REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

E. PARENT
A. CHAOUCHE
PH. GIRARD

Sur l'apport des statistiques bayesiennes au contrôle de la qualité par attribut. Partie 1 : contrôle simple

Revue de statistique appliquée, tome 43, nº 4 (1995), p. 5-18
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1995__43_4_5_0>

Rev. Statistique Appliquée, 1995, **XLIII** (4), 5-18

SUR L'APPORT DES STATISTIQUES BAYESIENNES AU CONTRÔLE DE LA QUALITÉ PAR ATTRIBUT PARTIE 1 : CONTRÔLE SIMPLE

E. Parent, A. Chaouche, Ph. Girard

Département des Mathématiques Appliquées
75732 - PARIS CEDEX 15 - France

RÉSUMÉ

Les méthodes classiques de contrôle statistique de la qualité par attribut recommandées par l'AFNOR n'intègrent pas explicitement de préoccupations d'ordre économique dans la détermination des règles de décision qu'elles préconisent. En revanche, les statistiques bayesiennes permettent de déterminer la décision optimale d'un point de vue économique et intègrent aussi bien les informations issues de l'échantillonnage que celles provenant de connaissances subjectives. On montre, à partir des principes de la statistique bayesienne, comment peut être bâti un plan de contrôle simple. Ce cas est illustré par le calcul de la règle de décision optimale pour un modèle béta-binomial avec coût linéaire. Cette approche statistique non classique met en évidence le caractère décisionnel du contrôle statistique de la qualité par attribut et permet de suivre la remise à jour des connaissances sur la qualité du produit par apport d'informations issues d'un échantillonnage simple.

***Mots-clés** : Bayes, Contrôle statistique de la qualité, Echantillonnage binomial, Statistique décisionnelle.*

ABSTRACT

Usual statistical techniques advocated by the french association for normalisation do not explicitely take into account economic concerns when designing a decision rule for quality control. On the contrary, bayesian statistics allow to determine the optimal decision rule with regards to economic viewpoints and they can incorporate information coming from sampling and subjective knowledge. This paper sketches the design of a simple sampling plan by attribute from a bayesian viewpoint. This case is illustrated by the calculation of the optimal decision rule for a beta-binomial model with linear cost. This non classical approach underlines the decisional aspects of quality control by statistical means and reveals how knowledge about production quality is updated by information from the sampling plan.

***Keywords** : Bayes, Statistical quality control, Binomial sampling, Statistical decision theory.*

Introduction

Les techniques les plus usitées de contrôle de la qualité sont fondées sur les principes de la statistique inférentielle classique. La démarche d'inférence classique s'apparente à un raisonnement par l'absurde : le statisticien construit une ligne de déduction à partir d'une hypothèse de base, en principe établie après discussion avec le décideur, puis accepte ou refuse cette hypothèse en jugeant de l'écart entre les résultats mesurés et ceux plausibles selon l'hypothèse ayant étayé sa construction intellectuelle. Ce point de vue a été difficile à passer dans la pratique industrielle : les statisticiens ont donc fait des efforts louables de codification (tables AFNOR, 1988), de vulgarisation et de formation, ainsi que d'interprétation de leurs concepts en termes opérationnels. Dans cet esprit, Vessereau (1987) détaille de façon approfondie et très pratique les tables d'échantillonnages préconisées par l'AFNOR pour les contrôles de réception. De même, Leterme et Van Hoecke (1993) emploient le terme de risque d'erreur de «décision»; le risque de première espèce est traduit par l'appellation de risque client et celui de seconde espèce se cache derrière la notion de risque fournisseur.

En adoptant un plan de contrôle, le chargé de production souhaite quant à lui une aide à la décision opérationnelle, si possible intégrant ses coûts et ses expériences passées de fabrication. Assez répandue dans les problèmes d'ingéniérie de l'eau (Duckstein *et al.*, 1987), l'approche statistique bayesienne offre une alternative intéressante pour les problèmes du contrôle de la qualité dans les industries agro-alimentaires (Martz, 1976; Cressie et Seheult, 1985; Billion et Parent, 1991) en ne séparant pas les aspects statistiques des conséquences économiques des décisions qui en résultent. Elle est également d'un abord didactique assez facile si on interprète la règle de Bayes comme un «processeur d'informations» permettant une remise à jour des connaissances sur la qualité de la production. Notons néanmoins ses limites : elle ne s'applique que dans un cadre stationnaire, c'est-à-dire quand ne fluctuent pas les relations structurelles aléatoires entre les paramètres inconnus des états de la nature et les grandeurs d'observations que l'on mesure. Plus précisément le modèle probabiliste doit explicitement inclure des paramètres spécifiques pour décrire les possibles non stationnarités des relations structurelles entre états de la nature et observations, si on souhaite utiliser des technique statistiques bayesiennes dans ce cas. Le domaine des techniques de filtrage et de prévision, champ privilégié des statistiques bayesiennes, appartient d'ailleurs à cette classe de problèmes de dynamique aléatoire à régimes non stationnaires.

