REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

S. JMEL

Estimation par un critère de moindres carrés de scores assujettis à des contraintes linéaires dans un modèle d'association

Revue de statistique appliquée, tome 43, nº 3 (1995), p. 93-104

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1995__43_3_93_0>

Rev. Statistique Appliquée, 1995, **XLIII** (3), 93-104

ESTIMATION PAR UN CRITÈRE DE MOINDRES CARRÉS DE SCORES ASSUJETTIS À DES CONTRAINTES LINÉAIRES DANS UN MODÈLE D'ASSOCIATION

S. Jmel

Université de Nancy II LASARE et ADEPS
(URA CNRS 1167) 4, rue de la Ravinelle
C.O. N° 26 F-54035 Nancy Cedex

RÉSUMÉ

Dans cet article nous nous intéressons à l'estimation par les moindres carrés et sous contraintes linéaires des paramètres d'un modèle d'association. Nous généralisons pour cela un algorithme développé par I. BÖCKENHOLT & U. BÖCKENHOLT (1990) dans le contexte du modèle de corrélation. Une application à une table de contingence multiple est ensuite présentée.

Mots-clés : *Décomposition en valeurs singulières, Contraintes linéaires, Estimation par les moindres carrés, Modèle d'association.*

ABSTRACT

In this paper we consider the least square estimation under some linear constraints on the parameters of an association model. For this purpose, we generalize an algorithm developed by I. BÖCKENHOLT & U. BÖCKENHOLT (1990) in the context of the correlation model. An application of this algorithm to a multi-way contingency table is given.

Keywords : *Singular value decomposition, Linear constraints, Least Squares estimation, Association model.*

1. Introduction

Dans l'analyse d'une table de contingence par le modèle de corrélation ou par le modèle d'association, l'introduction de contraintes permet la prise en compte d'informations additionnelles. Ces informations peuvent simplifier l'analyse de l'association entre les variables concernées et rendre l'interprétation d'une telle analyse plus aisée. Cette démarche peut aussi être appliquée dans un but de confirmation lorsque les données sont supposées suivre un modèle log-linéaire hiérarchique sous-jacent (BECKER, 1992, HEIJDEN, 1987 et FALGUEROLLES *et al.* 1992b). Ce problème a été étudié par GILULA & HABERMAN (1988) pour les modèles de corrélation et d'association en utilisant des algorithmes d'estimation par maximum de vraisemblance. Plus récemment, I. BÖCKENHOLT & U. BÖCKENHOLT (1990) ont proposé un algorithme d'estimation par moindres carrés dans le contexte du modèle de corrélation. TAKANE *et al.* (1991a) ont passé en revue un certain nombre de situations d'estimation sous contraintes linéaires dont celle de I. BÖCKENHOLT & U. BÖCKENHOLT (1990) relative à l'analyse des correspondances encore appelée modèle de corrélation. En fait, les idées de base de ces derniers articles, tout comme le travail présenté ici, se trouvent dans RAO (1964). Ces idées ont été reprises dans le cadre géométrique par SABATIER (1987) et BONIFAS *et al.* (1984). D'autres travaux liés à ce sujet, utilisant d'autres types de contraintes, se trouvent dans CAZES *et al.* (1988), CAZES & MOREAU (1990), DENIS (1991), TAKANE & SHIBAYA (1991b) et RITOV & GILULA (1993).

Dans cet article, nous nous intéressons plus particulièrement à l'estimation par les moindres carrés et sous contraintes linéaires des paramètres du modèle R $\times$ C d'association. La motivation principale de ce travail est le problème de convergence que l'on rencontre lorsque la table de contingence analysée est de dimension grande et lorsque le nombre de contraintes est assez élevé. Le présent travail est une extension de celui présenté par I. BÖCKENHOLT & U. BÖCKENHOLT (1990) dans le cadre du modèle de corrélation.

