

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

C. COCOZZA-THIVENT

F. KERVEGANT

**Quantification en sûreté de fonctionnement par
approximation des systèmes de grande taille
: méthode des états fictifs**

Revue de statistique appliquée, tome 40, n° 2 (1992), p. 17-30

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1992__40_2_17_0

© Société française de statistique, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUANTIFICATION EN SURETÉ DE FONCTIONNEMENT PAR APPROXIMATION DES SYSTÈMES DE GRANDE TAILLE : MÉTHODE DES ÉTATS FICTIFS

C. COCOZZA-THIVENT (*), F. KERVEGANT (**)

(* et **) Université de Technologie de Compiègne, Département Génie Informatique,
BP 647, 60206 Compiègne Cedex

(**) Département Etudes de Sûreté et Fiabilité,
DER, EDF, 1 Avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart Cedex

RÉSUMÉ

Nous montrons tout d'abord l'intérêt, pour les études quantitatives de sûreté de fonctionnement, de la modélisation à l'aide de processus de Markov. Mais en pratique les calculs sont souvent irréalisables car la taille de l'espace d'états est trop élevée, d'où la nécessité de construire des modèles approchés de taille raisonnable. Après avoir constaté que les simplifications couramment effectuées pouvaient conduire à de fortes erreurs, nous proposons une nouvelle méthode, plus précise. Cette méthode dite « des états fictifs » permet une construction hiérarchique du modèle.

Mots-clés : sûreté de fonctionnement, fiabilité, disponibilité, processus de Markov, approximation, agrégation d'états, méthode des états fictifs.

Introduction

En fiabilité prévisionnelle, la modélisation par processus de Markov permet de représenter et quantifier l'évolution d'un système à partir des caractéristiques de ses sous-systèmes ou composants. Malheureusement la taille de l'espace d'états qui en résulte est souvent trop élevée pour que les calculs soient réalisables et il est nécessaire d'effectuer des approximations.

Après un bref rappel dans le premier paragraphe des outils et des difficultés de la fiabilité prévisionnelle, nous analysons, dans le paragraphe II, les approximations effectuées couramment lors de la prise en compte de composants élémentaires en série. Nous montrons qu'il n'est pas toujours raisonnable d'approcher la loi du temps de séjour dans les états de panne du système global par une loi exponentielle,

Ce travail a été subventionné par le Département Etudes de Sûreté et Fiabilité de la Direction des Etudes et Recherches de EDF à Clamart.

et nous proposons, à partir de l'étude de cas tests, de la représenter par une combinaison linéaire de deux lois exponentielles.

Dans le troisième paragraphe, nous expliquons comment, partant des enseignements de l'étude précédente, nous pouvons traiter un système complexe de manière hiérarchique, en «résumant» le comportement, du point de vue de la sûreté de fonctionnement, des sous-systèmes successifs considérés par des processus de Markov à trois ou quatre états.

On peut noter également que l'un des reproches fait habituellement à la méthode markovienne est qu'elle suppose que les taux de réparation des composants «de base» sont constants; la méthode que nous proposons peut tout à fait être utilisée pour prendre en compte des taux de réparation (ou même de défaillance) non constants car l'approximation de la loi des durées de réparation par un mélange (non convexe) de deux lois exponentielles est assez souple.

I. Quantification en sûreté de fonctionnement

I. Quelques grandeurs caractéristiques

Selon la norme AFNOR, la fiabilité d'un système est mesurée par la probabilité que celui-ci accomplisse une fonction requise, dans des conditions données, pendant une durée donnée. Le système considéré peut être dans différents états, l'ensemble des états correspondant à l'accomplissement de la fonction requise est noté \mathcal{M} (nous disons alors que le système est en marche), son complémentaire est noté \mathcal{P} (le système est alors en panne).

Nous supposons que le système est initialement en marche; et nous notons T son premier instant de défaillance, c'est-à-dire son instant d'entrée dans \mathcal{P} . Si le système ne peut ensuite revenir dans \mathcal{M} , il est dit non réparable.

Notons X_t l'état du système à l'instant t .

