto a un sistema di p-uple unitarie e ortogonali di vettori $e^{(i)}(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, $i, j, h = 1, 2, \ldots, p$, prese sugli R_p come elementi di riferimento, potranno interpretarsi come *parametri di una connessione metrica* fra gli R_p associati a punti di V_n infinitamente vicini; cioè, di un trasporto per equipollenza, rappresentato da formule del tipo (167).

Ma anche qui (cfr. n. prec.). supporremo invece senz'altro, per semplicità, la V_n esistente in R_N euclideo.

Se diciamo, per analogia col caso della geometria intrinseca vera e propria (geometria tangenziale), *applicabilità normale di specie m* fra due varietà di V_n una trasformazione che muti i punti della prima nei punti della seconda, e insieme, i vettori normali al σ_n del punto generico della prima nei vettori normali al σ_n nel punto omologo della seconda, in modo da conservare le lunghezze e gli angoli (cioè, la metrica) negli spazi normali ai σ_n, e il trasporto per equipollenza di specie m, relativo a V_n, dei vettori normali ai σ_m, potremo anche dire che *la geometria intrinseca normale di specie m è lo studio delle proprietà invarianti per applicabilità normali di specie m.*

Sia le applicabilità normali di specie m che la corrispondente teoria invariantiva, anche nel caso $m = 1$, non sono state, finora, oggetto di studio, se si escludono alcune osservazioni del CARTAN ([55]) relative appunto al caso $m = 1$, e riguardanti il tensore di curvatura riemanniana normale (intrinseca). Tale tensore è finora l'unico ente di questa geometria intrinseca normale che, se non altro perchè si presenta necessariamente anche in altre ricerche (sulle V_n in relazione con l'ambiente) sia stato preso in considerazione ([56]). Analogamente anche nell'attuale caso più generale (m qualunque) ci limiteremo ad introdurre quello che chiameremo *il tensore di curvatura riemanniana normale di specie m.* Esso ha un ruolo e un'espressione analitica affatto analoghi a quelli del tensore $\underset{m}{R'}{}_{r,s;\alpha}^{\cdots\beta}$ (che si dirà, ove occorra evitare confusioni, tensore di curvatura riemanniana *tangenziale* di specie m). Precisamente: pel trasporto ciclico per equipollenza di specie m relativa a V_n di un vettore ξ normale a σ_n, di componenti (σ_n-ortogonali) ξ_i, lungo il parallelogrammo infinitesimo di vertici P, P_1, P_{12}, P_2, (ved. n. prec.) si ha

$$(168) \qquad D\xi_i = (\bar{d}_{2(m)}\bar{d}_{(1m)} - \bar{d}_{1(m)}\bar{d}_{2(m)})\,\xi_i = -\underset{m}{R''}_{r,s;i,j}\,\xi_j\,d_1u^r\,d_2u^s\,,$$

([55]) **23**, 1925, pp. 47-49.

([56]) All' infuori del trasporto per equipollenza relativo a V_n dei vettori normali ai σ_m, qui definito per m qualunque (n. 4), ma pel caso $m = 1$ già introdotto da me in un lavoro del 1928 (**37**).

ove

$$(169) \qquad \underset{m}{R}{}^{rr}_{r,s;\,i,j} = \frac{\partial}{\partial u^s} \underset{m}{A}_{ijr} - \frac{\partial}{\partial u^r} \underset{m}{A}_{ijs} + \underset{m}{A}_{ikr} \underset{m}{A}_{kjs} - \underset{m}{A}_{iks} \underset{m}{A}_{kjr} .$$

Queste sono appunto le componenti del tensore di curvatura riemanniana normale di specie m, che naturalmente risulta invariante per applicabilità normali di specie m.

CAP. 2° - Proprietà d'ordine m di una varietà V_n in relazione con l'ambiente R_N.

14. - Significato del tensore di curvatura euleriana di specie m; sistemi quasi-coniugati, linee quasi-asintotiche; forma angolare di specie m. Veniamo infine a una rapida scorsa sullo studio delle proprietà di ordine m di una V_n che sono legate all'esistenza di questa in un ambiente euclideo R_N (d'un assegnato numero di dimensioni). Mentre delle geometrie *intrinseche*, tangenziale e normale (di specie m qualunque) stanno a base i trasporti per equipollenza di specie m dei vettori (di σ_m e normali ai σ_m), le relazioni con l'ambiente sono riassunte dal *tensore di curvatura euleriana di specie m*, mediante il quale, come abbiamo visto (n. 5), si completa, per un campo vettoriale qualunque di R_N definito su V_n, il differenziale $d\xi$ quando si conoscano quelli assoluti, di specie m, dei rispettivi componenti secondo σ_m e normale a σ_m.

A questo tensore abbiamo già avuto occasione d'accennare più volte. Abbiamo visto (n. 5, form. (77)) che i vettori $\underset{m}{\Omega}_{\alpha r}$, i quali ne dànno una rappresentazione parzialmente scalare, possono così ottenersi:

$$(170) \qquad \underset{m}{\Omega}_{\alpha r} = \underset{m}{D}_r\, P_\alpha, \qquad (\rho_\alpha \leq m);$$

abbiamo notato che le $\underset{m}{\Omega}_{\alpha r}$ sono tutte nulle per $\rho_\alpha < m$, il che porta (**65**, p. 197) che, sostituendo all'indice composto α ($\rho_\alpha = m$) le sue cifre $r_1 r_2 \dots r_m$, le $\underset{m}{\Omega}_{r_1 r_2 \dots r_m r}$ si possono riguardare come le componenti di un tensore ad $m+1$ indici di covarianza di classe 1. E abbiamo visto infine che, se ξ è un vettore di σ_n, è

$$(171) \qquad \underset{m}{\Omega}_{\alpha r}\, \xi^\alpha\, du^r$$

il componente normale a σ_n *del differenziale* $d\xi$ (calcolato in R_N); il suo modulo è quella che abbiamo chiamato la *curvatura normale di specie* m della serie $\xi(s)$. In particolare, è

$$(172) \qquad \underset{m}{\Omega}_{r_1 r_2 \ldots r_m r}\, du^{r_1} du^{r_2} \ldots\ldots du^{r_m} du^r$$

il componente normale a σ_n di $d^{m+1}P$. Se ξ è un vettore normale a σ_n, è

$$(173) \qquad -a^{\alpha\beta} \underset{m}{\Omega}_{\alpha r} \times \xi\, du^r \cdot P_\beta$$

il componente tangenziale a σ_m del vettore di $d\xi$.

In sostanza *il tensore di curvatura euleriana (di specie* m*) esprime il divario fra i trasporti per equipollenza: ordinaria (in* R_N*) e di specie* m *(tangenziale e normale) relativa a* V_n. (Cfr. **18**, pp. 1114, 1116-1117). L'annullarsi di $\underset{m}{\Omega}_{\alpha r}$ esprime che i due trasporti per equipollenza su V_n coincidono.

