

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

DARIUSH GHORBANZADEH

Un test de détection de rupture de la moyenne dans un modèle gaussien

Revue de statistique appliquée, tome 43, n° 2 (1995), p. 67-76

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1995__43_2_67_0

© Société française de statistique, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

UN TEST DE DÉTECTION DE RUPTURE DE LA MOYENNE DANS UN MODÈLE GAUSSIEN

Dariush. Ghorbanzadeh

Institut d'Informatique d'Entreprise (CNAM)

18, Allée Jean Rostand 91025 EVRY cedex

RÉSUMÉ

Nous considérons une suite de variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n qui sont susceptibles de changer de loi après les k premières observations. L'objet de ce travail est de détecter l'éventuel changement de loi; pour cela nous étudions le comportement d'un test basé sur la statistique Log-Vraisemblance. Nous montrons que, quand le nombre d'observations devient grand, la loi de la statistique Log-Vraisemblance se comporte comme celle d'une fonction carré du pont Brownien; ceci permet l'évaluation asymptotique du niveau du test étudié.

Nous proposons une application pratique à des données concernant 450 patients HIV-positifs pour lesquels nous disposons de relevés de huit variables biologiques : Globules Blancs, Lymphocytes, Lymphocytes T4 et T8, β 2-Microglobulines, Immunoglobulines G, M et A effectués à des temps différents, pour détecter une aggravation biologique de leur état.

Mots-clés : *Rupture, Pont Brownien, Analyse Discriminante.*

SUMMARY

We Consider a sequence X_1, X_2, \dots, X_n of random variables which are susceptible of changing their distribution after k first observations. The object of this work is to detect the possible change of distribution; for that we study the performance of a test based on the statistic of Log-Likelihood. It shows that when the number of observations becomes large, the distribution of the the statistic Log-Likelihood behaves like that of a square function of the Brownian bridge; this allows the asymptotic level of the test studied. We propose a practical application to data concerning 450 VIH patients for whom we have available plottings of eight biological variables : White Globules, Lymphocytes, Lymphocytes CD4 and CD8, β 2-Microglobulines, Immunoglobulines G, M and A carried out at different times in order to detect a biological worsening of their state.

Keywords : *Change point, Brownian Bridge, Discriminant Analysis.*

1. Introduction et Modèle

Soit X_1, X_2, \dots, X_n une suite de variables aléatoires (v.a.); dans ce travail nous nous proposons d'étudier le problème de test suivant :

$$H_0 : X_i = \theta_0 + \varepsilon_i$$

où pour $i = 1, 2, \dots, n$ les ε_i sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Contre

$$H_1^{(n)} = \bigcup_{k=1}^{n-1} H_1\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \theta_2\right)$$

$$\text{avec : } H_1\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \theta_2\right) : \begin{cases} X_i = \theta_1 + \varepsilon_i & \text{si } i = 1, 2, \dots, k \\ X_i = \theta_2 + \varepsilon_i & \text{si } i = k + 1, \dots, n \end{cases}$$

où les ε_i sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Les paramètres $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ et σ étant inconnus.

Dans la littérature le problème de détection de rupture a été souvent étudié pour la loi Normale; de nombreuses statistiques de test basées sur la moyenne initiale ont été proposées : Chernoff & Zacks (1964), Gardner (1969) et Sen & Srivastava (1975). Hawkins (1977), Cobb (1978) et Worsley (1983, 1986) ont étudié le comportement des tests du type maximum de vraisemblance. Darkhovskh (1976), Bhattacharya & Fierson (1981), Csörgö & Horváth (1988) et Ferger & Stute (1992) ont proposé des méthodes non paramétriques basées sur les rangs et la fonction de répartition empirique. Bien d'autres auteurs comme Deshayes & Picard (1986) ont utilisé des méthodes asymptotiques pour déterminer la loi de la statistique de test, laquelle correspond à certains processus associés au mouvement Brownien. Dans cet article un test de détection de rupture de la moyenne d'une variable gaussienne est proposé. Ce test est basé sur la statistique Log-vraisemblance maximale. Nous montrons que lorsque le nombre d'observations devient grand, la loi asymptotique de cette statistique Log-vraisemblance se comporte comme celle d'une fonction carré du pont Brownien; ceci permet l'évaluation asymptotique du niveau du test étudié. Nous proposons une application pratique à des données concernant 450 patients HIV-positifs pour lesquels nous disposons de relevés de huit variables biologiques : Globules Blancs, Lymphocytes, Lymphocytes T4 et T8, β 2-Microglobulines, Immunoglobulines G, M et A effectués à des temps différents, pour détecter une aggravation biologique de leur état.