Le but des méthodes quantitatives en sûreté de fonctionnement est de calculer des caractéristiques dont les plus utilisées sont :

$$\text{la fiabilité (reliability en Anglais) : } R(t) = \mathbb{P}(X_s \in \mathcal{M}, \forall s \leq t),$$

$$\text{ou de façon équivalente la défiabilité : } \bar{R}(t) = 1 - R(t)$$

$$\text{la disponibilité (availability en Anglais) : } D(t) = \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{M}),$$

$$\text{ou de façon équivalente l'indisponibilité : } \bar{D}(t) = 1 - D(t).$$

Remarquons que pour un système non réparable la fiabilité est égale à la disponibilité.

Nous supposons toujours que la loi de T possède une densité «régulière» par rapport à la mesure de Lebesgue; on préfère souvent exprimer la loi de T non par sa densité mais par son taux de hasard, appelé dans le cas qui nous préoccupe

«taux de défaillance» et noté λ , défini par :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}(T \leq t + \Delta t / T > t) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}(X_{t+\Delta t} \in \mathcal{P} / X_s \in \mathcal{M} \forall s \leq t) \\ &= -\frac{R'(t)}{R(t)}, \end{aligned}$$

par conséquent :

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) ds\right).$$

Nous définissons de manière analogue le taux de réparation du système par :

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}(X_{t+\Delta t} \in \mathcal{M} / X_s \in \mathcal{P} \forall s \leq t).$$

2. Cas d'un système simple

Notons M_i (resp. P_i) ($i \geq 1$) la durée de la $i^{\text{ème}}$ période de bon fonctionnement (resp. de réparation) du système considéré.

Nous dirons que le système est simple si la suite des instants de panne et de réparation forme un processus de renouvellement alterné modifié ([1], [2]), c'est-à-dire si :

- les v.a. $M_1, P_1, M_2, P_2, \dots$ sont indépendantes,
- les v.a. $M_k (k \geq 2)$ ont même loi,
- les v.a. $P_k (k \geq 1)$ ont même loi.

Nous appelons «système élémentaire» ou «composant élémentaire» un système simple dont les taux de défaillances et de réparation sont constants; pour un tel système les v.a. $M_k (k \geq 1)$ sont de loi exponentielle de paramètre λ et les v.a. $P_k (k \geq 1)$ sont de loi exponentielle de paramètre μ .

Dans le cas d'un système simple, on obtient facilement la transformée de Laplace D^* de la disponibilité en fonction des transformées de Laplace des différentes lois ([1],[2]); mais on ne sait pas résoudre le problème suivant :

supposons qu'un système S soit formé de 2 systèmes simples indépendants S_1 et S_2 placés en parallèle (c'est-à-dire que S est en panne si et seulement si S_1 et S_2 sont en panne); comment calculer la fiabilité du système S à partir des caractéristiques de S_1 et de S_2 si les deux systèmes ne sont pas élémentaires ?

3. Quantification par arbre de défaillance

En général le système à étudier se présente comme formé de composants (ou sous-systèmes). Le problème de l'analyse prévisionnelle est de calculer les caractéristiques du système global à partir de celles des composants supposées connues.

La méthode la plus couramment répandue consiste à représenter les différentes combinaisons entraînant la panne d'un système par un arbre, appelé arbre de défaillance, dont les feuilles sont des événements de base supposés indépendants entre eux. Un événement de base correspond très souvent à l'état (« marche » ou « panne ») d'un composant. On peut alors calculer la disponibilité du système à partir de calculs élémentaires de probabilités.

Par contre, l'évolution temporelle du système n'étant pas représentée, il n'est pas possible de calculer rigoureusement la fiabilité. Il est alors habituel de donner une approximation de la fiabilité en utilisant le pseudo-taux de défaillance $\tilde{\lambda}$, introduit par Vésely ([4]) défini par :

$$\tilde{\lambda}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{P}(X_{t+\Delta t} \in \mathcal{P} / X_t \in \mathcal{M}).$$

Le calcul de ce taux à l'aide d'arbre de défaillance ne pose pas de problème ([4]).

Pagès et Gondran ([3]) ont donné des conditions suffisantes pour que $\tilde{\lambda}(\infty)$ soit une bonne approximation de $\lambda(\infty)$. L'expérience prouve que la condition fournie est loin d'être nécessaire, que dans de nombreux cas l'approximation de $\lambda(t)$ par $\tilde{\lambda}(t)$ est bonne pour l'ensemble des valeurs de t . La méthode de Vésely est donc robuste mais son domaine de validité reste mal connu.