Le paragraphe 2 est consacré à quelques rappels sur le modèle R $\times$ C d'association. Le paragraphe 3 traite le problème d'estimation des paramètres sous des contraintes linéaires et finalement, une application à une table de contingence multiple est proposée dans le paragraphe 4.

2. Modèle R $\times$ C d'association de GOODMAN

Considérons deux variables qualitatives multinomiales X et Y ayant respectivement I et J modalités. Soient $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$, $p_{i+} = \sum_{j=1}^{J} p_{ij}$ et $p_{+j} = \sum_{i=1}^{I} p_{ij}$ les probabilités conjointes et marginales. Soient f_{ij}, f_{i+} et f_{+j} les fréquences relatives conjointes et marginales associées.

Le modèle d'association d'ordre M (GOODMAN, 1979, 1985, 1986 et 1991, BECKER & CLOGG, 1989) consiste à écrire la probabilité p_{ij} sous la forme

$$p_{ij} = \gamma\alpha_i\beta_j \exp\left(\sum_{m=1}^{M} \varphi_m \mu_{im} \nu_{jm}\right) \quad (1)$$

avec $1 \leqslant M \leqslant \min(I-1, J-1)$. Les scores lignes μ_{im}, les scores colonnes ν_{jm} et les effets lignes et colonnes α_i et β_j satisfont les contraintes d'identification et d'orthogonalité suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_i > 0,\ \beta_j > 0,\\
&\sum_i w'_i \log \alpha_i = \sum_j w''_j \log \beta_j = 0,\\
&\sum_i w'_i \mu_{im} = \sum_j w''_j \nu_{jm} = 0,\\
&\sum_i w'_i \mu_{im}\mu_{im'} = \sum_j w''_j \nu_{jm}\nu_{jm'} = \delta_{mm'}
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

où δ désigne le symbole de KRONECKER et les termes w'_i et w''_j définissent respectivement les poids des lignes et les poids des colonnes. Les choix les plus fréquents de ces poids consistent à prendre ($w'_i = 1$, $w''_j = 1$) ou ($w'_i = p_{i+}$, $w''_j = p_{+j}$) par analogie avec l'analyse des correspondances. D'autres choix possibles sont discutés dans BECKER & CLOGG, 1989 et dans BACCINI *et al.* (1991). Les paramètres φ_m, dits d'association intrinsèque, vérifient la propriété suivante :

$$\sum_i \sum_j w'_i w''_j \mu_{im}\nu_{jm} \log p_{ij} = \varphi_m \quad \text{pour } m = 1, \ldots, M.$$

Si maintenant on définit λ_{ij} par

$$\lambda_{ij} = \theta_{ij} - \theta_{i+} - \theta_{+j} + \theta_{++}$$

où $\theta_{ij} = \log p_{ij}$, $\theta_{i+} = \sum_j w''_j \theta_{ij}$, $\theta_{+j} = \sum_i w'_i \theta_{ij}$ et $\theta_{++} = \sum_i \sum_j w'_i w''_j \theta_{ij}$, on peut montrer que,

$$\sum_{i=1}^{I} w'_i \lambda_{ij} = \sum_{j=1}^{J} w''_j \lambda_{ij} = 0$$

et
$$\lambda_{ij} = \log(p_{ij}/(\gamma\alpha_i\beta_j)) = \sum_{m=1}^{M} \varphi_m \mu_{im}\nu_{jm}.$$

Remarquons que la matrice $\{\lambda_{ij}\}$ n'est autre que la matrice $\{\theta_{ij}\}$ double-centrée relativement aux poids des lignes $\{w'_i\}_i$ et aux poids des colonnes $\{w''_j\}_j$. On notera dans la suite $\widehat{\lambda}_{ij}$ le terme obtenu en remplaçant dans l'expression de λ_{ij} la probabilité p_{ij} par la fréquence relative observée f_{ij}.