Mediante il tensore di curvatura euleriana possiamo ottenere una rappresentazione analitica dei sistemi di linee *quasi-coniugati* $\varkappa_{m,\,m+1}$ [57]; così chiamando un doppio sistema di linee (Γ, M) di V_n tali che in ciascun punto di una linea Γ lo spazio $(m+1)$–osculatore associato, in R_N, alla serie delle direzioni delle linee M che ne escono giaccia nello spazio m–osculatore

[57] Ho studiato in un precedente lavoro (**25**, 1925) i sistemi quasi–coniugati $\varkappa_{1,\,n-1}$ su di una superficie, estendendo ad essi alcune proprietà date dal Bompiani per le linee quasi–asintotiche $\gamma_{1,\,n-1}$ (**10**, 1916). In generale *sistemi quasi–coniugati* $\varkappa_{p,\,q}$ si potranno dire quei doppi sistemi di linee (eventuali) della V_n tali che vi sia una incidenza particolare fra l'S_q osculatore associato alla serie di direzioni delle linee di uno dei due sistemi che escono dai punti di ciascuna linea dell'altro e lo spazio p–osculatore alla varietà. Un'altra estensione della nozione di sistemi coniugati è stata data dal Bompiani (**19**).

in quel punto alla V_n (cioè: giaccia in σ_m la m-esima normale principale associata, in R_N, a quella serie). Tenendo presente la (115), indicato con ξ^r (o, in σ_m, $\xi^\alpha = \delta_r^\alpha \xi^r$, $\rho_\alpha \leq m$) il vettore unitario tangente alla linea Γ generica e con du^r un sistema di differenziali presi lungo la generica linea M, abbiamo subito per gli eventuali sistemi quasi-coniugati $\varkappa_{m,\,m+1}$ di V_n in R_N la seguente rappresentazione analitica:

$$(174) \qquad \underset{m}{\Omega}_{\alpha r}\, \overline{d}_{(m)}^{\,m-1}\, \xi^\alpha\, du^r = 0\,, \qquad \rho_\alpha \leq m,$$

cioè

$$(174)^* \qquad \underset{m}{\Omega}_{r_1 r_2 \dots r_m r}\, \xi^{r_1}\, du^{r_2} \dots du^{r_m}\, du^r = 0\,.$$

Si vede di qui che, *nel solo caso in cui la dimensione del* σ_{m+1} *osculatore a* V_n *superi di* $n-1$ *quella del* σ_m, dato comunque il sistema di linee M esiste, ed è determinato *in modo univoco,* un corrispondente sistema Γ; non però viceversa.

In particolare se diciamo, secondo Bompiani ([58]), *linee quasi-asintotiche* $\gamma_{m,\,m+1}$ le (eventuali) linee della V_n che sono quasi-coniugate $\varkappa_{m,\,m+1}$ a sè stesse, tali cioè che in ogni punto di ciascuna di esse l'S_{m+1} osculatore giaccia nel σ_m ivi osculatore alla varietà (ossia: vi giaccia la m-esima normale principale), avremo che queste linee saranno rappresentate dall'equazione vettoriale

$$(175) \qquad \underset{m}{\Omega}_{\alpha r}\, \overline{d}_{(m)}^{\,m}\, u^\alpha\, du^r = 0\,, \qquad \rho_\alpha \leq m,$$

cioè anche

$$(175) \qquad \underset{m}{\Omega}_{r_1 r_2 \dots r_m r}\, du^{r_1}\, du^{r_2} \dots du^{r_m}\, du^r = 0\,.$$

Per $m = 1$ si ritrova un risultato notissimo; per $m = 2$ si hanno sotto forma lievemente diversa i risultati notati dal Vitali ([59]).

Un altro interessante problema delle relazioni fra varietà ed ambiente è quello dell'*angolo fra due* σ_m *osculatori* in punti infinitamente vicini della varietà ([60]). Per calcolare questo angolo

([58]) Ved. **4**, 1912; ved. anche **5**, **6**, **8**, **10**, **14**, **15**, **16**, **22**, **31**.
([59]) **34**$_r$ p. 428.
([60]) Ved., pel caso $m=1$, **91**, n. 7, nota ([25]).

ci conviene tener presente che esso è uguale a quello degli spazi rispettivamente normali ai due σ_{m}. È immediata l'osservazione che se $\nu(s)$ è una serie di r-vettori ($r = 1, 2, 3, \ldots$) di R_N applicati ai punti di una linea γ, $P = P(s)$, di V_n, la parte principale del quadrato dell'angolo d'inclinazione fra gli r-vettori uscenti dai due punti infinitamente vicini P, $P + dP$ di γ è il quadrato scalare di $d\nu(s)$:

$$(176) \qquad d\theta^2 = d\nu \times d\nu .$$

Nel nostro caso si tratta dei p-vettori (unitari, normali ai σ_m);

$$(177) \qquad \nu = p!\, \underset{m}{\overset{1}{X}} \frown \underset{m}{\overset{2}{X}} \frown \ldots \frown \underset{m}{\overset{p}{X}}, \qquad p = N - \mu,$$

ove $\frown$ è, secondo SCHOUTEN, il simbolo della *moltiplicazione alternata*. Dunque si ha

$$(178) \qquad d\theta^2 = (p!\, {\textstyle\sum_1^p}{}_i\, \underset{m}{\overset{1}{X}} \frown \underset{m}{\overset{2}{X}} \frown \ldots \frown \underset{m}{\overset{i-1}{X}} \frown d\underset{m}{\overset{i}{X}} \frown \underset{m}{\overset{i+1}{X}} \frown \ldots \frown \underset{m}{\overset{p}{X}})^2;$$

ora di qui si ricava subito, ricordando la formula pel prodotto scalare di due p-vettori,

$$d\theta^2 = {\textstyle\sum_1^p}{}_i (d\underset{m}{\overset{i}{X}})^2 - 2 \sum_{(ij)} (d\overset{i}{X} \times \overset{j}{X})^2$$

$\sum_{(ij)}$ essendo estesa alle combinazioni semplici ij della classe 2 di $1, 2, \ldots, p$. Ma per le (68), (62) si ha

$$(180) \qquad d\underset{m}{\overset{i}{X}} = (-\underset{m}{\omega_{\alpha r}}\, \underset{m}{a}^{\alpha,\beta} P_\beta + \underset{m}{A_{ij r}} \underset{m}{\overset{j}{X}})\, du^r, \qquad \rho_\alpha, \rho_\beta \leq m .$$

Sostituendo si ottiene la formula semplicissima

$$(181) \qquad d\theta^2 = \underset{m}{a}^{\alpha,\beta}\, \underset{m}{\Omega_{\alpha r}} \times \underset{m}{\Omega_{\beta s}}\, du^r du^s,$$

ossia

$$(182) \qquad d\theta^2 = \underset{m}{a}^{\alpha,\beta}\, \underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\alpha r}\, \underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\beta s}\, du^r du^s .$$

La forma differenziale quadratica del 1° ordine data dalla (181) o (182) si potrà chiamare *forma angolare di specie m*. Essa nel caso molto particolare in cui sia $N = 3$, $n = 2$, $m = 1$ si riduce *alla terza forma fondamentale di* GAUSS *di una superficie dello spazio ordinario* (ds^2 dell' immagine sferica).

15. - **Condizioni per la subordinazione di una geometria riemanniana intrinseca di specie m alla geometria di un ambiente euclideo di dimensione assegnata; equazioni di HLAVATY, di GAUSS, di CODAZZI, di KÜHNE generalizzate.** Affrontiamo infine il problema fondamentale delle relazioni fra varietà ed ambiente: il problema della subordinazione di una assegnata geometria riemanniana intrinseca (tangenziale e normale) di specie m alla geometria di un ambiente euclideo (di assegnata dimensione). Anche qui la trattazione può svolgersi come pel caso $m=1$: mi limiterò ad accennare le linee essenziali dell'estensione dal caso $m=1$ al caso generale ([64]).