On cherche ici à porter un jugement sur la qualité inconnue d'une fabrication, supposée homogène, et non à détecter un éventuel dérèglement d'un fonctionnement préspécifié d'un processus industriel.

Ce papier développe une approche de type bayesien pour le contrôle de la qualité par attribut et en illustre les potentialités d'application pour un plan d'échantillonnage simple.

1. Rappels théoriques et notations

Un lot de taille N doit être accepté (décision par la suite notée d_1 ou *livrer*) ou refusé (décision d_2 ou *mise au rebut*). Pour ce faire, on prélève un échantillon de taille n et on compte le nombre x d'objets défectueux. Dans toute la suite du texte, on fera l'hypothèse que le rapport n/N est faible de telle sorte que si l'on appelle p, la proportion de défectueux dans le lot, la loi binomiale de paramètres (n, p) est la loi de probabilité de la variable aléatoire X «nombre d'objets défectueux parmi les n de l'échantillon de contrôle» :

$$Prob\ (X = x|p, n) = \binom{x}{n} p^x (1-p)^{n-x} \tag{1}$$

2. Démarche inférentielle classique

Le lot n'est accepté que si le nombre x d'objets défectueux dans l'échantillon est au plus égal à un seuil d'acceptation c. En fonction de ce seuil, de la taille de l'échantillon et de la proportion de défectueux effectivement présente dans le lot, on peut évaluer la probabilité $P(n, c, p)$ d'acceptation du lot par la formule :

$$P(n, c, p) = \sum_{k=0}^{c} \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} \tag{2}$$

Le couple (n, c) détermine la procédure de contrôle : taille de l'échantillon à prélever et sévérité de la règle d'acceptation. A (n, c) fixés, la fonction $p \to P(n, c, p)$ donne la courbe d'efficacité de la procédure. Comme l'indique la figure 1, le décideur souhaiterait un filtre parfait : en deçà d'une valeur p_0 tous les lots devraient être acceptés, et refusés au-delà. Les hasards de l'échantillonnage font que ce filtre parfait n'est possible à obtenir qu'en situation de contrôle unitaire, en général inacceptable pour des raisons d'ordre financier, ou impossible si la mesure se fait par contrôle destructif. Compte-tenu de la nature aléatoire des informations obtenues par échantillonnage, le statisticien peut indiquer de combien la courbe d'efficacité s'éloigne de la forme idéale de «marche d'escalier» par deux renseignements : le risque de première espèce α, c'est-à-dire le degré d'inefficacité pour une valeur p_α inférieure à p_0, et le manque de puissance de la procédure (ou risque de seconde espèce β) pour une valeur p_β au delà de p_0. La formule (2) donne alors :

$$\alpha(n, c) = 1 - \sum_{k=0}^{c} \binom{k}{n} p_\alpha^k (1-p_\alpha)^{n-k} \tag{3}$$

$$\beta(n, c) = \sum_{k=0}^{c} \binom{k}{n} p_\beta^k (1-p_\beta)^{n-k} \tag{4}$$

Du point de vue de la statistique classique, cette règle revient à effectuer un test d'hypothèse nulle $H_0 : p = p_\alpha$ au niveau α contre l'hypothèse alternative $p > p_\alpha$ telle que la puissance du test soit β en $p = p_\beta$. Le statisticien peut cependant avoir quelques difficultés à obtenir du décideur la valeur d'une proportion acceptable de

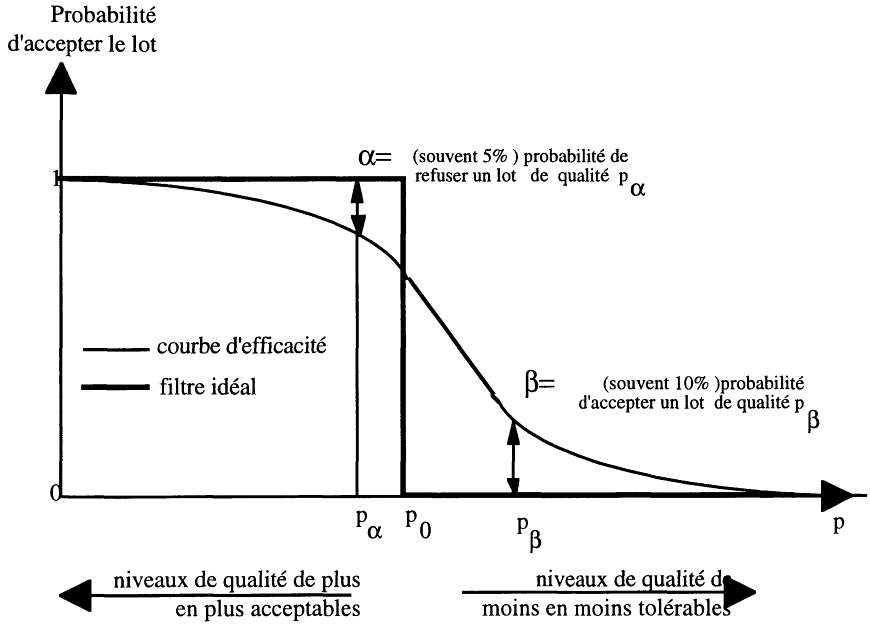

FIGURE 1 :

Courbe d'acceptation $p \rightarrow P(n, c, p)$ *à* (n, c) *fixés et filtre parfait*

défauts présents dans le lot p_α, notée alors NQA, et un risque client correspondant α, généralement 5 ou 10%. Le point de qualité «juste» tolérable (NQT) de l'hypothèse alternative est souvent encore plus délicat à préciser.

