REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

L. PIERRAT

Estimation de la probabilité de défaillance par interaction de deux lois de Weibull

Revue de statistique appliquée, tome 40, nº 4 (1992), p. 5-13

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1992__40_4_5_0>

Rev. Statistique Appliquée, 1992, **XXXX** (4), 5-13

ESTIMATION DE LA PROBABILITÉ DE DÉFAILLANCE PAR INTERACTION DE DEUX LOIS DE WEIBULL

L. Pierrat

E.D.F. Division Technique Générale et Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble (URA CNRS 355) 37 rue Diderot – 38040 Grenoble Cedex (France)

RÉSUMÉ

Le concept de défaillance par interaction probabiliste est à la base de la méthode résistance-contrainte, dont la portée est souvent compromise par le recours à des lois manipulables mais peu représentatives des distributions réelles (lois normale et log-normale en particulier).

L'utilisation de lois de Weibull s'ajuste mieux aux distributions de résistance et de contrainte, mais leur interaction ne conduit pas à des résultats analytiques exacts.

Toutefois, dans la pratique, lorsque la fiabilité est assez élevée, on montre qu'une solution analytique approchée existe et peut satisfaire un compromis entre la précision numérique et la simplicité d'interprétation.

En assimilant la distribution de la défaillance elle-même à une forme exponentielle de Weibull, on obtient des résultats numériques acceptables ainsi qu'une forme explicite permettant d'analyser l'influence des paramètres des lois résistance-contrainte sur la fiabilité résultante.

Mots-clés : *Fiabilité, Méthode résistance-contrainte, Interaction probabiliste, Distribution de Weibull – Probabilité de défaillance.*

ABSTRACT

The concept of failure prediction by interference theory is the basis of stress-strength model.

The applicable scope of the model is often compromised by the use of manipulable but not very representative distributions such as normal distributions or log-normal distributions.

On the other hand, Weibull distributions fit better the behaviour of stress and strength, but do not give exact analytical results.

In practice, however, when the reliability is high, it can be shown that an approximate analytical solution exists and satisfies a trade-off between numerical accuracy and simplicity of interpretation.

By fitting a Weibull distribution of failure, one can obtain acceptable results and an explicit form which allows to analyze the influence of the parameters of the stress-strength model upon the resulting reliability.

Key-words : *Reliability, Stress, Strength Method, Interference Theory, Weibull Distribution, Probability of Failure.*

1. Concept d'interaction probabiliste

Le concept de défaillance par interaction de deux lois (résistance et contrainte) permet d'envisager la fiabilité sous l'angle technico-économique, en jouant sur les coûts respectifs de dimensionnement et de défaillance. [1,2].

Intuitivement, on conçoit assez bien que l'interaction-contrainte sera d'autant plus forte que les lois correspondantes seront plus dispersées et leurs modes relativement plus proches (figure n° 1).

Mathématiquement, si l'on considère deux lois indépendantes, la probabilité de défaillance peut s'écrire sous la forme d'une intégrale de convolution telle que [1, 2, 3, 5] :

$$P_d = \int_0^\infty f_c(x) F_r(x)\, dx \tag{1}$$

$f_c(x)$ et $F_r(x)$ étant respectivement, la densité de probabilité de la contrainte et la fonction de répartition de la résistance.

2. Interprétation classique du concept

L'obtention des résultats analytiques simples est essentiellement limitée à des lois reproductibles par addition ou multiplication. [1, 2, 5].

Qu'il s'agisse de lois normales additives :

$$f_N(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right] \tag{2}$$

ou de lois log-normales multiplicatives :

$$f_{LN}(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\ln x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right] \tag{3}$$

on obtient la probabilité de défaillance à l'aide de la fonction de répartition (Φ) de la loi normale centrée réduite :

$$P_d = \Phi(-\beta) \tag{4}$$

Dans les cas, l'index de fiabilité (β) s'écrit :

$$\beta = \frac{\mu_r - \mu_c}{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_c^2}} \tag{5}$$

expression dans laquelle les espérances mathématiques (μ_r, μ_c) et les variances (σ_r^2, σ_c^2) concernent respectivement les distributions de résistance et de contrainte obéissant aux lois (2) ou (3) lesquelles interviennent de manière cohérente dans (5).