Sia, come al n. 3 (fine), $\xi(P)$ un campo di vettori di R_N applicati ai punti P di V_n e comunque diretti; siano ξ', ξ'' i componenti del vettore ξ generico secondo σ_m e normale a σ_m: onde si avrà per ξ la decomposizione espressa dalla form. (38) n. 3, e analoga decomposizione, la (68) n. 5, avremo per $d\xi$. La (68) può anche scriversi nel modo seguente:

$$(183)\quad \left\{\begin{aligned} d\xi &= \overline{d}_{(m)}\, \xi'^{\alpha} \cdot P_{\alpha} + \underset{m}{\Omega}_{\alpha r}\, \xi'^{\alpha}\, du^{r} - \\ &- \underset{m}{\Omega}_{\beta r} \times \xi\, \underset{m}{a}^{\alpha,\beta}\, P_{\alpha}\, du^{r} + \overline{d}_{(m)}\, \xi''^{i} \cdot \overset{i}{X}. \end{aligned}\right.$$

Introduciamo (cfr. n. 5) il riferimento cartesiano ortogonale x^A in $R_N(A, B, C, D,\dots = 1, 2,\dots, N)$; indichiamo ancora (cfr. (73)) con B^A_{α} le R_N-componenti dei vettori P_α e con $\underset{m}{\Omega}{}_{\alpha r}^{\cdot\cdot A}$ quelle dei vettori

([64]) Mi riferisco, pel caso $m=1$, alla trattazione da me data in un lavoro recente (**91**), ove studio, più in generale, le *varietà a connessione affine* subordinate ad altre varietà della stessa natura.

Gli sviluppi qui sopra esposti (n. 15) hanno qualche punto di contatto con lo studio, pure condotto con assai diverso metodo e da diverso punto di vista, del "Formenproblem", per le varietà di uno spazio euclideo, o riemanniano a curvatura costante, quale è esposto da W. MAYER in un recente trattato (**100**, pp. 201-232; bibliogr. a p. VI). Di questa pubblicazione sono venuto a conoscenza troppo tardi per potere svolgere qui l' interessante raffronto.

$\underset{m}{\Omega}_{\alpha r}$, cioè, del tensore di curvatura euleriana di specie m; analogamente, con C_i^α indichiamo le R_N-componenti dei vettori $\overset{i}{X}$ ([62]). Rammentiamo che

$$(184)\qquad \underset{m}{\Omega}_{\alpha r} = \underset{(m)}{D_r} P_\alpha, \qquad \text{cioè} \quad \underset{m}{\Omega}_{\alpha r}^{\cdot\cdot A} = \underset{(m)}{D_r} C_\alpha^A;$$

poniamo analogamente

$$(185)\qquad \underset{m}{\Pi}_{jr} = \underset{(m)}{D_r} \overset{j}{X} \;([63]) \qquad \text{cioè} \quad \underset{m}{\Pi}_{jr}^{\cdot\cdot A} = \underset{(m)}{D_r} C_j^A .$$

Di qui segue, tenute presenti le (62), (60)

$$(186)\qquad \underset{m}{\Pi}_{ir} \times \overset{j}{X} = 0 \qquad \text{cioè} \quad \Pi_{ir}^{\cdot\cdot A} C_j^A = 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, p;$$

ossia *i vettori* Π_{ir} *giacciono nel* σ_m (cfr. le (76) n. 5). Più precisamente: in conseguenza delle relazioni

$$(187)\qquad P_\gamma \times \overset{j}{X} = 0 \quad (B_\gamma^A C_j^A = 0) \qquad \rho_\gamma \leq m;\ j = 1, 2, \ldots, p$$

si ha

([62]) Scriviamo C_i^A al luogo di $\overset{i}{C}{}^A$ od $\overset{i}{X}{}^A$ perchè vogliamo tener presente il *carattere tensoriale* di queste quantità anche nei riguardi dell'indice i (s'intende: per trasformazione ortogonale sui p vettori $\overset{i}{X}$). Maggiore precisione di notazioni potrebbe ottenersi facendo uso, secondo SCHOUTEN, (ved. **91**, n. 2, nota ([1])) dei vettori fondamentali (*Massvektoren*) relativi ai singoli sistemi di riferimento (in V_n, in σ_m, nell' R_p normale al σ_m) e della "*Abdrosselung*" degli indici. Ad es. si ha $C_i^A = \underset{j}{e}{}_i'' \overset{j}{X}{}^A$, se con $\underset{j}{e}{}_i'' (= \delta_{ij})$ indichiamo le componenti, nel sistema $\overset{j}{X}$, degli stessi vettori $\overset{j}{X}$ di riferimento.

([63]) Qui $\overset{j}{X}$ è considerato formalmente, nei riguardi dell'indice j, come un sistema covariante; in questo senso è ad esso applicato l'operatore $\underset{m}{D_r}$. Così nelle (202). Cfr. n. 5.

$$(188)\qquad \underset{m}{\Omega}_{\gamma r}\times\overset{j}{X}+\underset{m}{\Pi}_{jr}\times P_\gamma=0\qquad(\underset{m}{\Omega}_{\gamma r}^{\cdot\cdot A}\,C_j^A+\underset{m}{\Pi}_{jr}^{\cdot\cdot A}\,B_\gamma^A=0),$$

onde

$$(189)\qquad \overset{\bullet}{\underset{m}{\Pi}}_{jr}=-\underset{m}{a}^{\alpha,\beta}\,\underset{m}{\Omega}_{\beta r}\times\overset{j}{X}\cdot P_\alpha\quad(\underset{m}{\Pi}_{jr}^{\cdot\cdot A}=-\underset{m}{a}^{\alpha,\beta}\,B_\alpha^A\,\Omega_{\beta r}^{\cdot\cdot B}\,C_j^B).$$

Ciò posto, dalle (183) (o anche direttamente dalle (38) n. 3) abbiamo:

$$(190)\qquad \frac{\partial\xi^A}{\partial u^r}=\underset{(m)}{D_r}\,\xi'^\alpha\cdot B_\alpha^A+\underset{m}{\Omega}_{\alpha r}^{\cdot\cdot A}\,\xi'^\alpha+\underset{m}{\Pi}_{ir}^{\cdot\cdot A}\,\xi_i''+\underset{m}{D_r}\,\xi_i''\cdot C_i^A\,.$$

Ora: queste possono riguardarsi come *equazioni differenziali nelle* ξ^A (cfr. **91**, n. 2, fine) considerandovi le B_α^A, C_i^A e le $\underset{m}{\Omega}_{ir}^{\cdot\cdot A}$, $\underset{m}{\Pi}_{ir}^{\cdot\cdot A}$ (date queste dalle (184), (185)) come *funzioni note* delle u^r; è agevole ottenere le *condizioni d'integrabilità*. Deriviamo rispetto ad u^s, indi alterniamo rispetto agli indici r, s; tenute presenti le (159), (168) abbiamo

$$(191)\qquad \left\{\begin{aligned}&\left(\underset{m}{R}'^{\cdot\cdot\cdot\beta}_{r,s;\alpha}\,B_\beta^A+\underset{(m)}{D_s}\,\underset{m}{\Omega}_{\alpha r}^{\cdot\cdot A}-\underset{(m)}{D_r}\,\underset{m}{\Omega}_{\alpha s}^{\cdot\cdot A}\right)\xi'^\alpha+\\&+\left(\underset{m}{R}''_{r,s;ij}\,C_j^A+\underset{(m)}{D_s}\,\underset{m}{\Pi}_{ir}^{\cdot\cdot A}-\underset{(m)}{D_r}\,\underset{m}{\Pi}_{is}^{\cdot\cdot A}\right)\xi_i''=0\ [64].\end{aligned}\right.$$