3. L'approche Bayesienne

Lorsqu'on adopte le point de vue du paragraphe précédent, on raisonne conditionnellement à une proportion p de défectueux dans le lot, proportion supposée déterministe mais non observable. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle p figure en abscisse de la figure 1. En d'autres termes, on demande à l'industriel de juger de la réalité tangible donnée par les résultats de l'échantillonnage en fonction d'une référence absolue et cachée. Ceci peut lui sembler difficile à conceptualiser compte-tenu de son ambition opérationnelle strictement inverse : il veut mieux cerner la qualité inconnue du lot en fonction d'informations nouvelles apportées par l'échantillonnage. La démarche bayesienne consiste pour l'essentiel à employer une variable aléatoire pour décrire l'incertitude relative aux valeurs du paramètre p et à en conditionner la distribution aux résultats de l'échantillonnage. Nous n'entrerons pas ici dans le débat (Weber, 1973) à propos de l'interprétation de cette variable aléatoire, liée à la nature subjective des probabilités associées quantifiant la connaissance partielle relative à un événement et non la fréquence possible de son occurrence matérielle, mais nous nous bornerons à remarquer que l'alternative bayesienne peut sembler plus naturelle selon le point de vue du décideur et à ce titre, du point de vue du pédagogue, plus facile à expliquer.

D'autre part, le statisticien rencontre généralement des difficultés à obtenir du décideur les points «du risque fournisseur» et du «risque client» qui permettent de préciser les caractéristiques du plan d'échantillonnage classique. De ce point de vue, les appellations «Niveau de Qualité Acceptable» et «Niveau de Qualité Tolérable» ont constitué un pas vers une interprétation de nature décisionnelle de la procédure de contrôle, permettant d'asseoir des procédures adaptées aux exigences spécifiques de diverses industries. Comme on le verra dans cet article, l'approche bayesienne rend l'interface décisionnelle plus explicite en intégrant directement les conséquences de nature économique dans l'élaboration de la stratégie de contrôle.

Enfin, du fait de son expérience de contrôles antérieurs sur un même produit ou sur des produits similaires, le responsable du service qualité en entreprise possède souvent une évaluation de nature subjective, de la proportion de défectueux présents dans le lot qu'il examine : le contrôle statistique bayesien permet de combiner dans un même cadre conceptuel les résultats de l'expérience de contrôle et cette expérience de connaissance du terrain, trop souvent négligée par les procédures classiques.

4. Éléments de la Démarche Bayesienne

4.1. Ensemble des états de la nature

Il s'agit de l'ensemble des valeurs possibles du paramètre p, soit ici [0,1]. On définit aussi une loi de probabilité, dite «loi *a priori*», pour p, $\pi(p)$ afin de décrire la connaissance imprécise que l'industriel possède sur les valeurs de p. Il est commode de choisir pour $\pi(p)$ une loi de type béta (la figure 2 présente la fonction de densité de probabilité d'une telle loi) dont les coefficients a et b seront appelés ici hyperparamètres. Ces deux coefficients confèrent une grande souplesse au choix de la distribution *a priori* du paramètre p. Une dizaine de différentes façons d'apprécier et de déterminer $\pi(p)$ sont présentées dans Berger(1985); Box et Tiao (1973) s'attachent plus particulièrement au cas délicat de la construction de $\pi(p)$ à partir d'informations disponibles limitées, avec une approche fondée sur des loi *a priori* «non informatives» de Jeffreys (1961).

$$\pi(p) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1}(1-p)^{b-1} \times \mathbf{1}_{[0,1]} \tag{5}$$

Pour une telle loi, on peut facilement établir que $E_{\pi(p)}(p) = \dfrac{a}{a+b}$ et que $Var_{\pi}(p)(p) = \dfrac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$, ce qui permet d'en estimer les paramètres par la méthode des 2 premiers moments, si l'on a choisi de résumer les informations disponibles *a priori* sur p en ajustant une telle distribution béta. Le cas $a = b = 0.5$ correspond à la loi non informative de Jeffreys pour un modèle d'échantillonage binomial. Le cas $a = b = 1$ donne la loi uniforme, distribution *a priori* maximisant