2. Test du rapport de vraisemblance

La statistique Log-vraisemblance est définie par :

$$\Lambda_n = \max_{1 < k < n} \Lambda_n^* \left(\frac{k}{n} \right) \quad (1)$$

$$\text{avec } \Lambda_n^* \left(\frac{k}{n} \right) = \frac{n}{2} \text{Log} \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_1^2(k)} \right) \quad (2)$$

$\hat{\sigma}_0^2$ et $\hat{\sigma}_1^2(k)$ désignent les estimateurs du maximum de vraisemblance de σ^2 sous les hypothèses H_0 et $H_1 \left(\theta_1, \frac{k}{n}, \theta_2 \right)$, obtenus de la façon suivante :

Les estimateurs $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1(k)$ et $\hat{\theta}_2(k)$ sont donnés par

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_0 = \bar{X}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, & \hat{\theta}_1(k) = \bar{X}_k &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i \\ \text{et } \hat{\theta}_2(k) = \bar{X}_k^* &= \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^n X_i \text{ d'où } \hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta}_0)^2 \\ \hat{\sigma}_1^2(k) &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^k (X_i - \hat{\theta}_1(k))^2 + \sum_{i=k+1}^n (X_i - \hat{\theta}_2(k))^2 \right]. \end{aligned}$$

La valeur \hat{k} ($1 < \hat{k} < n$) de k réalisant le maximum de $\Lambda_n^* \left(\frac{k}{n} \right)$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance de k sous l'hypothèse alternative $H_1^{(n)}$ et cette valeur qui maximise la vraisemblance sous cette hypothèse, minimise $\hat{\sigma}_1^2(k)$. ■

Pour l'étude du comportement asymptotique de Λ_n^* , sous l'hypothèse H_0 , faisons quelques remarques préliminaires.

1) Il est facile de vérifier que :

$$\begin{cases} \bar{X}_n = \frac{k}{n} \bar{X}_k + \left(1 - \frac{k}{n} \right) \bar{X}_k^* \\ \bar{X}_n - \bar{X}_k = \left(1 - \frac{k}{n} \right) (\bar{X}_k^* - \bar{X}_k) \\ \bar{X}_n - \bar{X}_k^* = \frac{k}{n} (\bar{X}_k - \bar{X}_k^*) \end{cases} \quad (3)$$

De (3) on déduit

$$\hat{\sigma}_1^2(k) = \hat{\sigma}_0^2 - \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n} \right) (\bar{X}_k - \bar{X}_k^*)^2 \quad (4)$$

2) Pour tout $s \leq u < n$, on a :

$$\text{Cov} \left(\bar{X}_s - \bar{X}_s^*, \bar{X}_u - \bar{X}_u^* \right) = \frac{\sigma^2}{n} \frac{u}{n} \left(1 - \frac{s}{n} \right) \quad (5)$$

3) Pour $t \in [0, 1]$, soit $V(t)$ un *pont Brownien*; c'est-à-dire un mouvement Brownien sur $[0; 1]$ conditionné par $V(0) = V(1) = 0$, on sait alors (cf. Billingsley [2]) que pour $t_1 \in [0, 1]$ et $t_2 \in [0; 1]$: $\text{Cov}(V(t_1), V(t_2)) = \min(t_1, t_2) - t_1 t_2$.