L'index (β), qui est un paramètre sans dimension assimilable à l'inverse d'un écart-type relatif, fait clairement apparaître l'influence conjointe de la marge de sécurité déterministe et de la dispersion statistique des deux lois.

Cette approche présente l'avantage de fournir une interprétation claire du mécanisme de défaillance par interaction résistance-contrainte, mais l'application pratique de ses résultats reste très limitée.

En effet, les lois considérées le sont surtout en vue de faciliter le calcul analytique, et leur représentant est sujette à caution.

La loi normale, en particulier, est définie pour les valeurs négatives de la variable et présente une symétrie parfaite, propriétés qui ne sont pas toujours compatibles avec les grandeurs physiques associées à la résistance et à la contrainte.

La loi log-normale ne répond qu'en partie à ces exigences, car son asymétrie, strictement positive impose ses comportements limites (asymptotique et au voisinage de l'origine) dans le domaine intéressant le processus d'interaction probabiliste.

3. Interaction de deux lois de Weibull

La modélisation des distributions de résistance et de contrainte par des lois de Weibull, ayant des paramètres différents d'assurer une meilleure représentativité des phénomènes [4].

En effet, la densité de probabilité d'une part :

$$f_w(x) = (\beta/\alpha)(x/\alpha)^{\beta-1}\exp\Big[-(x/\alpha)^\beta\Big] \tag{6}$$

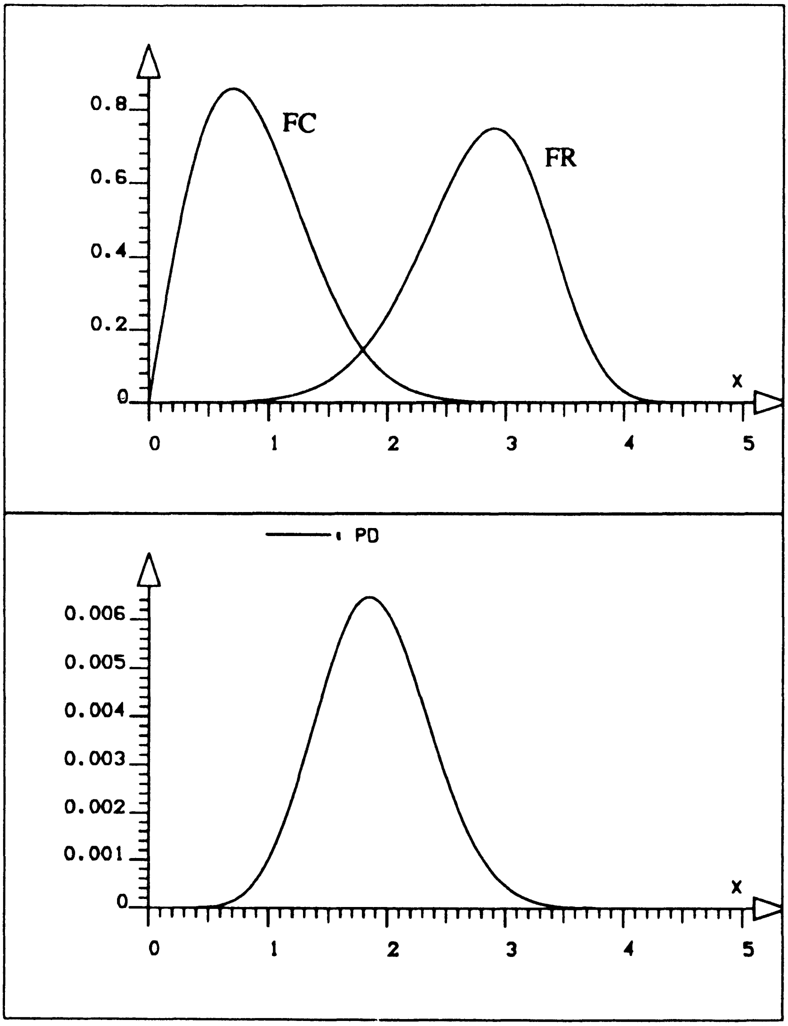
et la fonction de répartition d'autre part :

$$F_w(x) = 1 - \exp\Big[-(x/\alpha)^\beta\Big] \tag{7}$$

font apparaître un paramètre d'échelle (α) et un paramètre de forme (β), dont les ajustements autorisent une grande souplesse d'adaptation.