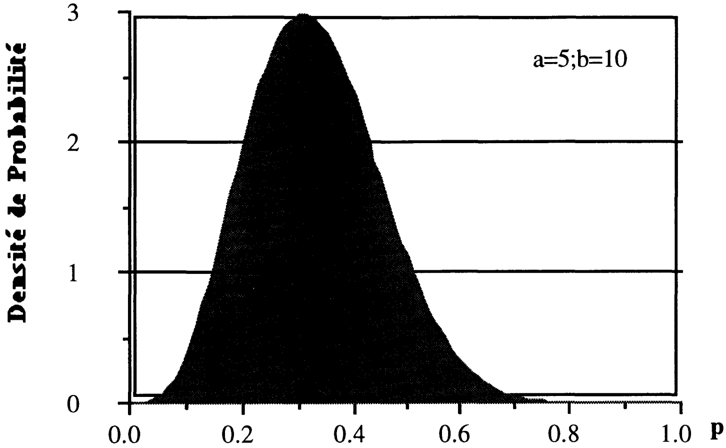

FIGURE 2 :
Exemple de loi a priori de type béta.

l'entropie utilisée comme mesure quantitative de l'incertitude par Tribus (1969) et qui tire sa justification de considérations de traitement du signal.

4.2. Ensemble des actions

Dans le cas du contrôle bayesien statique de la qualité, cet ensemble se réduit à :

d_1 : «livrer»

d_2 : «mettre au rebut»

4.3. Fonction de coût

La fonction de coût W associe à chaque action et à chaque état de la nature une évaluation numérique des pertes occasionnées par l'action. Nous utiliserons ici la fonction de coût simple, définie dans Ulmo et Bernier (1973), soit :

$$W(d_1, p) = W(\text{«livraison»}, p) = pCN \tag{6}$$

Si l'on choisit de livrer (décision d_1), parmi les N objets du lot, on admet que pN produits défectueux seront retournés à l'industriel. La valeur CpN représente alors une évaluation des frais de retour et de perte d'image de marque : c'est le coût de la «non-qualité»; si l'on exprime C dans la même unité de coût que celle du prix de fabrication d'un objet, C prend des valeurs supérieures à 1. Le coût de la mise au rebut est dans ce cas simplement estimé à une unité monétaire pour chacun des N objets de la fabrication contrôlée.

$$W(d_2, p) = W(\text{«rebut»}, p) = 1 \times N \tag{7}$$

4.4. Les informations

Il s'agit des résultats de l'expérience, c'est-à-dire le nombre x d'objets défectueux observés dans un échantillon de taille n, réalisation de la v.a. X. La loi de X sachant p est une binomiale donnée par l'équation 1.

4.5. Règles de décision et risque

Une règle est définie comme une application δ de l'ensemble des informations (ou résultats d'expérience) dans l'ensemble des actions. Considérons ici, à titre d'exemple comme dans le cas classique, la famille de règles δ_c indicée par un seuil entier d'acceptation c, telle que :

$$\begin{aligned} \delta_c(x) &= d_1 \quad \text{si } x \leqslant c \\ \delta_c(x) &= d_2 \quad \text{si } x > c \end{aligned} \tag{8}$$

On peut alors évaluer le risque associé à une règle δ et à l'état de la nature p par :

$$R(\delta, p) = E_{X/p}(W(\delta(X), p) = \sum_{x=0}^{n} W(\delta(x), p).\ Prob\ (x|p) \tag{9}$$

Ainsi, pour les règles de type δ_c l'équation 9 devient :

$$R(\delta_c, p) = \sum_{x=0}^{c} CpN. \binom{x}{n} p^x(1-p)^{n-x} + \sum_{x=c+1}^{n} N. \binom{x}{n} p^x(1-p)^{n-x} \tag{10}$$

Ce risque représente le coût moyen des conséquences économiques de la décision, évalué sur tous les résultats possibles de l'expérience d'échantillonnage. L'équation (9) ne peut pas servir de base pour choisir une règle de décision; elle permet seulement d'éliminer les règles non admissibles, c'est-à-dire uniformément dominées en p. Une règle δ est dite dominée (ou non admissible) si :

$$\exists\, \delta',\ \forall\, p,\ \ R(\delta', p) \leqslant R(\delta, p)$$

On peut d'ailleurs établir que la famille de règles δ_c est formée de toutes les règles non dominées, d'où leur utilité pratique en contrôle statistique. Néanmoins, selon la valeur de p, un seuil c peut se révéler trop sévère ou trop «laxiste».

Notons aussi que l'on aurait retrouvé $R(\delta_c, p_\alpha) = \alpha$ et $R(\delta_c, p_\beta) = \beta$ si, dans le paragraphe précédent, on avait choisi un coût W tel que $W(d_1, p) = \mathbf{1}_{p>p_0}$ et $W(d_2, p) = \mathbf{1}_{p\leqslant p_0}$: c'est cette fonction de coût peu réaliste qui est implicitement adoptée dans le cadre statistique conventionnel.