L'estimation des paramètres du modèle d'association peut être effectuée par les deux approches classiques suivantes :

1. approche maximum de vraisemblance (MV) considérée par ANDERSEN (1990), BECKER (1990), BECKER & CLOGG (1989), FALGUEROLLES

& FRANCIS (1992a), GILULA & HABERMAN (1986, 1988) et GOODMAN (1979, 1985, 1986, 1991).

2. approche moindres carrés (MC) considérée par BACCINI & KHOUDRAJI (1992a,b), BACCINI *et al.* (1993), ESCOUFIER & JUNCA (1986), ESCOUFIER (1988), GOODMAN (1991) et TSUJITANI (1992).

Si l'on considère l'approche moindres carrés, le critère quadratique usuel à minimiser s'écrit :

$$Q = \sum_i \sum_j w'_i \, w''_j [\log f_{ij} - \log p_{ij}]^2$$

où p_{ij} satisfait (1) et les contraintes d'identification et d'orthogonalité (2).

En remplaçant dans Q les paramètres γ, α et β par les estimations

$$\log \widehat{\gamma} = \sum_i \sum_j w'_i \, w''_j \log f_{ij},$$

$$\log \widehat{\alpha}_i = \sum_j w''_j \log f_{ij} - \log \widehat{\gamma}$$

et

$$\log \widehat{\beta}_j = \sum_i w'_i \log f_{ij} - \log \widehat{\gamma},$$

la partie bilinéaire du modèle est alors estimée en minimisant le critère

$$Q' = \sum_i \sum_j w'_i \, w''_j [\widehat{\lambda}_{ij} - \sum_m \varphi_m \mu_{im} \nu_{jm}]^2$$

avec $\widehat{\lambda}_{ij} = \log f_{ij} - \log \widehat{\gamma} - \log \widehat{\alpha}_i - \log \widehat{\beta}_j$ et on montre (voir par exemple ESCOUFIER & JUNCA, 1986, BACCINI & KHOUDRAJI, 1992a,b ou TSUJITANI, 1992) que les triplets $(\varphi_m, \mu_{im}, \nu_{jm})$ qui réalisent le minimum de Q' sont obtenus par décomposition en valeurs singulières généralisée (nous la notons DVSG et l'on pourra se reporter à GREENACRE, 1984, pour sa définition et ses propriétés) du triplet $(\wedge\ , D_r, D_c)$ où $\wedge$ est la matrice de terme général $\{\widehat{\lambda}_{ij}\}_{ij}$ et D_r (resp. D_c) la matrice diagonale de termes diagonaux $\{w'_i\}_i$ (resp. $\{w''_j\}_j$) pour $1 \leqslant i \leqslant I$ et $1 \leqslant j \leqslant J$. On peut réaliser cette DVSG en écrivant

$$D_r^{1/2} \wedge D_c^{1/2} = US^tV$$

où U est une matrice de dimension $I \times M$ avec $M = \min(I-1, J-1)$, S matrice diagonale de dimension M dont les éléments diagonaux donnent les coefficients d'association intrinsèque et V matrice de dimension $J \times M$. On pose ensuite $U^* = D_r^{-1/2} U$ et $V^* = D_c^{-1/2} V$. Les colonnes des matrices U^* (resp. V^*) donnent les scores des lignes (resp. des colonnes). On peut noter que, compte tenu de ce que $\sum_i w'_i \widehat{\lambda}_{ij} =$

$\sum_j w_j''\widehat{\lambda}_{ij} = 0$, les contraintes de centrage $\sum_i w_i'\mu_{im} = \sum_j w_j''\nu_{jm} = 0$ sont automatiquement vérifiées par la solution obtenue, sans qu'on ait besoin d'imposer ces contraintes.

Remarque 1 :

En prenant des poids égaux aux marges ($w_i' = f_{i+}$, $w_j'' = f_{+j}$), le minimum de Q' peut aussi être réalisé à partir de l'analyse des correspondances (AFC) du tableau R de dimension $I \times J$ et de terme général $r_{ij} = f_{i+}f_{+j}(1+\widehat{\lambda}_{ij})$ avec les pondérations D_r et D_c (voir CAZES *et al.* 1988 pour plus de détail).