Alors pour tout $0 < t_1 \leq t_2 < 1$, on a :

$$\text{Cov} \left(\frac{V(t_1)}{\sqrt{t_1(1-t_1)}}, \frac{V(t_2)}{\sqrt{t_2(1-t_2)}} \right) = \sqrt{\frac{t_1(1-t_2)}{t_2(1-t_1)}} \quad (6)$$

Définition : On définit $\{\Lambda_n^*(t); t \in]0, 1[\}$ comme le processus interpolé linéaire du processus $\left\{ \Lambda_n^* \left(\frac{k}{n} \right); 1 < k < n \right\}$.

Théorème

Sous l'hypothèse H_0 , Λ_n^* converge au sens de la convergence en loi des marginales de dimension finie vers le processus Λ_0 défini par :

$$\Lambda_0(t) = \frac{V^2(t)}{2t(1-t)} \quad (7)$$

où V est un *pont Brownien*.

Preuve : Le développement de Taylor de (2) donne

$$\Lambda_n(t) = \frac{1}{2} \frac{n}{\hat{\sigma}_0^2} \frac{[nt]}{n} \left(1 - \frac{[nt]}{n} \right) \left(\bar{X}_{[nt]} - \bar{X}_{[nt]}^* \right)^2 + o(1) \quad (8)$$

notant $U_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\hat{\sigma}_0^2} \frac{[nt]}{n} \left(1 - \frac{[nt]}{n} \right)} \left(\bar{X}_{[nt]} - \bar{X}_{[nt]}^* \right)$, on remarque que, sous l'hypothèse H_0 , pour tout $s \leq t$, on a, compte tenu de (5) :

$$\text{Cov} (U_n(s), U_n(t)) = \sqrt{\frac{\frac{[ns]}{n} \left(1 - \frac{[nt]}{n} \right)}{\frac{[nt]}{n} \left(1 - \frac{[ns]}{n} \right)}}.$$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov} (U_n(s), U_n(t)) = \sqrt{\frac{s(1-t)}{t(1-s)}}$.

De (6) et (8) on déduit la convergence de Λ_n^* vers Λ_0 . ■

L'un des problèmes cruciaux de détection de rupture, est posé par les effets des bords (les ruptures intervenant aux bords de l'intervalle d'observations). En effet, pour les t proches de 0 ou 1, Λ_0 tend vers l'infini. Pour pénaliser ces effets de bords, nous adoptons la méthode proposée par Deshayes et Picard [7], en considérant la suite de

processus $\Gamma_n(t) = \Psi(t)\Psi(1-t)\Lambda_n^*(t)$, où Ψ est une fonction continue sur $[0, 1]$ vérifiant $\int_0^1 \left(\frac{\Psi(t)}{t}\right)^2 dt < \infty$.

Posons $\Gamma(t) = \Psi(t)\Psi(1-t)\Lambda_0(t)$, c'est un processus continu pour $t \in [0, 1]$; en considérant les moments d'ordre 4 de $\{\Gamma_n(t), t \in]0, 1[\}$ on montre facilement que $\{\Gamma_n(t), t \in]0, 1[\}$ converge en loi vers $\{\Gamma(t), t \in]0, 1[\}$ lorsqu'on munit l'espace $\mathcal{C}([0, 1])$ des fonctions continues sur $[0, 1]$ de la topologie de la convergence uniforme (Voir (7)).

En utilisant la continuité de la fonction «sup», (cf. Billinsley [2]), sur l'espace $\mathcal{C}([0, 1])$, on a alors la proposition suivante.

Proposition : Sous l'hypothèse H_0 , pour tout $\eta \geq 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\sup_{t \in]0, 1[} \Gamma_n(t) \geq \eta \right) = P \left(\sup_{t \in]0, 1[} \Gamma(t) \geq \eta \right) \quad (9) \blacksquare$$

Construction du test

Pour la construction du test, nous prenons comme région de rejet $\left\{ \sup_{t \in]0, 1[} \Gamma_n(t) \geq \eta \right\}$ où pour un α donné dans $[0, 1]$, le seuil η_α est déterminé par :

$$P \left(\sup_{t \in]0, 1[} \Gamma(t) \geq \eta_\alpha \right) \leq \alpha. \quad (10)$$

Le tableau suivant présente la répartition de la loi de $\sup_{t \in]0, 1[} \Gamma(t)$ pour les fonctions

$$\Psi(t) = t^\rho \text{ avec } \rho = 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}.$$

Pour α donné, on lit η_α tel que $P \left(\sup_{t \in]0, 1[} \Gamma(t) \geq \eta_\alpha \right) = \alpha$.