Perchè le (190) siano completamente integrabili occorre e basta che queste equazioni (191) valgano per *qualunque* campo di vettori $\xi(P)$; cioè, che sia

$$(192)\qquad \left\{\begin{aligned}&\left(\underset{m}{R}'^{\cdot\cdot\cdot\beta}_{r,s;\alpha}\,B_\beta^A+\underset{(m)}{D_s}\,\underset{m}{\Omega}_{\alpha r}^{\cdot\cdot A}-\underset{(m)}{D_r}\,\underset{m}{\Omega}_{\alpha s}^{\cdot\cdot A}\right)\underset{m}{a}^{\alpha,\gamma}\,B_\gamma^B+\\&+\left(\underset{m}{R}''_{r,s;i,j}\,C_j^A+\underset{(m)}{D_s}\,\underset{m}{\Pi}_{ir}^{\cdot\cdot A}-\underset{(m)}{D_r}\,\underset{m}{\Pi}_{is}^{\cdot\cdot A}\right)C_i^B=0,\end{aligned}\right.$$

[64] Qui l'operatore D_r (ved. n. 7, form. (100)) deve intendersi applicato ad $\underset{m}{\Omega}_{\alpha s}^{\cdot\cdot A}$ considerando α ed s come *due indici distinti*, delle classi m ed **1**. La stessa (o analoga) interpretazione è da darsi al simbolo D_r nelle (**192**), (**193**), (194) e nelle (204) (ove i è riguardato come un indice *ordinale*).

o in forma vettoriale

$$(193)\quad \begin{cases} \underset{m}{a}^{\alpha,\beta} P_\gamma \left(\underset{m}{R'}{}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\beta}_{r,s;\alpha} P_\beta + \underset{(m)}{D_s}\, \underset{m}{\Omega}_{\alpha r} - \underset{(m)}{D_r}\, \underset{m}{\Omega}_{\alpha s} \right) + \\ + \overset{i}{X} \left(\underset{m}{R''_{r,}}{}_{s;i,j} \overset{j}{X} + \underset{(m)}{D_s}\, \underset{m}{\Pi}_{ir} - \underset{(m)}{D_r}\, \underset{m}{\Pi}_{is} \right) = 0. \end{cases}$$

Queste sono le cercate condizioni d'integrabilità. Per $m=1$ esse si riducono alle equazioni date (in forma assai diversa, e in ipotesi più generali circa la varietà, più particolari circa i riferimenti) da V. Hlavaty ([65]). I primi membri delle (193) per ciascun sistema di valori di r, s sono *forme bilineari alternate di vettori di* R_N, cioè *somme di bivettori* (*bivettori generali*, secondo Schouten; *sistemi di bivettori*, secondo Cartan).

Alle (192) o (193) si può arrivare anche per altra via, che meglio pone in luce il loro significato. Calcoliamo le condizioni d'integrabilità delle (184), considerate come equazioni differenziali nelle B^A_α. In conseguenza delle (159) esse si scrivono semplicemente

$$(194)\qquad D_r \underset{m}{\Omega}{}^{\cdot\cdot A}_{\alpha s} - D_s \underset{m}{\Omega}{}^{\cdot\cdot A}_{\alpha r} = \underset{m}{R'}{}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\beta}_{r,s;\alpha} B^A_\beta .$$

Analogamente le condizioni d'integrabilità delle (185), quali equazioni nelle C^A_i, sono

$$(195)\qquad D_r \underset{m}{\Pi}{}^{\cdot\cdot A}_{is} - D_s \underset{m}{\Pi}{}^{\cdot\cdot A}_{ir} = \underset{m}{R''}{}_{r,s;i,j} C^A_j .$$

Ora: tenendo presente che

$$(196)\qquad \underset{m}{a}^{\alpha,\beta} B^A_\alpha B^B_\beta + C^A_i C^B_i = \delta_{AB} \quad (=1 \text{ se } A=B;\ =0 \text{ se } A\neq B)$$

([65]) Loc. cit. in **91**, nota ([14]). Cfr. le form. (19) dello stesso lav. **91**, n. 2.

dalle (194) e (195) moltiplicando per $\underset{m}{a}^{\alpha,\gamma} B^B_\gamma$ e per C^B_i, rispettivamente, e sommando, *otteniamo appunto le* (192). Viceversa, da queste moltiplicando per B^B_ξ, oppure per C^B_k, e sommando, ricaviamo le (194) e (195). Le (192) dunque *riassumono le condizioni d' integrabilità delle* (184), (185). Ma esse, e così pure le (194), (195), presentano questo inconveniente: *di contenere le funzioni incognite* B^A_α *e* C^A_i. Vediamo però come alle (192), o alle equivalenti (194), (195) si possano sostituire delle equazioni in cui non figurano più le B^A_α e C^A_i. Anzitutto ricordiamo (n. 5, form. (69), (67) e (77)) che, posto

$$(197) \qquad \underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\alpha r} = \underset{m}{\Omega}_{\alpha r} \times \overset{i}{X} = \underset{m}{\Omega}_{\alpha r}^{\cdot\cdot A}\, C^A_i$$

si ha

$$(198) \qquad \underset{m}{\Omega}_{\alpha r}^{\cdot\cdot A} = \underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\alpha r}\, C^A_i\,,$$

onde anche, per le (184), (185),

$$(199) \qquad \underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\alpha r} = -\underset{m}{\Pi}_{ir} \times P_\alpha = -\underset{m}{\Pi}_{ir}^{\cdot\cdot A}\, B^A_\alpha\,,$$

$$(200) \qquad \underset{m}{\Pi}_{ir}^{\cdot\cdot A} = -\underset{m}{a}^{\alpha,\beta}\, \underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\alpha r}\, B^A_\beta\,.$$

Possiamo dunque scrivere le (184), (185) nel modo seguente:

$$(201) \qquad \underset{m}{D_r} P_\alpha = \underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\alpha r} \overset{i}{X}, \qquad \text{cioè} \quad \underset{m}{D_r} B^A_\alpha = \underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\alpha r}\, C^A_i\,,$$

$$(202) \qquad \underset{(m)}{D_r} \overset{i}{X} = -\underset{m}{a}^{\alpha,\beta}\, \underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\alpha r}\, P_\beta\,, \qquad \text{cioè} \quad \underset{(m)}{D_r} C^A_i = -\underset{m}{a}^{\alpha,\beta}\, \underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\alpha r}\, B^A_\beta\,.$$

D'altra parte dalle (194) moltiplicando per B^A_γ, oppure per C^A_i, e sommando otteniamo, in forza delle (198) e delle (201), (202):

$$(203)\qquad \underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\alpha s}\,\underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\delta r} - \underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\alpha r}\,\underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\delta s} = \underset{m}{R'}_{r,s:\delta,\alpha},$$

cioè

$$(203)^*\qquad \underset{m}{\Omega}_{\alpha s} \times \underset{m}{\Omega}_{\delta r} - \underset{m}{\Omega}_{\alpha r} \times \underset{m}{\Omega}_{\delta s} = \underset{m}{R'}_{r,s:\delta,\alpha};$$

e

$$(204)\qquad D_s\,\underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\delta r} - D_r\,\underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\delta s} = \underset{m}{\overset{j}{\omega}}_{\delta r}\,\underset{m}{A}_{ijs} - \underset{m}{\overset{j}{\omega}}_{\delta s}\,\underset{m}{A}_{ijr}.$$

Le (203) possono dirsi, per ovvie ragioni (cfr. **91**, n. 4) *equazioni di* Gauss *generalizzate;* le abbiamo già trovate per altra via al n. 12 (form. (162)). Le (204) sono generalizzazioni delle classiche *equazioni di* Codazzi.

Dalle (195) moltiplicando per B^A_γ e sommando si ritrovano ancora le equazioni (204) di Codazzi; moltiplicando invece per C^A_i e sommando si hanno le *equazioni di* Kühne *generalizzate:*

$$(205)\qquad \underset{m}{a}^{\alpha,\beta}\left(\underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\alpha r}\,\underset{m}{\overset{k}{\omega}}_{\beta s} - \underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\alpha s}\,\underset{m}{\overset{k}{\omega}}_{\beta r}\right) = \underset{m}{R''}_{r,s:i,k}.$$

È agevole verificare che le (203), (204), (205) costituiscono insieme le condizioni d'integrabilità delle (201), (202): il che del resto può dedursi da quanto sopra si è esposto.