4.6. Règles de décision bayesiennes

Pour une règle quelconque δ, on définit le risque bayesien en pondérant les valeurs du risque par la distribution des probabilités *a priori* pour les valeurs correspondantes de p :

$$\overline{R}_\pi(\delta) = \int_0^1 R(\delta, p)\pi(p)dp = E_{\pi(p)}(R(\delta, p)) \tag{11}$$

La règle de décision bayesienne δ^* est celle qui rend minimum le risque bayesien $\overline{R}_n(.)$. Telle quelle, l'équation 11 n'est pas facile à résoudre puisqu'on recherche une application de l'ensemble des informations possibles $\{0, \ldots n\}$ dans celui des décisions $\{d_1\ d_2\}$; la section suivante montre comment la formule de Bayes permet de construire une telle règle de décision.

La liaison entre la modélisation statistique et la modélisation du comportement du décideur est illustrée par la figure 3.

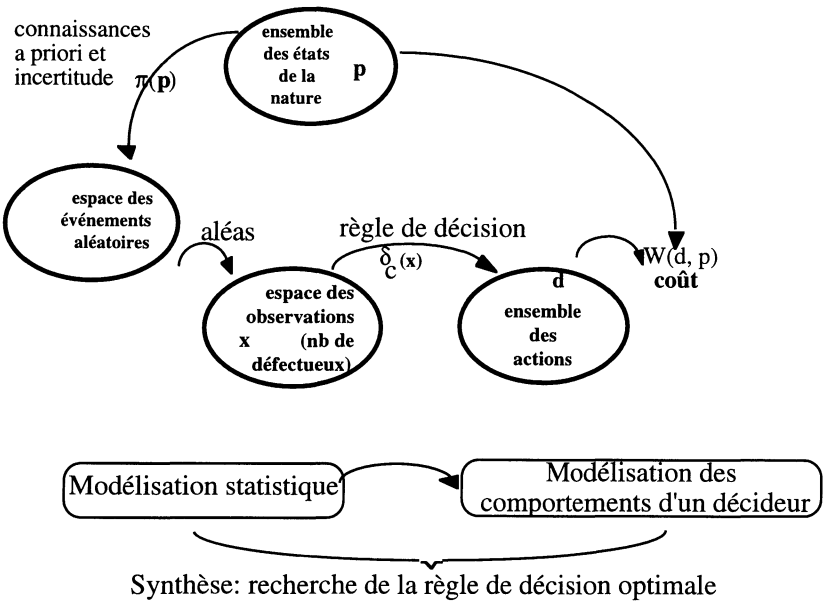

FIGURE 3 :
Schéma conceptuel de la démarche bayesienne

4.7. La formule de Bayes : un «processeur d'information»

En appliquant la formule de Bayes, la loi *a posteriori* de p, c'est-à-dire la distribution du paramètre p après avoir eu connaissance du résultat x de l'échantillonnage, est donnée par :

$$\pi'(p|x) = \frac{Prob\ (x|p)\pi(p)}{\displaystyle\int_0^1 Prob\ (x|p)\pi(p)\,dp} \tag{12}$$

En utilisant l'équation 5, il vient :

$$\pi'(p|x) = \frac{\Gamma(a+b+n)}{\Gamma(a+x)\Gamma(b+n-x)} p^{a+x-1}(1-p)^{n+b-x-1} \times \mathbf{1}_{[0,1]} \tag{13}$$

La loi *a posteriori* de p reste dans la même famille de type béta que la loi *a priori*. Pour cette raison, la loi béta est dite «conjuguée naturelle» de la loi binomiale. L'incorporation de l'information x se traduit ici par un simple décalage des hyperparamètres :

$$\begin{aligned} a &\xrightarrow[\textit{échantillonnage}]{} a+x \\ b &\xrightarrow[\textit{échantillonnage}]{} b+n-x \end{aligned} \tag{14}$$

On peut aussi évaluer la loi non conditionnelle de la variable aléatoire X, appelée aussi loi prédictive. Elle est donnée par :

$$g(x) = \int_0^1 Prob\ (x|p)\pi(p)dp = \int_0^1 \binom{x}{n} \frac{\Gamma(a+b)p^{a+x-1}(1-p)^{n+b-x-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} dp$$

$$g(x) = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+x)\Gamma(b+n-x)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-x+1)\Gamma(a+b+n)\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(x+1)} \tag{15}$$

On reconnaît dans la formule (15) un modèle d'urne de Polya (Feller, 1966) : au départ, on dispose d'une urne avec a boules blanches et b boules noires. Après chaque tirage on remet dans l'urne deux boules : celle tirée et une de la même couleur. Bernier (1993) a montré que la loi prédictive de x est ainsi générée par un mécanisme de type «bootstrap» par suréchantillonnage à partir d'une répartition *a priori* de référence des valeurs possibles de cette variable.