On peut ainsi définir, de manière continue, une loi dont la dissymétrie peut changer de signe au voisinage de $\beta \# 3,6$ (loi quasi-normale) et inclure des lois plus typiques (loi exponentielle pour $\beta = 1$, loi de Rayleigh pour $\beta = 2$, par exemple).

La figure n°1 qui correspond à une situation réaliste $(\alpha_c/\alpha_r = 1/3$ et $\beta_r/\beta_c = 3)$, illustre bien le mécanisme d'interaction probabiliste entre la résistance



Nota 1 : à la partie supérieure, FC et FR représentent les densités de probabilité de la contrainte et de la résistance ($\alpha_c = 1$, $\beta_c = 2$ et $\alpha_r = 3$, $\beta_r = 6$).

Nota 2 : à la partie inférieure, PD représente la loi de la différence Z = R − C, dont l'intégration (de $-\infty$ à 0) fournit la probabilité de défaillance $P_d = 7.6658\ 10^{-3}$ (cf tableau n°1).

FIGURE 1

Processus d'interaction probabiliste entre deux lois de Weibull et la contrainte, distribuées suivant deux lois de Weibull, indépendantes et de paramètres respectifs (α_r, β_r) et (α_c, β_c).

On constate que la loi de la différence $Z = R - C$, dont l'intégration fournit la probabilité de défaillance, est quantitativement assez proche d'une densité de Weibull; cette observation sera mise à profit par la suite en vue d'améliorer l'estimation de la probabilité de défaillance.

Si, dans ces conditions, on introduit dans l'intégrale (1), d'une part la densité de probabilité de la contrainte (6) de paramètres (α_c, β_c), d'autre part la fonction de répartition de la résistance (7), de paramètres (α_r, β_r), on peut rechercher une solution analytique en développant la fonction de répartition de la résistance sous la forme :

$$F_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{\alpha_r}\right)^{k\beta_r} \tag{8}$$

Un changement de variable adéquat permet alors de décomposer l'intégrale (1) en une somme de fonctions gamma [6], exprimées sous forme intégrale d'Euler :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt \tag{9}$$

Il en résulte que la probabilité de défaillance peut s'écrire, *a priori*, sous la forme explicite suivante :

$$P_d = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{\alpha_c}{\alpha_r}\right)^{k\beta_r} \Gamma(1 + k\beta_r/\beta_c) \tag{10}$$

Bien que cette solution soit soumise, on va le voir, à certaines restrictions, on pourra en extraire une approximation du premier ordre.

4. Recherche d'une solution approchée

La solution (10) posée *a priori* n'existe que si la série alternée est convergente [7], ce qui est réalisé en particulier, si la valeur absolue du terme général de cette série est décroissante.

En désignant par $P_d(k)$ la valeur absolue du terme général de la série (10), on a le rapport :

$$\frac{P_d(k+1)}{P_d(k)} = \left(\frac{\alpha_c}{\alpha_r}\right)^{\beta_r} \left(\frac{1}{k}\right) \frac{\Gamma[(k+1)\beta_r/\beta_c]}{\Gamma[k\beta_r/\beta_c]} \tag{11}$$

La réalité physique du problème d'interaction conduit à faire l'hypothèse que la résistance est en moyenne supérieure à la contrainte, d'où, pour le rapport des paramètres d'échelle des deux lois de Weibull :

$$\left(\frac{\alpha_c}{\alpha_r}\right) < 1 \tag{12}$$

Cette condition étant remplie, la convergence de la série va dépendre seulement du rapport des paramètres de forme des deux lois de Weibull.