Quanto precede presuppone sempre che sia $\mu < N$; ma non occorre, in realtà, escludere il caso $\mu = N$, cioè $p = 0$, bastando allora nelle precedenti equazioni alle $\underset{m}{A}_{ijr}$, $\underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\alpha r}$ sostituire ovunque *lo zero.*

Supponiamo ora che vengano assegnati a priori: *il numero, N, di dimensioni dello spazio euclideo ambiente, R_N; la forma* Φ_m, cioè (quali funzioni delle u^r) le $a_{\alpha,\beta}$; e infine, detta μ la caratteristica di $\|a_{\alpha,\beta}\|$ (onde occorrerà supporre $N \geq \mu$), *quando sia $N > \mu$,* posto $p = N - \mu$ ed $i, j = 1, 2, \ldots, p$, *i parametri $\underset{m}{A}_{ijr}$ e il sistema di vettori* $\overset{i}{\omega}_\tau$ ($\rho_\tau \leq m+1$; ρ_α, $\rho_\beta \leq m$). Siamo in grado di precisare delle condizioni necessarie e sufficienti perchè, in relazione a sistemi di riferimento opportunamente scelti, quegli enti corrispondano ad una effettiva V_n di R_N; e indicare come, in tale caso, la V_n possa costruirsi entro R_N.

Troviamo subito delle condizioni *necessarie*, che poi mostreremo essere anche *sufficienti.*

Anzitutto, come abbiamo già notato, la caratteristica μ di $\|a_{\alpha,\beta}\|$ dovrà essere non superiore ad N; questo è geometricamente ovvio, mentre da un punto di vista analitico, $\mu \leq N$ è la condizione perchè, in R_N, le equazioni

$$(206) \qquad P_\alpha \times P_\beta = a_{\alpha,\beta} \qquad \text{cioè} \quad B^A_\alpha B^A_\beta = a_{\alpha,\beta}$$

siano *algebricamente compatibili* ([66]). Posto, come al n. 1 (ved. form. (2)),

$$(207) \qquad \nu = \binom{n+m}{m} - 1\,,$$

se risulta $\nu > N$ fra le $a_{\alpha,\beta}$ dovranno dunque sussistere $\dfrac{(\nu - N)(\nu - N + 1)}{2}$ relazioni indipendenti in termini finiti, che si scrivono senza difficoltà. Indichiamo complessivamente con $L_{n,N}$ queste *condizioni di compatibilità per le* $a_{\alpha,\beta}$ in termini finiti. (Cfr. n. 11, nota ([44])). Esse risultano, naturalmente, comprese nel gruppo $L_{n,\mu}$ di $\dfrac{(\nu-\mu)(\nu-\mu+1)}{2}$ equazioni esprimenti che la caratteristica di $\|a_{\alpha,\beta}\|$ è μ (o meglio, che essa non supera μ), quando si aggiunga l'ipotesi esplicita $N \geq \mu$. Oltre ad esse dovremo supporre che dalle $a_{\alpha,\beta}$ siano verificate le condizioni *differenziali* (138) n. 11, (o (166) n. 12), necessarie e sufficienti, come vedemmo, perchè a partire dalle $a_{\alpha,\beta}$ si possa univocamente costruire un corrispondente calcolo assoluto generalizzato (pel quale risulti $\underset{(m)}{D}\, a_{\alpha,\beta} = 0$).

Analogamente, nei riguardi delle $\underset{m}{A}_{ij_r}$, si dovrà supporre

([66]) Cfr. Levi, **2**, p. 10.

che siano soddisfatte le (86) n. 6. E nei riguardi delle $\overset{i}{\underset{m}{\omega}}_\tau$ $(\rho_\tau \leq m+1)$ dovranno valere le condizioni seguenti (conseguenza delle (78) n. 5 e (197)):

$$(208) \qquad \overset{i}{\underset{m}{\omega}}_\tau = 0, \qquad \text{per } \rho_\tau \leq m.$$

Per di più, gli enti $a_{\alpha,\beta}$, $\underset{m}{A}_{ij r}$, $\overset{i}{\underset{m}{\omega}}_\tau = \overset{i}{\underset{m}{\omega}}_{\alpha r}$, con $\rho_\alpha \leq m$, dovranno essere tali da soddisfare alle equazioni (203), (204), (205) di Gauss, di Codazzi e di Kühne generalizzate. Nei riguardi delle equazioni di Gauss possiamo notare che, da quanto si disse alla fine del n. 12, risulta che *esse comprendono in particolare le* (166) *b*) e *c*), o le equivalenti (138) *b*) e *c*); inversamente, tutte le relazioni fra le sole $a_{\alpha,\beta}$ ottenibili dalle equazioni di Gauss generalizzate si possono ricavare quali conseguenze lineari delle (138). (Cfr. n. 11).

Concludendo: le relazioni $L_{n,N}$, (138) *a*), (86) e (208), (203), (204), (205) sono certo *condizioni necessarie* per l'esistenza di una corrispondente V_n di R_N.

Ma vediamo subito che esse sono pure *condizioni sufficienti.* Cioè: *se esse sono soddisfatte, è possibile trovare un sistema di soluzioni* $P(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, $P_\alpha(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, $\overset{i}{X}(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, cioè $x^A(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, $B^A_\alpha(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, $C^A_i(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ del sistema

$$(209) \qquad \frac{\partial^h P}{\partial u^{r_1} \ldots \partial u^{r_h}} = P_{r_1 r_2 \ldots r_h} \qquad \left(\frac{\partial^h x^A}{\partial u^{r_1} \ldots \partial u^{r_h}} = B^A_{r_1 r_2 \ldots r_h}\right)$$

(ove $1 \leq h \leq m$, ed $r_1 r_2 \ldots r_h$ è una qualunque combinazione con ripetizione della classe h di $12\ldots n$),

$$(201) \qquad \underset{(m)}{D_r} P_\alpha = \overset{i}{\underset{m}{\omega}}_{\alpha r} \overset{i}{X} \qquad \left(\underset{(m)}{D_r} B^A_\alpha = \overset{i}{\underset{m}{\omega}}_{\alpha r} C^A_i\right)$$

$$(202) \qquad \underset{(m)}{D_r} \overset{i}{X} = -\underset{m}{a}^{\alpha,\beta} \overset{i}{\underset{m}{\omega}}_{\alpha r} P_\beta \qquad \left(\underset{(m)}{D_r} C^A_i = -\underset{m}{a}^{\alpha,\beta} \overset{i}{\underset{m}{\omega}}_{\alpha r} B^A_\beta\right)$$

soddisfacenti alle

(210) $\quad P_\alpha \times P_\beta = a_{\alpha,\beta} \qquad (B_\alpha^A B_\beta^A = a_{\alpha,\beta})$

(211) $\quad P_\alpha \times \overset{i}{X} = 0 \qquad (B_\alpha^A C_i^A = 0)$

(212) $\quad \overset{i}{X} \times \overset{j}{X} = \delta_{ij} \qquad (C_i^A C_j^A = \delta_{ij})$.