Remarque 2 :

L'ajustement du modèle d'association par les moindres carrés pose un problème du fait des fréquences nulles. Pour surmonter cette difficulté, on ajoute une petite quantité à chaque fréquence par case. GOODMAN (1970) a recommandé la valeur 0,5. Dans BISHOP *et al.* (1975, chap. 12), on trouve d'autres propositions, notamment de remplacer la table initiale $(n_{ij})_{i=1}, \ldots, I; j = 1, \ldots, J$ par la table de terme général

$$\frac{n}{n+k}\left(\frac{n_{ij}}{n}\right) + \frac{n}{n+k}\left(\frac{n_{i+}n_{+j}}{n^2}\right)$$

où n désigne l'effectif total $\left(n = \sum_i \sum_j n_{ij}\right)$ et k une constante dont la valeur est

$$\frac{n^2 - \sum_i \sum_j n_{ij}^2}{\sum_i \sum_j \left(n_{ij} - \frac{n_{i+}n_{+j}}{n}\right)^2}.$$

Une autre approche du problème consiste à faire appel à des techniques de lissage (voir par exemple SIMONOFF, 1983 ou BURMAN, 1987).

3. Estimation des paramètres sous contraintes linéaires

On considère à nouveau le modèle d'association d'ordre M

$$p_{ij} = \gamma \alpha_i \, \beta_j \exp\left(\sum_{m=1}^{M} \varphi_m \, \mu_{im} \, \nu_{jm}\right)$$

vérifiant les contraintes d'identification et d'orthogonalité décrites au paragraphe 2. On suppose en plus que les scores des lignes et des colonnes sont tels que

$$\forall k = 1, \dots, S : \quad \sum_{i=1}^{I} g_{ikm}\, \mu_{im} = 0,$$

et

$$\forall k = 1, \dots, T : \sum_{j=1}^{J} h_{jkm}\, \nu_{jm} = 0$$

pour $1 \leqslant m \leqslant M$ et $1 \leqslant M \leqslant \min(I - S - 1,\ J - T - 1)$, S et T étant les nombres de contraintes sur les scores des lignes et sur les scores des colonnes. En termes matriciels, ces contraintes s'écrivent :

$${}^tGU^* = 0 \quad \text{et} \quad {}^tHV^* = 0,$$

ou encore

$$({}^tGD_r^{-1})D_rU^* = 0 \text{ et } ({}^tHD_c^{-1})D_cV^* = 0.$$

Les scores des lignes (resp. des colonnes) doivent donc appartenir au sous-espace H_r (resp. H_c) orthogonal pour la métrique D_r (resp. D_c) au sous-espace engendré par les colonnes de $D_r^{-1}G$ (resp. $D_c^{-1}H$). Si l'on note P_r (resp. P_c) l'opérateur de projection D_r (resp. D_c) orthogonal sur H_r (resp. H_c), on a :

$$P_r = I_r - G({}^tGD_r^{-1}G)^{-1}\, {}^tGD_r^{-1},$$
$$P_c = I_c - H({}^tHD_c^{-1}H)^{-1}\, {}^tHD_c^{-1},$$

où I_r et I_c désignent les matrices identité d'ordre I et J. En utilisant les résultats obtenus par TAKANE *et al.* (1991a) ou CAZES *et al.* (1988) dans le cadre de l'analyse des correspondances ou du modèle de corrélation, on montre que les solutions de ce problème d'estimation par MC sous contraintes linéaires sont obtenues par DVSG relativement aux matrices diagonales D_r et D_c de la matrice

$$D_r^{-1}P_rD_r \wedge D_c{}^tP_cD_c^{-1} = {}^tP_r \wedge P_c$$

qui peut s'écrire sous une forme proche de celle donnée dans I. BÖCKENHOLT et U. BÖCKENHOLT (1990) :