Si l'on impose en outre :

$$\left(\frac{\beta_r}{\beta_c}\right) < 1 \tag{13}$$

alors le rapport (11) est inférieur à l'unité, ce qui entraîne la convergence de la série. Cette série étant alternée, on peut obtenir la borne supérieure de l'erreur de troncature au premier ordre, en considérant :

$$P_d(1) - P_d(2) < P_d < P_d(1) \tag{14}$$

Cette situation ne correspond pas à la réalité courante car, généralement, la distribution de la résistance est beaucoup moins dispersée que celle de la contrainte, ce qui entraîne :

$$\left(\frac{\beta_r}{\beta_c}\right) > 1 \tag{15}$$

Dans ce cas, la série (10) peut diverger et ne peut donc représenter une solution de l'intégrale (1) qui possède par ailleurs une valeur finie.

On notera que si $\beta_r/\beta_c = 1$, la série (10) est convergente par suite de la condition (12).

De façon générale, le premier terme de la série étant toujours positif, est susceptible de représenter une solution approximative de l'intégrale (1), sous la forme :

$$P_d(1) = \left(\frac{\alpha_c}{\alpha_r}\right)^{\beta_r} \Gamma(1 + \beta_r/\beta_c) \tag{16}$$

Nous avons vérifié numériquement que (16) est toujours un majorant de la solution exacte (1), que la série soit convergente ou divergente.

5. Assimilation à une forme de Weibull

Une analyse numérique des erreurs ainsi que l'observation de la figure n°1 nous ont conduit à modifier (16), solution approchée de l'intégrale (1), sous forme d'une fonction exponentielle complémentaire :

$$P_d(w)\#1 - \exp[-P_d(1)] \tag{17}$$

laquelle respecte la majoration systématique de l'erreur et réduit uniformément cette dernière dans une domaine de plus forte interaction des deux lois.

Le tableau n°1 regroupe, à titre comparatif, un certain nombre de résultats correspondant à une plage assez étendue de probabilités de défaillance; on peut vérifier que la solution proposée sous la forme (17) est une approximation suffisante en pratique, de la solution exacte (1).

TABLEAU n°1

Etude numérique de la validité de la solution analytique

α_r	α_c/α_r	β_r	β_c	β_r/β_c	P_d	$P_d(1)$	$P_d(w)$
3/2	2/3	3	2	3/2	$2{,}468^{-1}$	$3{,}939^{-1}$	$3{,}256^{-1}$
2	1/2	3	2	3/2	$1{,}314^{-1}$	$1{,}662^{-1}$	$1{,}531^{-1}$
2	1/2	4	2	2	$9{,}465^{-2}$	$12{,}50^{-2}$	$11{,}75^{-2}$
5/2	2/5	4	2	2	$4{,}484^{-2}$	$5{,}120^{-2}$	$4{,}990^{-2}$
5/2	2/5	5	2	5/2	$2{,}934^{-2}$	$3{,}400^{-2}$	$3{,}350^{-2}$
3	1/3	5	2	5/2	$1{,}279^{-2}$	$1{,}370^{-2}$	$1{,}360^{-2}$
3	1/3	6	2	3	$7{,}666^{-3(*)}$	$8{,}230^{-3}$	$8{,}200^{-3}$
3	1/3	6	3	2	$2{,}721^{-3}$	$2{,}743^{-3}$	$2{,}740^{-3}$
7/2	2/7	6	3	2	$1{,}084^{-3}$	$1{,}088^{-3}$	$1{,}087^{-3}$
7/2	2/7	8	3	8/3	$1{,}780^{-4}$	$1{,}782^{-4}$	$1{,}781^{-4}$
7/2	2/7	9	3	3	$7{,}607^{-5}$	$7{,}613^{-5}$	$7{,}612^{-5}$
7/2	2/7	12	3	4	$7{,}100^{-6}$	$7{,}102^{-6}$	$7{,}102^{-6}$
7/2	2/7	15	3	5	$8{,}282^{-7}$	$8{,}282^{-7}$	$8{,}282^{-7}$

Nota 1 : Dans tous les cas $\alpha_c = 1$
Nota 2 : La notation $(x)^{-n}$ signifie $(x)10^{-n}$
Nota 3 : P_d est la valeur de l'intégrale calculée numériquement
Nota 4 : $P_d(1)$ est l'approximation analytique du premier ordre
Nota 5 : $P_d(w)$ est l'approximation analytique de Weibull
Nota 6 : $(*)$ Ce cas correspond à la figure n°1.