Infatti: l'ipotesi che sussistano le relazioni $L_{\mu,N}$ porta anzitutto che è $\mu \leq N$. (In caso contrario le (201) e (202), come le (211) e (212), non avrebbero significato). In secondo luogo: se, nelle ipotesi dette sopra, i vettori P_α soddisfano alle (201), tenute presenti le (75) e (79) ricaviamo che è

(213) $$\frac{\partial P_\lambda}{\partial u^r} = P_{\lambda r} \qquad \left(\frac{\partial B_\lambda^A}{\partial u^r} = B_{\lambda r}^A\right) \qquad p_\lambda \leq m-1$$

cioè: tutte le (209), all'infuori del primo gruppo

(214) $$\frac{\partial P}{\partial u^r} = P_r \qquad \left(\frac{\partial x^A}{\partial u^r} = B_r^A\right)$$

rientrano fra le conseguenze *algebriche*, anzi *lineari*, delle (201). Le condizioni d'integrabilità delle (214) in forza delle (201) sono senz'altro soddisfatte.

Inoltre: *le conseguenze differenziali del sistema formato dalle* (210), (211), (212) *in forza delle* (201) *e* (202) *(e delle* (138)*) rientrano nel sistema stesso:* la verifica di questo è agevole. Dunque per un sistema integrale delle (201) e (202) le (210), (211), (212) saranno soddisfatte identicamente *se lo sono in un punto iniziale* P_0, $u^r = u_0^r$.

Essendo μ la caratteristica della matrice $\|a_{\alpha,\beta}\|$, delle (210) soltanto

(215) $$\frac{\mu(2\nu - \mu + 1)}{2}$$

sono indipendenti (cfr. Levi, **2**, p. 10); le (211), (212), come condizioni pei vettori P_α ed $\overset{i}{X}$, sono poi in numero di $\nu p + \frac{p(p+1)}{2}$ indipendenti, cosicchè complessivamente le (210), (211), (212) sono $N(\nu - \mu) + \frac{N(N+1)}{2}$ condizioni indipendenti per gli $N + \nu - \mu$ vettori P_α, $\overset{i}{X}$ di R_N. Il più generale sistema di vettori che soddisfi ad esse *nel punto iniziale* $u^r = u_0^r$ dipenderà da $\frac{N(N-1)}{2}$ parametri arbitrari. Resta poi, come è naturale, del tutto arbitrario il punto della V_n corrispondente a $u^r = u_0^r$, cioè, il sistema di valori iniziali delle x^A.

Tenendo presente infine che le condizioni d'integrabilità delle (201), (202) sono, come già s'è notato, le equazioni (203), (204), 205) di Gauss di Codazzi e di Kühne generalizzate; vediamo che risulta stabilito quanto avevamo enunciato. Più precisamente, possiamo concludere:

Dati l'intero N e, in funzione di n variabili $u^1, u^2, \dots, u^n$, un tensore simmetrico $a_{\alpha,\beta}$ a due indici di classe m, cioè, una forma differenziale quadratica d'ordine m, $\Phi_m = a_{\alpha,\beta}\, \delta^m u^\alpha\, \delta^m u^\beta$ $(\rho_\alpha, \rho_\beta \leq m)$, un sistema di funzioni scalari $\underset{m}{A_{ijr}}$ e un sistema di vettori covarianti, a un indice di classe $m+1$, $\underset{m}{\overset{i}{\omega_\tau}}$ $(i, j = 1, 2, \dots, p;\ p = N - \mu;\ \mu =$ caratteristica di $\|a_{\alpha,\beta}\|)$, condizione necessaria e sufficiente perchè esista una varietà V_n di R_N avente $a_{\alpha,\beta}$ come tensore fondamentale di specie m, le $\underset{m}{A_{ijr}}$ come parametri della connessione metrica fra gli R_p normali ai σ_m (n. 13), i vettori $\underset{m}{\overset{i}{\omega_\tau}}$ come componenti del tensore di curvatura euleriana di specie m, è che:

1) *le $a_{\alpha,\beta}$ soddisfino alle condizioni $L_{n,N}$ in termini finiti e alle relazioni differenziali* (138) *a)* n. 11;

2) *le $\underset{m}{A_{ijr}}$ soddisfino alle* (86) n. 6;

3) *le $\underset{m}{\overset{i}{\omega_\tau}}$ soddisfino alle* (208);

4) *le* $a_{\alpha,\beta}$, $\underset{m}{A_{ijr}}$, $\overset{i}{\underset{m}{\omega_\tau}} = \overset{i}{\underset{m}{\omega_{\alpha r}}}$ *soddisfino alle equazioni* (203), (204), (205) *di* Gauss, *di* Codazzi *e di* Kühne *generalizzate.*

Se tali condizioni sono soddisfatte, la V_n *si costruisce in* R_N *determinando (insieme alle* $\underset{i}{C^A}$*) le* B^A_α *con l'integrazione delle* (201) e (202), *valendosi delle* (210), (211), (212) *quali condizioni iniziali, e poi le* x^A *per quadrature dalle* (214); *così la varietà risulta determinata a meno di movimenti dello spazio* R_N.

Questo risultato e gli altri esposti nella II Parte del presente lavoro non costituiscono che un inizio di trattazione generale ed uniforme per le geometrie riemanniane di specie superiore; però sufficiente, spero, a mostrare come coi procedimenti di calcolo qui introdotti - pel caso normale in gran parte dovuti al Vitali - tale teoria generale venga a ridursi ad una assai naturale e non difficile estensione dell'ordinaria teoria relativa alle proprietà differenziali di 1° ordine, cioè, della classica geometria riemanniana.

BIBLIOGRAFIA [67]

1 - P. DEL PEZZO – *Sugli spazi tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni.* Rendiconto R. Accad. Napoli, anno XXV, 1886, pp. 176-180.

2 – E. E. LEVI – *Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspazio.* Annali R. Scuola Normale Superiore, Pisa, 1905, vol. X.

3 – E. PASCAL – *La teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque.* Memorie R. Accademia dei Lincei, ser. 5., vol. 8°, 1909, pp. 1-102.

4 – E. BOMPIANI – *Recenti progressi nella geometria proiettiva differenziale degli iperspazi.* Proceedings ef the Fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912, Vol. II.

5 – — — – *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero.* Atti R. Accad. Torino, vol. 48, 1913, pp. 393-410.

6 – — — – *Alcune proprietà proiettivo–differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi.* Rendiconti Circolo Matem. Palermo, vol. 37, 1914, pp. 305-331.

7 – — — – *Forma geometrica delle condizioni per la deformabilità delle ipersuperficie.* Rendiconti Lincei, ser. 5., vol. 23, 1914, 1° sem., pp. 126-131.

8 – — — – *Sullo spazio d' immersione di superficie possedenti dati sistemi di curve.* Rendiconti R. Istituto Lombardo, 1914, vol. 47, pp. 177-192.

9 – — — – *Problemi nuovi di geometria metrico–differenziale.* Rendiconti Lincei, ser. 5, vol. 24, 1915, 1° sem., pp. 1193-1199.

10 – — — – *Analisi metrica delle quasi–asintotiche sulle superficie degli iperspazi.* Ibid., ser. 5, vol. 25, 1916, 1° sem., pp. 493-497, 576-578.

11 – — — – *Basi analitiche per una teoria delle deformazioni delle superficie di specie superiore.* Ibid., pp. 627-634.

12 – — — – *Les hypersurfaces déformables dans un espace euclidien réel à $n\,(>3)$ dimensions.* Comptes Rendus de l'Acad., Paris, t. 164, 1917, pp. 508-510.

[67] **Questo indice bibliografico comprende, oltre alle opere citate nel corso del presente lavoro, le recenti pubblicazioni sul *calcolo assoluto generalizzato* e la *geometria differenziale* nell' indirizzo del VITALI.**

13 – E. BOMPIANI – *Affinità e superficie applicabili.* Rendiconti Lincei, ser. 5., vol. 26, 1917, 1° sem., pp. 590-596.

14 – — — – *Sur les courbes quasi-asymptotiques des surfaces dans un espace quelconque.* Comptes Rendus de l'Acad. Paris, t. 168, 1919, pp. 755-757.