$$D_r^{-1/2}\{I_r - D_r^{-1/2}G({}^tGD_r^{-1}G)^{-1}\, {}^tGD_r^{-1/2}\}$$
$$\tilde{\wedge}\, \{I_c - D_c^{-1/2}H({}^tHD_c^{-1}H)^{-1}\, {}^tHD_c^{-1/2}\}D_c^{-1/2}$$

avec $\tilde{\wedge} = D_r^{1/2} \wedge D_c^{1/2}$. Cette DVSG se réalise en écrivant

$$\{I_r - D_r^{-1/2}G({}^tGD_r^{-1}G)^{-1}\, {}^tGD_r^{-1/2}\}$$
$$\tilde{\wedge}\, \{I_c - D_c^{-1/2}H({}^tHD_c^{-1}H)^{-1}\, {}^tHD_c^{-1/2}\} = US{}^tV$$

et en posant ensuite $U^* = D_r^{-1/2}U$ et $V^* = D_c^{-1/2}V$.

On a vu à la fin du paragraphe 2 dans l'analyse du modèle d'association sans contraintes supplémentaires que les contraintes de centrage étaient automatiquement vérifiées, si donc on impose ces contraintes (ce qui revient à prendre $G = D_r \mathbf{1}_I$ et $H = D_c \mathbf{1}_J$ où $\mathbf{1}_I$ et $\mathbf{1}_J$ désignent les vecteurs de longueur I et J et dont toutes les coordonnées valent 1), on obtient les mêmes résultats que dans l'analyse sans contraintes. Ici, dans le cas où l'on impose des contraintes supplémentaires, il faut rajouter à ces contraintes, les contraintes de centrage afin que ces dernières soient vérifiées. On a alors $P_r D_r \mathbf{1}_I = P_c D_c \mathbf{1}_J = 0$.

Remarque 3 :

Si là encore on choisit des poids égaux aux marges, la recherche de l'estimation par MC des paramètres du modèle d'association sous contraintes linéaires reviendra à effectuer l'analyse des correspondances du tableau $S(I \times J)$ de terme général :

$$s_{ij} = f_{i+} f_{+j} \{1 + ({}^t P_r \wedge P_c)_{ij}\}.$$

Une telle analyse a déjà été proposée dans le cadre de l'analyse des correspondances usuelles, avec des contraintes linéaires particulières par CAZES *et al.* (1988).

4. Exemple d'application

Nous proposons, dans ce paragraphe, un exemple d'application pour illustrer notre approche. Cet exemple a déjà fait l'objet de plusieurs études sous contraintes linéaires (voir I. BÖCKENHOLT & U. BÖCKENHOLT, 1990, FALGUEROLLES *et al.*, 1992b et GILULA & HABERMAN, 1988). Nous le retraitons donc par l'approche MC en reprenant les contraintes utilisées dans GILULA & HABERMAN (1988). Notons qu'on prendra des poids égaux à 1 afin de pouvoir comparer nos résultats avec ceux obtenus en utilisant le programme d'estimation par MV réalisé par GILULA & HABERMAN (1986).

Les données considérées dans cet exemple sont reproduites en annexe. Elles concernent une enquête sur l'attitude des chrétiens de race blanche vis-à-vis de l'avortement entre 1972 et 1974 aux Etats-Unis. Les variables prises en compte sont :

R religion : protestant du nord, protestant du sud et catholique.

E nombre d'années d'éducation : $\leqslant 8$, 9-12 et $\geqslant 13$

A attitude vis-à-vis de l'avortement : positive, neutre et négative.

Il s'agit donc d'une table de contingence multiple à trois entrées que l'on transforme en une table de contingence simple en croisant la variable interactive R*E (produit des variables explicatives Religion R et Education E) et la variable réponse Attitude A.