4. Modélisation par un processus markovien

Cette méthode permet d'avoir une représentation dynamique de l'évolution du système global et de calculer, en théorie, toutes les grandeurs caractéristiques de sûreté de fonctionnement.

Dans cette modélisation, un état du système est décrit par l'ensemble des états de ses composants de base, *supposés élémentaires*. Dans ces conditions le processus X_t décrivant la suite des états du système est un processus de Markov à espace d'états fini (noté E), dont le générateur est représenté par une matrice A de taux de transition. Les termes de cette matrice sont fonction des taux de défaillance et de réparation des composants élémentaires.

Posons : $S_t(i, j) = \mathbb{P}(X_t = e_j / X_0 = e_i)$.

La matrice A est caractérisée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+\Delta t} = e_j / X_t = e_i) &= A(i, j)\Delta t + o(\Delta t) \quad \text{pour } i \neq j \\ A(i, i) &= - \sum_{j:j \neq i} A(i, j) \end{aligned}$$

Nous supposons que $E = \{e_1, \dots, e_N\}$. Pour des raisons de commodité de traitement, les états du système global sont numérotés de telle sorte que les m premiers états correspondent aux états de marche et les $\ell = N - m$ derniers aux états de panne.

Toutes les grandeurs caractéristiques de la sûreté de fonctionnement peuvent être calculées en théorie grâce aux équations de Kolmogorov :

$$S_t' = A S_t = S_t A$$

autrement dit :

$$S_t = e^{At}$$

A partir de S_t , on obtient par exemple la disponibilité sous la forme :

$$D(t) = \sum_i \sum_{j=1}^m \mathbb{P}(X_0 = e_i) S_t(i, j).$$

Pour avoir la fiabilité, on calcule la disponibilité du système obtenu en rendant les états de panne absorbants.

En pratique on se heurte très rapidement à la taille prohibitive de la représentation (au moins 2^n états pour n composants de base). La construction même de la matrice de transition ne peut se faire manuellement ; des techniques d'intelligence artificielle permettent de remédier à ce problème. La quantification passe par des simplifications ou des approximations.

II. Approximation d'une loi de temps de séjour

Afin de réduire la taille de l'espace d'états du processus de Markov décrivant l'évolution du système global, il est naturel d'essayer de former des macro-états par regroupement des états initiaux, puis de définir les transitions entre ces macro-états pour pouvoir effectuer la quantification sur le processus agrégé (supposé markovien).

Malheureusement, en général le processus agrégé perd son caractère markovien ; cela se traduit pratiquement par l'impossibilité de définir rigoureusement les taux de transition entre les états de ce dernier. En pratique, les taux de transition du système agrégé sont définis de manière heuristique.

Nous allons tout d'abord examiner les approximations qui sont couramment faites pour les systèmes de type série puis nous proposerons une autre approximation qui nous permettra de traiter également des systèmes de type parallèle ou série-parallèle.

1. Taux équivalents pour les systèmes de type série

Un système formé de n composants élémentaires indépendants placés en série de taux de défaillance et de réparation respectifs égaux à λ_i et μ_i est remplacé par un système à 2 états (marche et panne : on agrège donc les états de panne) ayant pour taux de défaillance et de réparation :

$$\lambda_e = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \mu_e = \frac{\lambda_e}{\sum_{i=1}^n \lambda_i / \mu_i}$$

L'expression de λ_e est naturelle, elle correspond bien au taux de transition du système initial de l'état de marche vers l'ensemble des états de panne.

On vérifie facilement que, pour que le système initial et le système approché aient même disponibilité asymptotique, il faut que le taux de réparation du système approché soit :

$$\tilde{\mu}_e = \lambda_e \frac{1}{\prod_i (\lambda_i / \mu_i + 1) - 1}$$

Comme en général les λ_i / μ_i sont petits devant 1, le taux $\tilde{\mu}_e$ est proche de μ_e .

Nous avons regardé sur des cas tests si la disponibilité du processus approché construit à partir des taux λ_e et μ_e était une bonne approximation de la disponibilité du système initial. Nous avons observé assez souvent des erreurs relatives sur l'indisponibilité de l'ordre de quelques pour-cent, mais dans certains cas l'approximation peut conduire à des erreurs beaucoup plus importantes. Nous avons constaté que la courbe $t \rightarrow \lambda(t)$ du taux de défaillance des systèmes pour lesquels l'approximation donnait de mauvais résultats, présentait deux vitesses de variation : une variation rapide pour les temps petits et une variation beaucoup plus lente pour les temps importants. Cela nous a conduit à proposer une autre approximation.