15 – — — – *Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie.* Rendiconti Lincei, ser. 5., vol. 28, 1919, 2° sem., pp. 254-258 (Nota I) e 317-321 (Nota II); vol. 29, 1920, 1° sem., pp. 11-16 (Nota III) e vol. 30, 1921, 1° sem., pp. 55 59 (Nota IV).

16 - — — – *Determinazione delle superficie integrali d'un sistema di equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee.* Rendiconti R. Istit. Lombardo, vol. 52, 1919, pp. 610-636.

17 – R. KÖNIG – *Beiträge zu einer allgemeinen linearen Mannigfaltigkeitslehre.* Jahresber. Deutsch. Mathem. Vereinigung, B. 28, 1919, pp. 213-228.

18 – E. BOMPIANI – *Studi sugli spazi curvi. La seconda forma fondamentale di una V_m in V_n.* Atti R. Istituto Veneto, t. 80, 1920-21, pp. 1113-1145.

19 – — — – *Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi.* Rendiconti Circolo Matem. Palermo, t. 46, 1922, pp. 91-104.

20 – J. A. SCHOUTEN e D. J. STRUIK – *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie.* " Christiaan Huygens ,, , P. Noordhoff, Groningen, t. I, 1921-22, pp. 333-353, e t. II, 1922-23, pp. 1-24, 155-171, 291-306.

21 – G. VITALI – *I fondamenti del calcolo assoluto generalizzato.* Giornale di Matematiche, vol. 61, 1923, pp. 157-202.

22 – V HLAVATY – *Sur les courbes quasi-asymptotiques.* " Christiaan Huygens ,,, t. III, 1923-24, pp. 209-245.

23 – É. CARTAN – *La géométrie des espaces de Riemann.* Paris, Gauthier-Villars, 1925.

24 – — — – *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés.* Acta Mathematica, t. 48, 1925, pp. 1-42.

25 – E. BORTOLOTTI – *Su di una generalizzazione della teoria delle curve, e sui sistemi coniugati di una V_2 in V_n.* Rendiconti R. Istituto Lombardo, vol. 58, 1925, pp. 413-459.

26 – R. LAGRANGE – *Calcul différentiel absolu.* Paris, Gauthier-Villars, 1926.

27 – J. A. SCHOUTEN – *Erlanger Programm und Uebertragungslehre. Neue Gesichtpunkte zur Grundlegung der Geometrie.* Rendiconti Circolo Matem. Palermo, t. 50, 1926; pp. 142-169.

28 – M. JANET – *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien.* Annales Soc. Polonaise de Mathém., t. 5, 1926, pp. 38-43.

29 – A. TERRACINI – *Esposizione di alcuni risultati di geometria proiettiva differenziale negli iperspazi.* Append. III al Trattato di *Geom* -

tria Proiettiva Differenziale di G. FUBINI ed E. ČECH (Bologna, Zanichelli. 1926-27) pp. 729-769.

30 – É. CARTAN – *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien.* Annales Soc. Polonaise, t. 6, 1927, pp. 1-7.

31 – E. BOMPIANI – *Alcune idee generali per lo studio differenziale delle varietà.* Rendiconti Lincei, ser. 6, vol. 5°, 1927, pp. 383-389.

32 – G. VITALI – *Sopra una derivazione covariante nel calcolo assoluto generalizzato.* Ibid., vol. 6°, 1927, pp. 201-206 (Nota I) e 278-282 (Nota II).

33 – E. BORTOLOTTI – *Spazi subordinati: equazioni di Gauss e Codazzi.* Bollettino Unione Matem. Italiana, vol. 6°, 1927, pp. 134-137.

34 – G. VITALI – *Geometria nello spazio hilbertiano.* Atti R. Istituto Veneto, t. 87, 1927-28, pp. 349-428.

35 – A. TONOLO – *Una espressione dei simboli di Riemann di prima specie per le varietà immerse negli spazi euclidei.* Bollettino Unione Matem. Italiana, vol. 7°, 1928, pp. 34-36.

36 – G. VITALI – *Sulle derivazioni covarianti nel calcolo assoluto generalizzato.* Rendiconti Lincei, ser. 6., vol. 7°, 1928, pp. 626-629.

37 – E. BORTOLOTTI – *Varietà minime infinitamente vicine in una V_n riemanniana.* Memorie R. Accad. Bologna, ser. VIII, t. 5°, 1927-28, pp. 43-48.

38 – — — – *Scostamento geodetico e sue generalizzazioni.* Giornale di Matematiche, vol. 66, 1928, pp. 153-191.

39 – G. ALIPRANDI – *Sulle evolute delle curve.* Bollettino Unione Matem. Italiana, vol. 7°, 1928, pp. 142-147.

40 – — — – *Il calcolo assoluto generalizzato in una variabile e le derivate del Vitali.* Atti R. Istit. Veneto; t. 87, 1927-28, pp. 1187-1216.

41 – A. TONOLO – *Studi di geometria metrica delle superficie dello spazio lineare a quattro dimensioni.* Rendiconti Lincei. ser. 6., vol. 8°, 1928, pp 138-142.

42 – G. VITALI – *Sulla curvatura delle varietà.* Bollettino Unione Matem., vol. 7°, 1928, pp. 173-175.

43 – — — – *Rapporti inattesi fra alcuni rami della matematica.* Atti Congr Internaz. dei Matematici, Bologna 1928, tomo 2°, pp. 299-302.

44 – — — – *Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie.* Annales de la Société Polonaise de Mathém., 1928, t. 7°, pp. 43-67.

45 – — — – *Sistemi principali di normali a una varietà giacenti nel suo σ_2.* Ibid., pp. 242-251.

46 – G. ALIPRANDI – *Sopra le normali principali (secondo il Vitali) di una superficie generica dello spazio hilbertiano.* Rendiconti Lincei, ser. 6., vol 8°, 1928, pp. 273-276.

47 – — — – *Determinazione della terna principale (del Vitali) di una superficie generica, considerata come terna autopolare del cono geodetico.* Ibid., pp. 356-359.

48 – M. Previatti Bortolozzi – *Sopra l' equivalenza di due equazioni che si presentano nella determinazione della terna principale del Vitali per una superficie generica dello spazio hilbertiano.* Ibid. vol. 9º, 1929, pp. 48-49.

49 – A Tonolo – *Determinazione di un particolare sistema di normali delle superficie dello spazio S_4.* Atti R. Accad. Torino, vol. 64, 1929, pp. 69-88.

50 – G. Vitali – *Le identità di Bianchi pei simboli di Riemann nel calcolo assoluto generalizzato.* Rendiconti Lincei, ser. 6., vol. 9º, 1929, pp. 190-192.

51 – I. Sacilotto – *I simboli di Riemann nel calcolo assoluto generalizzato.* Ibid., pp. 213-217.

52 – G. Vitali – *Calcolo indiretto di alcuni determinanti.* Atti Istituto Veneto, t. 88, 1928-29, pp. 289-294.

53 – I. Sacilotto – *Normali associate alle direzioni di una varietà generica a tre dimensioni giacente in uno spazio lineare a sei dimensioni* Ibid., pp. 355-359.

54 – G. Vitali – *Forme differenziali a carattere proiettivo associate a certe varietà.* Ibid., pp. 361-368.

55 – G. Aliprandi – *Normali di particolari superficie col σ_2 a quattro dimensioni.* Bollettino Unione Matem. Italiana, vol. 8º, 1829, pp. 25-29.

56 – G. Vitali – *Sui centri di curvatura delle geodetiche di una varietà.* Rendiconti Lincei. ser. 6., vol. 9º, 1929, pp. 391-394.