Outre l'extension du domaine de validité numérique, cette forme exponentielle permet d'assimiler la probabilité de défaillance à la fonction de répartition d'une loi de Weibull :

$$P_d(w) \# 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha_x}\right)^{\beta_x}\right) \tag{18}$$

dans laquelle on peut identifier une variable (x) égale au rapport des paramètres d'échelle des lois de résistance et de contrainte :

$$x = \alpha_c/\alpha_r \tag{19}$$

ainsi qu'un paramètre de forme (β_x) égal à celui de la loi de la résistance :

$$\beta_x = \beta_r \tag{20}$$

et un paramètre d'échelle (α_x) tenant compte lui aussi des paramètres de forme des deux lois :

$$\alpha_x = [\Gamma(1 + \beta_r/\beta_c)]^{-1/\beta_r} \tag{21}$$

Cette assimilation de la probabilité de défaillance à une distribution de Weibull, confère à ce type de loi une propriété de quasi-reproduction, évidemment limitée, mais dans une plage correspondant aux besoins de la pratique (interaction faible illustrée sur la figure n° 1).

L'avantage d'une forme analytique, même approchée, est évident si l'on envisage d'optimaliser le dimensionnement en fonction des contraintes, par l'intermédiaire d'une analyse de sensibilité paramétrique.

On notera en particulier, que la dispersion affectant la résistance, se traduit par le facteur de forme (β_r), dont l'influence devient facile à appréhender, dans une optique analogue à celle proposée dans le cas de lois normales [5].

6. Conclusions

L'obtention d'une forme approchée, mais explicite, de la probabilité de défaillance résultant de l'interaction de deux lois de Weibull, permet d'étendre l'utilisation de la méthode résistance-contrainte à des cas plus réalistes.

En matière de fiabilité, la maîtrise des paramètres d'influence est bien plus importante que la valeur absolue des résultats, car une perception claire des mécanismes sous-jacents est à la base d'une approche technico-économique.

De ce point de vue, le concept d'interaction probabilise et la méthode résistance-contrainte qui en découle, ont une vertu essentielle : fixer plus explicitement les termes du compromis entre l'investissement (marge de sécurité lors de la conception) et le risque de défaillance fonctionnelle (interaction au cours du cycle de vie).

7. Remerciements

La rédaction de la revue et C. Benski m'ont fait par de remarques qui m'ont permis d'améliorer cet article; Y.J. Wang m'a apporté son aide pour la validation numérique de la solution proposée.

8. Bibliographie

[1] Kapur K.C., Lamberson L.R. (1977) "Reliability in Engineering Design", Wiley, New-York.

[2] Kececioglu D. (1972) "Reliability Analysis of Mechanical Components and Systems". Nucl. Eng. Design. Vol. 19, pp.259-290.

[3] Cramer H. (1951) "Mathematical Methods of Statistics". Princeton University Press.

[4] Weibull W. (1951) "A statistical distribution function of wide applicability" J. Appl. Mech. Vol. 18, pp. 293-297.

[5] Desroches A., Neff M. (1983) «Introduction de la loi de probabilité du coefficient de variation dans les applications de la méthode résistance-contrainte». Revue de Statistique Appliquée, vol. 31, n°3 pp. 17-26.

[6] Davis P.J. (1972) "Gamma Function and Related Functions" Handbook of Mathematical Functions – NBS Séries, 55.

[7] Kreyszig E. (1984) "Advanced Engineering Mathematics" 5th Edition, Wiley.