Au lieu de construire un système approché avec un taux de réparation constant, c'est-à-dire avec une loi du temps de séjour dans l'état de panne qui soit exponentielle, nous proposons un système approché pour lequel la loi du temps de séjour dans les états de panne soit combinaison linéaire de deux exponentielles.

2. Approximation des temps de séjour dans les états de panne d'un système de type série

Nous cherchons des p_i et des r_i ($i = 1, 2$) de telle sorte que $M_e(t) = p_1 e^{-r_1 t} + p_2 e^{-r_2 t}$ soit une «bonne approximation» de la démaintenabilité réelle $M(t) = \mathbf{P}(P_k > t)$ du système étudié. Nous supposons que $0 < r_2 < r_1$ et naturellement que $M_e(0) = M(0) = 1$, c'est-à-dire $p_1 + p_2 = 1$.

Différentes heuristiques sont possibles. Nous pouvons introduire la dépendance suivante entre les composants du système initial : pendant que l'un des

composants est défaillant les autres ne peuvent tomber en panne; on constate expérimentalement qu'il s'agit d'une bonne approximation. Cela revient à remplacer $M(t)$ par :

$$\tilde{M}(t) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{-\mu_i t}$$

On identifie alors $\frac{d}{dt} \text{Log } \tilde{M}$ et $\frac{d}{dt} \text{Log } M_e$ pour $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$; puis les disponibilités asymptotiques du système initial et du système approché que l'on veut construire. On obtient ainsi :

$$r_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i - r_2 \lambda}{\lambda - r_2(B-1)} \quad r_2 = \min(\mu_i)$$

$$p_1 = \frac{r_1 r_2(B-1) - \lambda r_1}{\lambda(r_2 - r_1)} \quad p_2 = 1 - p_1$$

avec

$$B = \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i)}{\prod_{i=1}^n \mu_i} \quad \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

3. Résultats

Nous avons comparé les qualités de l'approximation classique et de celle que nous proposons en comparant les disponibilités des systèmes approchés obtenus sur différents exemples.

Le système approché que nous proposons correspond à un processus de renouvellement alterné dont :

- la loi du temps de séjour dans les états de marche est exponentielle de paramètre :

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

- la loi du temps de séjour dans les états de panne est :

$$p_1 r_1 e^{-r_1 t} + p_2 r_2 e^{-r_2 t}$$

(les paramètres p_i et r_i étant déterminés comme indiqué dans le paragraphe précédent). Le calcul de sa disponibilité ne pose donc pas de problème.

L'approximation que nous proposons, plus riche, donne évidemment de meilleurs résultats. Lorsque l'approximation classique donne de bons résultats le gain n'est pas très important. Par contre lorsque l'approximation classique donne de mauvais résultats, notre méthode peut se révéler très intéressante, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple : Il s'agit d'un système à quatre composants pour lequel les taux sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1 \cdot 10^{-4}, \quad \mu_1 = 1 \cdot 10^{-2}; \quad \lambda_2 = 8 \cdot 10^{-7}, \quad \mu_2 = 8 \cdot 10^{-4}; \\ \lambda_3 = 5 \cdot 10^{-5}, \quad \mu_3 = 3 \cdot 10^{-4}; \quad \lambda_4 = 7 \cdot 10^{-6}, \quad \mu_4 = 2,1 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Nous notons $\bar{D}(t)$ l'indisponibilité du système initial, $\bar{D}_1(t)$ celle du système approché classique (ayant pour taux λ_e et μ_e), $\bar{D}_2(t)$ celle du système approché que nous proposons et E_1 et E_2 les erreurs relatives correspondantes :

$$E_1(t) = \frac{\bar{D}_1(t) - \bar{D}(t)}{\bar{D}(t)}, \quad E_2(t) = \frac{\bar{D}_2(t) - \bar{D}(t)}{\bar{D}(t)}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lambda_e = 1,586 \cdot 10^{-4}, \quad \mu_e = 8,7 \cdot 10^{-4} \\ r_1 = 6,53 \cdot 10^{-3}, \quad r_2 = 3 \cdot 10^{-4}, \quad p_1 = 6,828 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