5. Risque bayesien et règles de décisions bayesiennes

La distribution de p *a posteriori* joue un rôle important pour la construction de la règle de décision optimisant le risque de Bayes. Sous les conditions techniques du théorème de Fubini, les formules 11 et 12 permettent de changer l'ordre d'intégration pour le calcul du risque bayesien et donc d'écrire, en utilisant le fait que la loi conjointe de x et p s'écrive soit $g(x)\pi'(p|x)$, soit $Prob\ (x/p)\pi(x)$:

$$\overline{R}_\pi(\delta) = E_{\pi(p)}E_{X/p}W(\delta(X),p) = E_X\left\{E_{\pi'(p|X=x)}W(\delta(x),p)\right\} \tag{16}$$

$$\overline{R}_\pi(\delta) = \int_0^1 \sum_{x=0}^{n} W(\delta(x),p)Prob\ (x|p)\pi(p)dp = \sum_{x=0}^{n} g(x)\int_0^1 W(\delta(x),p)\pi'(p|x)dp$$

Dans l'équation 16, les termes $g(x)$ étant tous positifs ou nuls, il suffit que la règle de décision réalise pour tout x le minimum de $E_{\pi'(p/x)}(W(\delta(x),p)$, coût moyen *a posteriori*. A x fixé, pour choisir entre $\delta(x) = d_1$ ou $\delta(x) = d_2$, on évalue donc :

$$\text{Si } \delta(x) = d_1 \Longrightarrow E_{\pi'(p/x)}(W(d_1,p) = E_{\pi'(p/x)}(CpN) = CN\frac{a+x}{a+b+n} \tag{17}$$
$$\text{Si } \delta(x) = d_2 \Longrightarrow E_{\pi'(p/x)}(W(d_2,p) = E_{\pi'(p/x)}(N) = N$$

La règle de décision bayesienne $\delta*$ est donnée par :

$$\text{Si } E_{\pi'(p/x)}(W(d_1,p) < E_{\pi'(p/x)}(W(d_2,p) \Longrightarrow \delta^*(x) = d_1 \tag{18}$$
$$\text{Sinon } \delta^*(x) = d_2$$

Dans notre cas, la règle δ^* correspond à une règle admissible de la famille des δ_c telle que le niveau d'acceptation soit $c = \dfrac{n+b-(C-1)a}{C}$. On note que, pour un niveau donné d'incertitude sur p *a priori* exprimé par (a,b) et une taille d'échantillon n fixé, le niveau d'acceptation diminue (le contrôle est plus strict) lorsque le coût de non qualité C augmente. Ce seuil varie dans le même sens que b, l'hyperparamètre pouvant être interprété comme un équivalent du nombre de résultats positifs *a priori*. L'impression relative à la non-qualité décrite par l'hyperparamètre a intervient aussi dans l'expression de ce seuil, avec une pondération liée au coût de non-qualité.

6. Valeur de l'information dans un contexte décisionnel bayesien

Dans la pratique, la formule 14 permet une application séquentielle de la formule de Bayes pour remettre à jour les hyperparamètres décrivant la connaissance de la qualité. Dans cette partie du travail, nous cherchons à évaluer la valeur de l'information apportée par un échantillon, de façon à en prévoir la taille optimale.

Imaginons qu'après un certain nombre d'expériences, l'état de connaissance de la qualité soit initialement représenté par une loi *a priori* $\pi(p)$ de type béta avec hyperparamètres (a,b). Supposons que dans cet état de connaissance la décision soit de livrer, c'est-à-dire que $E_\pi(W(d_1,p)) < E_\pi(W(d_2,p))$, soit encore, avec les choix précédents de fonction de coût : $C\dfrac{a}{a+b} < 1$. Que peut-il se passer si on réalise un échantillonnage de n objets ? D'après l'équation 18, si le nombre d'objets défectueux observés est tel que $x \leqslant \dfrac{n+b-(C-1)a}{C}$, la décision antérieure ne change pas et la livraison continue. Dans le cas contraire, la décision antérieure est remise en cause pour mettre le lot au rebut. La connaissance d'un tel nombre d'objets défectueux x dans l'échantillon permet ainsi de réaliser une économie de $NC\frac{a+x}{a+b+n} - N$ après expérience. Pour évaluer, relativement à l'état de connaissance de qualité avant expérience, la probabilité d'obtenir un tel x, on utilise la loi prédictive $g(x)$. L'économie moyenne $B(n,a,b)$ procurée par l'échantillonnage de taille n peut alors être évaluée par :

$$B(n,a,b) = N \sum_{x > \frac{n+b-(C-1)a}{C}}^{n} g(x) \left(C\frac{a+x}{a+b+n} - 1 \right) \tag{19}$$

Plus généralement et selon la terminologie de TRIBUS (1969), $B(n,a,b)$ la valeur moyenne de l'information apportée par l'échantillonnage (Expected Value of Sample Information) est la somme des gains pondérés par la probabilité qu'ils se réalisent (probabilité que l'on observe x objets défectueux). En notant d^0 la décision optimale prise *a priori*, $W(d^0,p)$ son coût associé et δ^* la règle bayesienne après tirage du n-échantillon, la formule 19 est un cas particulier de :

$$B(n,a,b) = \sum_{x=0}^{n} g(x) \mathbf{1}_{\delta^*(x) \neq d^0} E_{\pi'(p/x)}(W(\delta^*(x),p) - W(d^0,p)) \tag{20}$$

Si comme sur la figure 4, construite pour un *a priori* de type béta avec $a = 1$, $b = 10$, $C = 10$, $N = 1000$, la courbe $n \to B(n,a,b)$ est monotone croissante et marginalement décroissante, on peut alors l'exploiter en portant sur le même graphe le coût d'un contrôle de n objets. La taille de l'échantillon ne doit pas dépasser la valeur n_{max} où le bénéfice potentiel est annulé par le coût du contrôle. On peut aussi, en utilisant des arguments économiques, retenir la valeur n^*, quand elle existe, telle que bénéfice marginal potentiel et coût marginal ultérieur se compensent.