Si l'on s'intéresse à l'analyse de cette table de contingence, le modèle d'association peut s'écrire comme suit :

$$p(i_1, i_2, j) = \gamma \alpha(i_1, i_2) \beta(j) \exp \left[\sum_{m=1}^{M} \varphi_m \mu_m(i_1, i_2) \nu_m(j) \right] \quad (3)$$

avec des contraintes d'identification et d'orthogonalité similaires à celles définies dans le paragraphe 2.

Dans leur analyse de cette table de contingence par le modèle d'association d'ordre 1, GILULA & HABERMAN (1988) constatent d'une part que pour chaque niveau de la variable religion (R) les scores $\mu_1(i_1, i_2)$ sont approximativement équidistants et d'autre part que pour les deux groupes de protestants, les écarts entre les scores $\mu_1(i_1, i_2)$ pour les niveaux 1 et 2 de la variable éducation sont approximativement égaux. La prise en compte de ces informations conduit à l'introduction des contraintes linéaires suivantes :

$$\begin{aligned}
\mu_1(1,1) - \mu_1(1,2) &= \mu_1(1,2) - \mu_1(1,3),\\
\mu_1(2,1) - \mu_1(2,2) &= \mu_1(2,2) - \mu_1(2,3),\\
\mu_1(3,1) - \mu_1(3,2) &= \mu_1(3,2) - \mu_1(3,3),\\
\mu_1(1,1) - \mu_1(1,2) &= \mu_1(2,1) - \mu_1(2,2).
\end{aligned}$$

Ces contraintes se traduisent dans notre algorithme par les matrices
$G = (D_r\mathbf{1}_I|G*)$ et $H = D_c\mathbf{1}_J$ avec

$$G^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'ordre des lignes étant donné dans le tableau des résultats (à savoir (1,1); (1,2); (1,3); (2,1); etc. avec $(1,1) = R_1, E_1$; $(1,2) = R_1, E_2$; $(1,3) = R_1, E_3$; $(2,1) = R_2, E_1$; etc.).

Le tableau qui suit présente les estimations des paramètres sous contraintes par MC et par MV ($M = 1$) obtenues en utilisant des poids égaux à $1 (w'_i = 1, w''_j = 1)$. Les deux approches donnent des résultats proches. Ce tableau donne outre les estimations sous contraintes, les estimations sans contraintes supplémentaires, les valeurs de la statistique du khi-deux correspondant aux estimations par MV et à titre indicatif, celles correspondant aux estimations par MC calculées à partir de $n\sum_i\sum_j \frac{(f_{ij} - \widehat{f}_{ij})^2}{\widehat{f}_{ij}}$, $\widehat{f}_{ij}$ étant calculé selon la formule (1) en utilisant les estimations par MC données dans ces deux tableaux. Les degrés de liberté étant calculés à partir des formules $(I - M - 1)(J - M - 1)$ ou $(I - M - 1)(J - M - 1) + S + T$ selon que l'on prenne en compte des contraintes linéaires supplémentaires ou non (voir GILULA & HABERMAN, 1986 et 1988).

Tableau des résultats sur l'estimation des paramètres du modèle d'association d'ordre 1 appliqué aux données de l'exemple :

	sans contraintes		sous contraintes	
	par MV	par MC	par MV	par MC
Coefficients intrinsèques φ	1,6413	1,6581	1,5311	1,6404
Scores lignes $\mu(i_1, i_2)$				
(1,1)	−0,2231	−0,2229	−0,2799	−0,2590
(1,2)	0,1796	0,1798	0,1608	0,1685
(1,3)	0,5467	0,5428	0,6015	0,5961
(2,1)	−0,4999	−0,4720	−0,4341	−0,4248
(2,2)	0,0445	0,0268	0,0066	0,0028
(2,3)	0,4521	0,4536	0,4473	0,4303
(3,1)	−0,3902	−0,4346	−0,3424	−0,3899
(3,2)	−0,1024	−0,0730	−0,1674	−0,1713
(3,3)	−0,0073	−0,0005	0,0076	0,0473
Scores colonnes $\nu(j)$				
1	0,7828	0,7935	0,7759	0,7911
2	−0,1904	−0,2300	−0,1678	−0,2207
3	−0,5924	−0,5635	−0,6081	−0,5704
Khi-deux	11,946	14,703	15,907	20,218
Degrés de liberté	7		11	