Temps en h	$\bar{D}(t)$	$\bar{D}_1(t)$	$\bar{D}_2(t)$	$E_1(t)$	$E_2(t)$
10	$1,53 \cdot 10^{-3}$	$1,57 \cdot 10^{-3}$	$1,53 \cdot 10^{-3}$	3%	0%
100	$1,19 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$1,18 \cdot 10^{-2}$	26%	-1%
500	$3,49 \cdot 10^{-2}$	$6,17 \cdot 10^{-2}$	$3,4 \cdot 10^{-2}$	76%	-3%
1000	$5,49 \cdot 10^{-2}$	$9,85 \cdot 10^{-2}$	$5,73 \cdot 10^{-2}$	79%	4%
10000	$1,51 \cdot 10^{-1}$	$1,53 \cdot 10^{-1}$	$1,51 \cdot 10^{-1}$	2%	0%

4. Approximation de la fiabilité des systèmes de type parallèle

Par analogie avec ce qui vient d'être fait, pour un système formé de n composants élémentaires placés en parallèle, nous pouvons essayer d'approcher le temps de séjour dans les états de marche par une combinaison linéaire de deux lois exponentielles, c'est-à-dire la fiabilité du système par :

$$R_e(t) = p_1 e^{-r_1 t} + p_2 e^{-r_2 t}$$

Or, la probabilité pour qu'au moins deux composants tombent en panne dans l'intervalle de temps $(0, \Delta t)$ est en $o(\Delta t)$ donc, si tous les composants sont en

marche à l'instant initial, le taux de défaillance du système parallèle est nul à l'instant 0 : $\lambda(0) = 0$. Nous imposons aussi cette condition pour le système approché, ce qui s'écrit :

$$p_1 r_1 + p_2 r_2 = 0. \quad (1)$$

L'identification des paramètres p_i et r_i se fait en utilisant (1), la condition $p_1 + p_2 = 1$ (qui signifie que le système est en marche à l'instant initial) ainsi que deux autres relations, on peut par exemple identifier :

- le taux de défaillance asymptotique du système réel (donné par la plus petite valeur propre en module de la matrice de fiabilité) et celui du système approché (qui est r_2 si $0 < r_2 < r_1$)

- la fiabilité du système réel et celle du système approché en un temps «intermédiaire» t_0 .

Les résultats obtenus pour la fiabilité sont bons (erreur relative de quelques pour-cents) sauf éventuellement pour les temps petits c'est-à-dire inférieurs à une dizaine d'heures (l'erreur relative pouvant atteindre 30% dans certains exemples). On peut alors se demander si l'approximation par une combinaison linéaire de deux exponentielles est suffisante mais les résultats ne nous ont pas semblé suffisamment pénalisants pour justifier une complication du modèle.

Nous exposerons dans le paragraphe suivant comment nous pouvons «compléter» notre modèle approché pour effectuer un calcul de disponibilité.

III. MÉTHODE DES ÉTATS FICTIFS

1. Principe de la méthode

Nous allons montrer que toute loi, combinaison linéaire de deux exponentielles, correspond au temps de séjour d'un processus de Markov dans un ensemble à deux états. Cela nous permettra de représenter le système approché que nous proposons dans le cas série par un processus de Markov à trois états : un état de marche et deux états de panne. Les deux états de panne que nous construisons n'ont aucune réalité physique; c'est pourquoi nous appelons notre méthode «méthode des états fictifs».

De même, nous pourrions approcher un système formé de composants élémentaires en parallèle par un processus de Markov à trois états : deux états de marche et un état de panne. Et un système plus général sera représenté par un processus de Markov à 4 états : deux états de marche et deux états de panne.

L'intérêt d'une telle démarche est de pouvoir procéder de manière itérative. Les processus «réduits» que nous obtenons peuvent ensuite être intégrés dans une modélisation plus vaste. Un système ayant un nombre d'états prohibitif pourra ainsi être traité par «réductions successives».