7. Discussions complémentaires et conclusions

Notons d'abord que Vessereau (1980) appelle «*contrôle bayesien*» la démarche suivante : à partir d'une distribution *a priori* de la proportion de défectueux et de l'observation d'un échantillon, il construit la distribution *à posteriori* de cette proportion (par la formule de Bayes). Il appelle «*courbe d'acceptation*» de la distribution *a posteriori* le complément à l'unité de la fonction de cumul de probabilité. Il appelle «*solution bayesienne équivalente*» à une règle de décision classique, définie par la taille n de l'échantillon et un seuil de rejet, donc par une courbe d'acceptation, la distribution *a posteriori* dont la courbe d'acceptation se confond avec la courbe d'acceptation de la solution classique. La «*solution bayesienne équivalente*» est le plan d'échantillonnage qui possède la même efficacité que la solution classique; Vessereau montre que l'information *a priori* se traduit par un gain égal à la somme des paramètres de la loi *a priori* moins l'unité.

La démarche bayesienne telle qu'exposée par Vessereau, et à laquelle nous n'adhèrons pas, ne possède pas un des caractères essentiels d'une approche

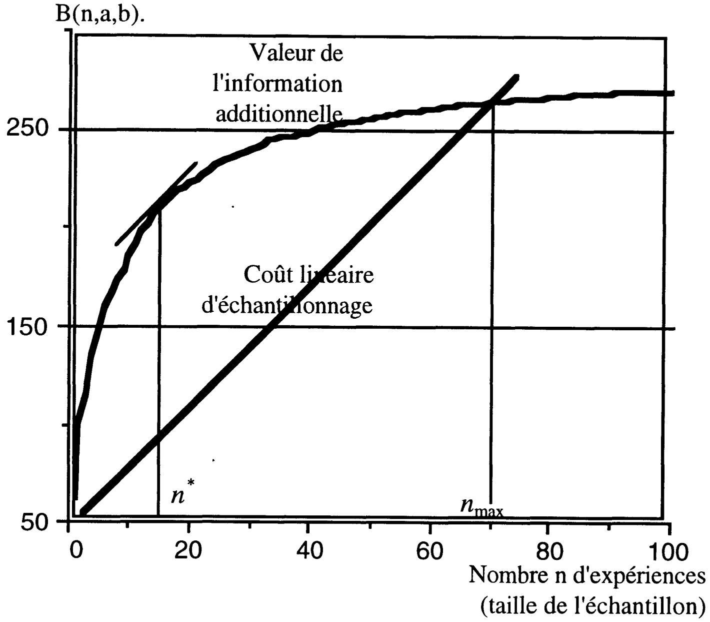

FIGURE 4 :

Valeur de l'information additionnelle apportée par un n-échantillon
$(a = 1,\ b = 10,\ C = 10,\ N = 1000)$

décisionnelle, qui est la synthèse d'un problème statistique et d'un problème économique par l'intermédiaire d'une fonction de coût réaliste. A l'instar de Berger ont peut qualifier l'approche décrite par Vessereau de «*statistique bayesienne non-décisionnelle*».

Comme le montre l'exemple du contrôle statistique par attribut, l'approche bayesienne décisionnelle fournit un «mécanisme» simple et cohérent de dimensionnement de règles de décision en prenant en compte les coûts économiques et les incertitudes : l'équation 9 définit le risque comme le coût moyen des conséquences d'une stratégie décisionnelle si l'état de la nature est supposée connu; l'équation 11 prend en compte les incertitudes sur le ou les paramètres du modèle utilisé pour évaluer le risque; et l'équation 16 montre que cette approche est cohérente avec un cadre statistique inférentiel d'apprentissage par «la formule des probabilités des causes» due à Bayes (1763). La figure 3 schématise les relations entre les concepts d'incertitudes, d'aléas, de coûts et de décisions.

Dans le cas du contrôle par attribut, la mise en œuvre calculatoire est favorisée par le modèle d'échantillonnage simple (loi binomiale), l'emploi de conjuguées naturelles (loi béta) pour probabiliser le comportement du paramètre p décrivant la qualité, l'utilisation de fonction de coût particulière (linéaire en p) et le faible degré de complexité décisionnelle.

Néanmoins, sous des conditions techniques larges (Ferguson, 1967; Berger, 1985; Robert, 1992), l'ensemble des règles de décisions bayesiennes (avec leurs limites) obtenu par variation de lois *a priori* dont le support n'exclut aucune valeur, est identique à l'ensemble des règles non dominées. Par conséquent, et pour revenir à notre application, l'appartenance de δ^* à la famille des règles admissibles que sont les δ_C (formule 18) est un résultat général, garantissant que les règles obtenues par approche bayesienne répondent par construction à cette exigence minimale de bon comportement.