5. Conclusion

L'approche moindres carrés est largement utilisée pour l'estimation de paramètres sous contraintes linéaires (voir par exemple CAZES *et al.*, 1988, DENIS, 1991 et TAKANE *et al.*, 1991). Le présent travail propose une utilisation un peu moins classique en considérant une transformation logarithmique. D'autres transformations sont encore possibles.

Bibliographie

ANDERSEN, E.B. (1990). *The statistical analysis of categorical data.* Springer Verlag.

BACCINI, A. & KHOUDRAJI A. (1992a). Application d'un modèle d'association à l'analyse d'une table de taux. *Rev. Stat. Appl.* Vol. 40. N°4. 59-75.

BACCINI, A. & KHOUDRAJI A. (1992b). A least squares procedure for estimating the parameters in the RC-association model for contingency table. *Comput. Stat.* Vol. 7. N°3. 287-300.

BACCINI, A., CAUSSINUS, H. & FALGUEROLLES A. de (1991). RC models in exploratory data analysis. *J. Amer. Statist. Assoc.,* 86, 1115-1117.

BACCINI, A., CAUSSINUS, H. & FALGUEROLLES A. de (1993). Analysing dependence in large contingency tables : Dimensionality and patterns in scatter-plots. In C.M. Cuadras and C.R. Rao (Eds). *Multivariate Analysis :* Future Directions 2, 245-263. Amsterdam : North-Holland.

BECKER, M.P. & CLOGG, C.C. (1989). Analysis of sets of two-way contingency tables using association models. *J. Amer. Statist. Assoc.,* 84, 142-151.

BECKER, M.P. (1990). Maximum likelihood estimation of the RC(M) association model. *Appl. Statist.,* 39, 152-167.

BECKER, M.P. (1992). Exploratory analysis of association models and singular value decompositions. *Comput. Stat. Data Anal.* Vol. 13. 253-267.

BECKER, M.P. & CLOGG, C.C. (1989). Analysis of sets of two-way contingency tables using association models. *J. Amer. Statist. Assoc.,* 84, 142-151.

BISHOP, Y.M.M., FIENBERG, S.E. & HOLLAND, P.W. (1975). *Discrete multivariate analysis.* Cambridge : M.I.T. Press.

BÖCKENHOLT, U. & BÖCKENHOLT, I. (1990). Canonical Analysis of contingency tables with linear constraints. *Psychometrika.* Vol. 55, N°4, 633-639.

BONIFAS, I. ESCOUFIER, Y. GONZALEZ, P.L. & SABATIER, R. (1984). Choix de variables en analyse en composantes principales. *Rev. Stat. Appl.,* Vol. 32, N°2, 5-15.

BURMAN, P. (1987). Smoothing sparse contingency tables. Sankhya, Series A, Vol. 49, 24-36.

CAZES, P. CHESSEL, D. & DOLEDEC, S. (1988). Analyse des correspondances internes d'un tableau partitionné. Son usage en hydrobiologie, *Rev. Stat. Appl.* Vol. 36, N°1, 39-54.

CAZES, P. & MOREAU, J. (1990). Analyse factorielle d'un tableau de contingence dont les lignes et les colonnes sont munies d'une structure de graphe bistochastique. Rapport interne du CEREMADE N°9045.

DENIS, J.B. (1991). Ajustement de modèles linéaires et bilinéaires sous contraintes linéaires avec données manquantes. *Rev. Stat. Appl.,* Vol. 39, N°2, 5-24.