	η_n			
$\Psi(t) = t^\rho$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 10\%$	$\alpha = 15\%$
$\rho = 1$	1, 37208	0, 98793	0, 79407	0, 66610
$\rho = \frac{3}{2}$	0, 64956	0, 46677	0, 37881	0, 32244
$\rho = \frac{5}{2}$	0, 15632	0, 10917	0, 08859	0, 07492
$\rho = \frac{7}{2}$	0, 03714	0, 02638	0, 02137	0, 01815

Ces résultats sont obtenus par simulation de 1000 réalisations de la loi asymptotique précédente en découpant l'intervalle du temps $[0, 1]$ par pas de 0,001.

3. Application

Dans cette partie, nous proposons une application du test étudié précédemment à des données concernant les patients HIV-positifs du service de Professeur Willy ROZENBAUM (Hôpital Rotschild, Paris). Les données concernent 450 patients qui ont tous plusieurs relevés de 8 variables biologiques à des temps de suivis différents : Globules Blancs (GB), Lymphocytes (LY), Lymphocytes T4 (T4), Lymphocytes T8 (T8), β 2-Microglobulines (β 2), Immunoglobulines G (IGG), Immunoglobulines M (IGM), et Immunoglobulines A (IGA).

Le but est d'établir un *critère* permettant de prévoir une aggravation de l'état de santé, qui soit une fonction des relevés de variables biologiques et dont l'évolution montrerait une rupture lors de l'aggravation ou mieux précéderait cette aggravation. Nous allons d'abord faire un travail préliminaire pour extraire des données une variable unidimensionnelle sur l'évolution clinique de la maladie et que l'on utilisera ensuite pour construire un test de détection de rupture. A cette fin, nous utiliserons le nombre de Lymphocytes T4 comme *variable prédictive*. En effet, le nombre de T4 décroît au fur et à mesure de l'évolution de la maladie.

Analyse Discriminante

Les coordonnées des 8 variables pour les 450 patients sont classées en deux groupes selon le relevé du nombre T4 sur le patient à la date de l'examen.

- groupe 1 : $T4 < 200$
- groupe 2 : $T4 \geq 200$

L'analyse discriminante est faite par rapport aux deux groupes. Le tableau suivant résume la description de l'axe canonique :

Variabes	Coefficients
GB	0,0045
LY	0,0671
β 2	-0,0632
T8	-0,0173
IGG	-0,0116
IGM	-0,0269
IGA	-0,0377

Les résultats ci-dessus montrent qu'il y a une opposition sur l'*axe canonique* entre les variables LY et T8; on retrouve ainsi les résultats connus dans la littérature.

Il est intéressant de remarquer que les variables IGG, IGM et IGA sortent avec des coefficients négatifs.

Pour un patient observé à plusieurs temps successifs, on construit la combinaison linéaire des variables pondérées par les coefficients de l'axe canonique. La variable que l'on utilise pour établir le test de détection de rupture est donnée par :

$$X = 0,0045*GB + 0,0671*LY - 0,0632*\beta_2 - 0,0173*T_8 \\ -0,0116*IGG - 0,0269*IGM - 0,0377*IGA \quad \blacksquare$$

4. Résultats

Dans notre fichier, nous avons sélectionné 251 patients qui ont au moins 6 temps de suivi. Il y a 222 patients qui ont changé de groupe et 29 patients qui n'ont pas changé de groupe. Parmi les 222 patients qui ont changé de groupe il y a en a 96 pour lesquels nous possédons une date de passage au Sida avéré. Nous remarquons que pour les 29 patients qui n'ont pas changé de groupe nous ne possédons pas de date de passage au Sida avéré.