A la connaissance des auteurs, aucune propriété de convexité concernant la valeur attendue de l'information apportée par échantillonnage n'a été démontrée dans la littérature pour le cas général : une interprétation économique, bien que séduisante, ne peut donc pas toujours être avancée pour enrichir la formule 20. D'autre part, la figure 4 fige en quelque sorte le futur : elle donne une vision moyenne de l'apport supplémentaire d'information à un état de connaissance donné. Or, cette vision va évoluer de façon dynamique au fur et à mesure que progressera l'échantillonnage, ce qui plaiderait plutôt pour une utilisation itérative de l'estimation de la valeur de l'information.

Le problème de l'échantillonnage séquentiel peut d'ailleurs également être étudié selon un angle bayesien.

Enfin, l'approche bayesienne renverse le point de vue classique en adoptant une approche directe conditionnelle aux données plutôt qu'un raisonnement indirect vis-à-vis d'événements potentiels d'une hypothèse nulle. En ce sens, cette démarche peut éviter de désorienter certains praticiens, peu rompus aux raisonnements par l'absurde et favoriser ainsi une plus large utilisation des techniques de statistiques appliquées au sein du monde de l'industrie.

Remerciements

Les auteurs ont bénéficié des critiques et suggestions de C. Billion et J. Bernier. Cet article s'appuie sur un rapport scientifique de fin d'études (Girard, 1994) réalisé conjointement à l'Ecole Nationale du Génie Rural des Eaux et des Forêts et à l'Institut National Agronomique Paris-Grignon.

Références bibliographiques

AFNOR *Statistiques Tome 2*. Paris. La défense : AFNOR, 1988.

ALBRIGHT S.C., COLLINS R.S. A bayesian approach to the optimal control of continuous industrial processes. *Int. J. Product. Res.* 15(1). 1977.

BAYES Th. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Phil. Trans*; Roy. Soc. 53, 1763.

BERGER J. O. *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis* . 2^{nd} Ed. New York : Springer Verlag, 1985.

BERNIER J. *Simulation, Bayes et bootstrap en hydrologie statistique*. Note interne de recherche. Québec : INRS-Eau, 1993.

BOX G.E.P., TIAO G.C. *Bayesian inference in statistical analysis.* Massachusetts, Reading : Addison-Wesley, 1973.

BILLON C., PARENT E. *Statistiques Bayesiennes et contrôle de qualité par attribut. Proceedings*, 2^{nd} European Conference on food industries and statistical methods. Nantes, June 13 -14, France, 1991.

CRESSIE N., SEHEULT A. Empirical Bayes estimation in sampling inspection. *Biometrica,* 72(2), 1985.

DUCKSTEIN, L., BOBEE, B., BOGARDI, I. *Bayesian forecasting of hydrological variables under changing climatology, Proceedings*, International Association of Hydrological Sciences, Vancouver, B.C., August 1987.

FELLER W. *An introduction to probability theory and its applications.* New-York : Wiley, 1966.

FERGUSON T.S. *Mathematical statistics : a decision-theoretic approach.* New-York : Academic Press, 1967.

GIRARD P. *Contrôle de la qualité par attribut : contribution des statistiques bayesiennes et applications aux industries agro-alimentaires.* Rapport scientifique de fin d'études à l'Ecole Nationale du Génie Rural des Eaux et des Forêts. Paris, 1994.

JEFFREY H. *Theory of probability.* Oxford University Press, 1961.

LETERME F., VAN HOECKE A. Etude des risques d'erreurs de décision (risque client et fournisseur) lors de contrôles unitaires de produits en fonction de l'aptitude du procédé de fabrication et de l'aptitude du procédé du moyen de mesure. *Rev. Statistique Appliquée*, XLI(3), 1993.

MARTZ H.F. Empirical bayes single sampling plans for specified posterior consumer and producer risks. *Nav. Res. Logist. Quart.*, 22(4). 1976.

ROBERT C. *L'analyse statistique bayesienne.* Econometrica, 1992.

TRIBUS M. *Rational Descriptions, Decisions and Design.* New York : Pergamon Press Inc, 1969.

ULMO J., BERNIER J. *Eléments de Décision Statistique.* Paris : Presses Universitaires de France, 1973.

VESSEREAU A. Méthodes bayesiennes et méthodes classiques en contrôle de réception. *Rev. Statistique Appliquée*, XXVIII(4), 1980.

VESSEREAU A. Une collection de plans d'échantillonnage pour les contrôles de réception. *Rev. Statistique Appliquée*, XXXV(4), 1987.

WALD A. *Sequential analysis.* New-York :Wiley, 1947.

WEBER J.D. Historical aspects of the bayesian controversy with comprehensive bibliography. Research note. College of business and Public Administration. University of Arizona; Tucson : University of Arizona. 1973.