57 – A. Tonolo – *Fondamenti di geometria metrica delle superficie dello spazio lineare a cinque dimensioni.* Rendiconti Circolo Matem. Palermo, t. 53, 1929, pp. 437-470.

58 – G. Vitali – *Sopra alcune quistioni algebriche che si presentano nel precedente lavoro del prof. Tonolo* (57). Ibid., pp. 471-475.

59 – M. Liceni – *Sulla forma F_2 di Fubini–Vitali.* Atti Istit. Veneto, t. 88, 1928-29, pp. 903-908.

60 - — — – *Sulla forma F_2 del Fubini.* Rendiconti Lincei, ser. 6., vol. 9º, 1929, pp. 144-146.

61 – A. Tonolo – *Classificazione delle superficie dello spazio hilbertiano il cui spazio 2–tangente è a quattro dimensioni.* Ibid., pp. 598-602 (Nota I), 713-718 (Nota II), 853-857 (Nota III).

62 – — — – *Una proprietà caratteristica delle superficie ipersferiche dello spazio S_4.* Bollettino Unione Matem. Italiana, vol. 8º, 1929, pp. 132-137.

63 – — — – *Una proprietà delle varietà minime nello spazio hilbertiano.* Giornale di Matem., vol. 67, 1929, pp. 172-176.

64 – G. Vitali – *Sopra i problemi di massimo o di minimo riguardanti le varietà nello spazio hilbertiano.* Rendiconti Istit. Lombardo, ser. 2., vol. 62, 1929, pp. 127-137.

65 – — — – *Geometria nello spazio hilbertiano.* Bologna, Zanichelli 1929.

66 – E. Bortolotti - *Leggi di trasporto nei campi di vettori applicati ai punti di una curva o di una V_m in V_n riemanniana.* Memorie Accad. Bologna, ser. 8., t. 7°, 1929-30, pp. 11-20.
67 – A. Tonolo – *Relazioni geometriche fra due sistemi di normali di una superficie dello spazio hilbertiano.* Annales de la Société Polon. de Mathém., t. 8°, 1929.
68 – G. Vitali – *Sopra alcune involuzioni delle tangenti ad una superficie.* Atti Istit. Veneto, t. 89, 1929-30, pp. 107-112.
69 – M. Calonghi – *Sulle asintotiche delle superficie.* Ibid., pp. 199-201.
70 – G. Zwirner – *Una proprietà della varietà principale di una superficie con il π_2 a due dimensioni.* Ibid., pp. 195-198.
71 – G. Vitali – *Sulle equazioni secolari.* Atti della Società Italiana per il Progr. delle Scienze, 18ª, Riunione, 1929; vol. II, pp. 3-5.
72 - M. Liceni – *Sull'uso della rappresentazione funzionale nello studio della geometria.* Ibid., pp. 5-7.
73 – G. Aliprandi – *Sulle normali principali delle varietà.* Ibid., pp. 8-9.
74 – A. Tonolo – *Studi di geometria metrica delle superficie dello spazio lineare a quattro dimensioni.* Rendiconti Circolo Matem. Palermo, t. 54, 1930, pp. 150-176.
75 – G. Vitali – *Saggio di ricerche geometrico–differenziali.* Atti Istit. Veneto, t. 89, 1929-30, pp. 379-381.
76 – V. Savoia – *Spazi di carattere proiettivo–differenziale associati a certe varietà* Ibid., pp. 383-389.
77 – A. Tonolo – *Sistemi principali di normali di una V_m immersa in una V_n.* Bollettino Unione Matem. Italiana, vol. 9°, 1930, pp. 3-6.
78 – P. Burgatti, T. Boggio, C. Burali–Forti – *Geometria differenziale.* Bologna, Zanichelli, 1930.
79 – G. Aliprandi – *Sopra alcune involuzioni delle tangenti ad una superficie.* Atti Accad. Torino, vol. 65, 1930, pp. 149-156.
80 – G. Vitali - *Nuovi contributi alla nozione di derivazione covariante;* con appendici di G. Aliprandi, R. Baldoni, M. Liceni, I. Sacilotto. Rendiconti Semin. Matem. della R. Univ. di Padova, anno 1°, 1930, pp. 46-72.
81 – — — - *Evoluta (?) di una qualsiasi varietà dello spazio hilbertiano.* Annali di Matematica, ser. 4., t. 8°, 1930, pp. 161-172.
82 – L. Cestonaro – *Una proprietà delle superficie col Π_2 a tre dimensioni.* Bollettino Unione Matem. Italiana, vol. 9°, 1930, pp. 74-79.
83 – G. Aliprandi – *Sugli estremi di corde normali a una linea e a una superficie.* Ibid., pp. 90-95.
84 – R. Baldoni – *Sistemi principali di normali ad una varietà nel suo Π_3.* Rendiconti Lincei, ser. 6., vol. 11, 1930, pp. 149-153 e 261-265.
85 – P. Cattaneo – *Sopra una classe di varietà cicliche.* Ibid., vol. 11, 1930, pp. 659-665 e vol. 12, 1930, pp. 23-26.

86 – G. Vitali – *Determinazione della superficie ad area minima nello spazio hilbertiano.* Rendiconti Semin. Matem. Padova, anno I, 1930, pp. 157-163.

87 – — — – *Trentennio di pensiero matematico* Atti Soc. Ital. per il Progr delle Scienze, 19 Riunione, 1930; vol. I, pp. 315-327.

88 – E. Bortolotti – *Sulle forme differenziali quadratiche specializzate.* Rendiconti Lincei, ser. 6., vol. 12°, 1930, pp. 541-547.

89 – — — – *Calcolo assoluto rispetto a una forma differenziale quadratica specializzata.* Ibid., vol. 13°, 1931, pp. 12-25.

90 – — — – *Una generalizzazione del calcolo assoluto rispetto a una forma differenziale quadratica specializzata.* Ibid., pp. 104-108.

91 – — — – *Sulle varietà subordinate.* Rendiconti Istit. Lombardo, Vol. 64, 1931, pp. 441-463.

92 – — — – *Calcolo assoluto generalizzato di Pascal-Vitali e intorni dei vari ordini di un punto su di una varietà riemanniana.* Atti Istit. Veneto, t. 90, 1930-31, pp. 461-478; ed Atti della Soc. Italiana per il Progr. delle Scienze, XIX^a Riunione, 1930, vol. II., pp. 15-16.

93 – — — – *Vedute geometriche sul calcolo assoluto del Vitali, e applicazioni.* Rendiconti Semin. della Facoltà di Scienze della R. Università di Cagliari, anno I, 1931, pp. 10-12.

94 – M. Liceni – *Sulle espressioni sintetiche della derivazione covariante.* Atti Soc. Progr. Scienze, XIX^a Riunione, 1930, vol. II, pp. 7-9.

95 – R. Baldoni – *Sui sistemi d'infinite rette.* Ibid., pp. 33-38.

96 – V. Savoia – *Sulle ipersuperficie considerate come inviluppi d'iperpiani.* Ibid., pp. 38-44.

97 – E. Simonetto – *Sopra alcune varietà dello spazio hilbertiano.* Bollettino Unione Matem. Italiana, vol. 10°, 1931, pp. 14-16.

98 – M. Pastori – *Le identità di Veblen nel calcolo assoluto generalizzato del Vitali.* Ibid., pp. 202-205.

99 – — — – *I sistemi assoluti di Pascal-Vitali e la derivazione parziale dei tensori.* Atti Pontif. Accademia Nuovi Lincei, anno 84°, 1930-31.

100 – A. Duschek, W. Mayer – *Lehrbuch der Differential-Geometrie. Band II. Riemannsche Geometrie* (von W. Mayer). B. G. Teubner, 1930.