4.1. Les proportions de bonnes et de mauvaises détections

Nous avons appliqué le test à la variable construite à partir des coefficients de l'axe canonique, le tableau suivant donne les proportions de bonnes et de mauvaises détections pour un niveau égal à 5% et les fonctions de pénalisation $\Psi(t) = t^\rho$; $\rho = 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$.

$\Psi(t) = t^\rho$	Proportions de bonnes détections	Proportions de mauvaises détections
$\rho = 1$	$\frac{87}{222}$ [33%; 46%]*	$\frac{10}{29}$
$\rho = \frac{3}{2}$	$\frac{122}{222}$ [48%; 61%]	$\frac{13}{29}$
$\rho = \frac{5}{2}$	$\frac{96}{222}$ [37%; 50%]	$\frac{19}{29}$
$\rho = \frac{7}{2}$	$\frac{102}{222}$ [39%; 53%]	$\frac{15}{29}$

[]* : intervalle de confiance à 5% pour les proportions

L'examen de tableau montre que dans le meilleur des cas, la puissance du test est comprise entre 48% et 61% et que les meilleures proportions de bonnes détections sont obtenues pour la fonction de pénalisation $\Psi(t) = t^{3/2}$. Pour les proportions de mauvaises détections, nous remarquons que les résultats sont établis sur un assez petit nombre de patients mais ils montrent quand même que les résultats les plus satisfaisants sont obtenus pour la fonction de pénalisation $\Psi(t) = t^{5/2}$.

4.2. Étude de l'estimateur de l'instant de rupture

Dans cette partie, nous proposons une étude sur la valeur prédictive de l'estimateur de l'instant de rupture. Pour cela, nous étudions le nombre de fois (parmi les 96 patients pour lesquels nous possédons une date de Sida avéré) où l'instant de rupture estimé se situe avant la date de Sida avéré et dans ce cas, en étudiant plus précisément de combien de temps en moyenne cette date est devancée. Cette étude n'a été faite que dans le cas où le test concluait significativement à l'existence d'une rupture afin de se placer dans un cadre le plus réel possible. Il est clair que l'étude de la position de l'estimateur va nous permettre de discuter de la validité de la combinaison linéaire obtenue lors de l'analyse discriminante.

Le tableau suivant présente les résultats sur l'estimation \hat{k} de l'instant de rupture k en fonction de la fonction de pénalisation $\Psi(t) = t^\rho$; sur le tableau, il est précisé :

- (1) le nombre d'estimations \hat{k} qui résultaient d'un test significatif, pour un niveau 5% parmi les 96 patients pour lesquels nous possédons une date de Sida avéré
- (2) parmi (1), la différence moyenne entre k et \hat{k} ($k - \hat{k}$)
- (3) le nombre et la proportion d'estimations \hat{k} où l'estimation est prédictive ($\hat{k} < k$)
- (4) parmi (3), la différence moyenne $k - \hat{k}$
- (5) parmi (3), l'écart-type empirique de $k - \hat{k}$

$\Psi(t) = t^\rho$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$\rho = 1$	46	2, 50	32 (70%)	3, 84	2, 66
$\rho = \frac{3}{2}$	67	2, 66	56 (84%)	3, 27	2, 25
$\rho = \frac{5}{2}$	49	2, 75	36 (74%)	3, 97	2, 63
$\rho = \frac{7}{2}$	54	2, 72	39 (72%)	3, 97	2, 74

L'examen de tableau montre que plus de 70% des estimations sont prédictives, ce qui est satisfaisant, mais on en oublie entre $\frac{96 - 67}{96} = 30\%$ et $\frac{96 - 46}{96} = 52\%$. On peut néanmoins noter l'importance de la dispersion des $k - \hat{k}$ (pour $\hat{k} < k$), ce qui limite un peu l'intérêt des résultats précédents.