2. Ajustement des paramètres du modèle markovien

a) Ajustement des temps de séjour :

Posons $f(t) = p_1 r_1 e^{-r_1 t} + p_2 r_2 e^{-r_2 t}$ ($t \geq 0$, $0 < r_2 < r_1$). Il est facile de vérifier que f est une densité de probabilité si et seulement si :

$$p_1 + p_2 = 1, \quad p_2 \geq 0, \quad p_1 r_1 + p_2 r_2 \geq 0.$$

On remarque que la condition $p_1 \geq 0$ n'est pas exigée. Dans des systèmes parallèle, la loi du temps de séjour dans les états de marche admet un maximum pour une valeur de t strictement positive; quand nous approchons une telle loi par la fonction f , nous obtenons un paramètre $p_1 < 0$.

Considérons un processus de Markov ayant un nombre d'états $d \geq 3$, notés e_1, e_2, \dots, e_d . Nous définissons les a_i et les c_i ($i = 1, 2$) par :

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 3} a(e_1, e_j) &= a_1, & \sum_{j \geq 3} a(e_2, e_j) &= a_2, \\ a(e_1, e_2) &= c_1, & a(e_2, e_1) &= c_2. \end{aligned}$$

Nous cherchons à déterminer ces coefficients de telle sorte que la loi du temps de séjour T dans l'ensemble $\{e_1, e_2\}$ en partant de l'état e_1 soit f .

Un calcul simple montre que :

$$\mathbb{P}(T > t / X_0 = e_1) = \frac{c_1(a_2 + \lambda_2)e^{\lambda_1 t} + (a_1 + \lambda_1)(a_2 + c_2 + \lambda_2)e^{\lambda_2 t}}{c_1(a_2 + \lambda_2) + c_2(a_1 + \lambda_1) + (a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_2)}$$

où λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation :

$$\lambda^2 + (a_1 + c_1 + a_2 + c_2)\lambda + c_1 a_2 + c_2 a_1 + a_1 a_2 = 0.$$

Par identification, après quelques calculs, nous obtenons :

$$\begin{aligned} a_1 &= p_1 r_1 + p_2 r_2, & c_1 &= \frac{\rho + p_2(r_1 - r_2)^2}{(r_1 - r_2)} \\ a_2 &= \frac{\rho(p_1 r_1 + p_2 r_2) + p_2 r_2(r_1 - r_2)^2}{\rho + p_2(r_1 - r_2)^2}, \\ c_2 &= -\frac{\rho(\rho + (r_1 - r_2)^2)}{(r_1 - r_2)(\rho + p_2(r_1 - r_2)^2)}, \end{aligned}$$

où ρ est un paramètre qu'il faut choisir judicieusement pour que les coefficients ci-dessus soient positifs; ce qui donne :

$$\begin{aligned} -p_2 r_2(r_1 - r_2)^2 \leq (p_1 r_1 + p_2 r_2)\rho \leq 0 & & \text{si } p_1 > 0 \\ -p_2(r_1 - r_2)^2 \leq \rho \leq 0 & & \text{si } p_1 < 0 \end{aligned}$$

Il y a donc toujours une (infinité de) solution(s).

b) Cas d'un système série :

Nous approchons le système initial par un processus à trois états comprenant un état de marche (l'état 1) et deux états de panne (les états 2 et 3). L'état initial est l'état 1.

La loi du temps de séjour dans l'état de marche est exponentielle de paramètre $\lambda_e = \sum_j \lambda_j$. Compte tenu de ce qui a été dit précédemment, nous approchons la

loi du temps de séjour dans les états de panne par $f(t) = p_1 r_1 e^{-r_1 t} + p_2 r_2 e^{-r_2 t}$; ces états de panne étant notés 2 et 3, l'état 2 (resp. 3) correspond à l'état e_1 (resp. e_2) du paragraphe a). Nous calculons les paramètres a_i et c_i à partir des p_i et des r_i ($i = 1, 2$) par les formules de a).

La matrice de taux de transition du processus de Markov ainsi construit s'écrit donc :

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_e & \lambda_e & 0 \\ a_1 & -(a_1 + c_1) & c_1 \\ a_2 & c_2 & -(a_2 + c_2) \end{pmatrix}$$

c) Cas d'un système parallèle

Pour un système markovien ne comportant qu'un état de panne (par exemple un système parallèle formé de composants élémentaires) dont l'état initial est la marche, la suite des instants de panne et de réparation forme un processus de renouvellement alterné modifié.