ESCOUFIER, Y. (1988). Beyond correspondence analysis. In *Classification and related methods of data analysis.* H.H. Bock (ed.). Amsterdam : North-Holland.

ESCOUFIER, Y. & JUNCA, S. (1986). Least-squares approximation of frequencies and their logarithms. *Int. Statist. Rev.*, 54, 279-283.

FALGUEROLLES, A. de & FRANCIS, B. (1992a). Algorithmic approaches for fitting bilinear models. In *Computational Statistics.* Vol. 1. *Proceedings of the*

10th Symposium on Computational Statistics. Y. Odge and J. Whittaker (eds.). Physica-Verlag. Heidelberg 1992 for IASC. 77-82.

FALGUEROLLES, A. de, JMEL, S. & WHITTAKER, J. (1992b). Correspondence analysis and association models constrained by a conditional independence graph. A paraître dans Psychometrika.

GILULA, Z. & HABERMAN, S.J. (1986). Canonical analysis of contingency tables by maximum likelihood. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 81, 780-788.

GILULA, Z. & HABERMAN, S.J. (1988). The analysis of multivariate contingency tables by restricted canonical and restricted association models. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 83, 760-771.

GOODMAN, L.A. (1970). The multivariate analysis of qualitative data : interactions among multiple classification. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 65, 226-256.

GOODMAN, L.A. (1979). Simple models for the analysis of association in cross-classifications having ordred categories. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 74, 537-552.

GOODMAN, L.A. (1985). The analysis of cross-classified data having ordered and/or unordered categories : association models, correlation models, and asymmetry models for contingency tables with or without missing entries. *Ann. Statist.*, 13, 10-69.

GOODMAN, L.A. (1986). Some useful extensions of the usual correspondence analysis approach and the usual log-linear models approach in the analysis of contingency tables. *Int. Stat. Rev.*, 54, 243-309.

GOODMAN, L.A. (1991). Measures, models and graphical displays in the analysis of cross- classified data. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 86, 1085-1110.

GREENACRE, M.J. (1984). *Theory and Applications of Correspondence Analysis*. Academic Press, Londres.

HEIJDEN, P.G.M. van der (1987). *Correspondence analysis of longitudinal categorical data*. Leiden : DSWO.

RAO, C.R. (1964). The use and interpretation of principal component analysis in applied research. *Sankhya*, Series A, Vol. 26, 329-359.

RITOV, Y. & GILULA, Z. (1993). Analysis of contingency tables by correspondence models subject to order constraints. *J. Amer. Statist.* Assoc., 88, 1380-1387.

SABATIER, R. (1987). *Méthodes factorielles en analyse des données : approximations et prises en compte de variables concomitantes*. Thèse d'Etat. Université Montpellier II.

SIMONOFF, J.S. (1983). A penality function approach to smoothing sparse contingency tables. Ann. Statist., 11, 208-218.

TAKANE, Y., YANAI, H. & MAYEKAWA, S. (1991a). Relationships among several methods of linearly constrained correspondence analysis. *Psychometrika*. Vol. 56, N°4, 667-684.

TAKANE, Y. & SHIBAYAMA, T. (1991b). Principal component analysis with external information on both subject and variables. *Psychometrika*. Vol. 56, N°1, 121- 136.

TSUJITANI, M. (1992). A note on the additive and multiplicative models in two-way contingency tables. *Biometrics*. Vol. 48. 267-269.

Annexe : Données traitées dans l'exemple

		Attitude vis-à-vis de l'avortement		
Religion	Nombres d'années d'éducation	Positive	Neutre	Négative
Protestant du nord	$\leqslant 8$	49	46	115
	$9-12$	293	140	277
	$\geqslant 13$	244	66	100
Protestant du sud	$\leqslant 8$	27	34	117
	$9-12$	134	98	167
	$\geqslant 13$	138	38	73
Catholique	$\leqslant 8$	25	40	88
	$9-12$	172	103	312
	$\geqslant 13$	93	57	135