Pour la concordance entre les différentes fonctions de pénalisation, nous proposons le tableau suivant où il est précisé :

- (1) nombre d'estimations \hat{k} parmi les 96 patients où le test est significatif simultanément pour les quatre fonctions de pénalisation
- (2) parmi (1), proportion d'estimations qui donnent la même valeur \hat{k} pour les quatre fonctions de pénalisation
- (3) nombre d'estimations \hat{k} où $\hat{k} < k$ pour les quatre fonctions de pénalisation
- (4) parmi (3), proportion d'estimations qui donnent la même valeur pour les quatre fonctions de pénalisation

(1)	(2)	(3)	(4)
37	89%	26	86%

L'examen du tableau montre que le nombre d'estimations simultanément significatives est assez important. De plus, il est satisfaisant de constater que 89% des estimations donnent la même valeur de l'instant de rupture pour les quatre fonction de pénalisation.

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur le professeur Bernard BRU (Université PARIS V) pour ses précieux conseils et son aide, ainsi que les référés pour leurs remarques très judicieuses qui m'ont permis d'améliorer la rédaction.

Références

- [1] BHATTACHARYA, P.K. and FRIERSON, F.JR. (1981). A nonparametric control chart for detecting small disorders. *Ann.Statist.* 9 p. 544-554.
- [2] BILLINGSLEY, P. (1968). *Convergence of Probability Measures.* Wiley, New York.
- [3] CHERNOFF, H. and ZACKS, S. (1964). Estimating the current mean of a normal distribution which is subjected to change in time. *Ann.Math.Statist.* 35 p. 999-1018.
- [4] COBB, G.W. (1978). The problem of the Nile : Conditional solution to a change point problem. *Biometrika.* 65(2) p. 243-251.

- [5] CSÖRGÖ, M. and HORVÁTH. (1988). Nonparametric Methods for changepoint problems. *Handbook of statistic*. Vol. 7 p. 403-425.
- [6] DARKHOVSKH, B.S. (1976). A non-parametric method for the *a posteriori* detection of the «disorder» time of a sequence of independent random variables. *Theory Probab. Appel* 21 p. 178-183.
- [7] DESHAYES, J. AND PICARD, D. (1986). Off line statistical analysis of change-point models using non parametric and likelihood methods. Lecture Notes in Control and Information Sciences. N°77 *Springer-Verlag, Berlin*. p. 103-168.
- [8] FERGER, D. and STUTE, W. (1992). Convergence of changepoint estimators. *Stochastic Processes and their Applications*. North-Holland. 42 p. 345-351.
- [9] GARDNER, L.A. JR. (1969). On detecting changes in the mean of normal variates. *Ann.Math.Statist.* 40 p. 116-126.
- [10] GHORBANZADEH, D. (1993). An Application of Likelihood Ratio Test to the Change point problem. *Soumis à Applied Stochastic Model and Data Analysis*.
- [11] GHORBANZADEH, D. (1992). Détection de Rupture dans les modèles Statistiques. *Thèses de doctorat de l'Université PARIS VII*.
- [12] GHORBANZADEH, D. et PICARD, D. (1992). Etude Asymptotique et Pratique du comportement de deux tests de détection de rupture. *Statistique et Analyse des Données*. Vol. 16 p. 63-84.
- [13] HAWKINS, D.M. (1977). Testing a sequence of observations for a shift in location. *J.Amer.Statist.Assoc.* 72 p. 180-186.
- [14] SAPORTA, G. (1990). Probabilités, Analyse des Données et Statistique. *Technip, Paris*.
- [15] SEN, A. and SRIVASTAVA, M.S. (1975). On tests for detecting change in mean. *Ann.Statist.* 3 p. 90-108.
- [16] WORSLEY, K.J. (1983). The power of likelihood ratios and cumulative sum tests for a change in binomial probability. *Biometrika*. 70 p. 91-104.
- [17] WORSLEY, K.J. (1986). Confidence regions and tests for a change-point in a sequence of exponential family random variables. *Biometrika*. 73 p. 455-464.