Nous avons vu dans le paragraphe II.4 comment approcher la loi du premier temps de séjour dans les états de marche par $f(t) = p_1 r_1 e^{-r_1 t} + p_2 r_2 e^{-r_2 t}$, avec $p_1 r_1 + p_2 r_2 = 0$.

Nous construisons donc un processus de Markov à trois états, les états de marche sont les états 1 et 2, l'état de panne est l'état 3, l'état initial l'état 1. Les taux de transition a_i et c_i associés aux états 1 et 2 sont calculés par les formules du paragraphe III.2.a (avec $e_1 = 1$ et $e_2 = 2$). Le taux de transition de l'état de panne 3 vers l'ensemble des états de marche $\{1, 2\}$ est $\mu_e = \sum_j \mu_j$. Pour que le processus correspondant soit un processus de renouvellement alterné modifié, lorsqu'on quitte l'état 3, on passe à l'état 1 avec probabilité α et à l'état 2 avec probabilité $\beta = 1 - \alpha$.

La matrice des taux de transition est donc :

$$A = \begin{pmatrix} -c_1 & c_1 & 0 \\ c_2 & -(c_2 + a_2) & a_2 \\ \alpha \mu_e & \beta \mu_e & -\mu_e \end{pmatrix}$$

Le paramètre α est déterminé de telle façon que les disponibilités asymptotiques du système réel et du système approché soient identiques.

d) Cas général

En essayant d'approcher de manière hiérarchique des systèmes série-parallèle de taille importante par des systèmes de taille réduite, nous n'avons pas à traiter uniquement des systèmes ayant soit un seul état de marche soit un seul état de panne. Pour des systèmes plus généraux, nous suivons les mêmes démarches que celles décrites précédemment. Nous approchons la fiabilité du système par $p_1 e^{-r_1 t} + p_2 e^{-r_2 t}$, la loi de la première durée de réparation par $p_3 r_3 e^{-r_3 t} + p_4 r_4 e^{-r_4 t}$.

Nous construisons alors un processus de Markov à quatre états : états 1 et 2 pour les pannes, états 3 et 4 pour les marches.

A partir des p_i et r_i $i = 1, 2$ (resp. $i = 3, 4$), nous calculons des coefficients a_i et c_i , $i = 1, 2$ (resp. $i = 3, 4$) comme expliqué dans le paragraphe III.2.a en prenant $e_1 = 1$ et $e_2 = 2$ (resp. $e_1 = 3$ et $e_2 = 4$). Nous souhaitons que le processus correspondant soit un processus de renouvellement alterné modifié, c'est pourquoi nous proposons de prendre comme matrice de taux de transition :

$$\begin{pmatrix} -(a_1 + c_1) & c_1 & a_1 & 0 \\ c_2 & -(a_2 + c_2) & a_2 & 0 \\ \alpha a_3 & \beta a_3 & -(a_3 + c_3) & c_3 \\ \alpha a_4 & \beta a_4 & c_4 & -(a_4 + c_4) \end{pmatrix}$$

avec $\beta = 1 - \alpha$, le paramètre α étant calculé de manière à ce que les disponibilités asymptotiques du système réel et du système approché coïncident.

Cette technique nous permet en particulier de calculer de manière approchée la fiabilité de deux systèmes simples indépendants placés en parallèle (cf problème évoqué à la fin du paragraphe I.2).

3. Exemple

Considérons 9 composants élémentaires numérotés de 1 à 9. Le système S_1 est formé des composants 1 à 4 placés en série, S_2 est formé des composants 5 à 7 placés en série et S_3 est formé des composants 8 et 9 placés en série. Enfin le système global S est formé des systèmes S_1 , S_2 , S_3 placés en parallèle; il correspond à un système markovien à $2^9 = 512$ états.

Nous approchons chacun des systèmes S_i par un système S'_i correspondant à un processus de Markov à 3 états. L'ensemble des systèmes S'_i donne donc un processus de Markov S_{a1} à $3^3 = 27$ états. Nous pouvons l'évaluer directement car il est encore de taille raisonnable. Mais si le système S possédait non pas 3 mais b branches en parallèle, le traitement d'un système markovien à 3^b états pourrait poser des problèmes. C'est pourquoi nous décrivons maintenant (avec $b = 3$) la démarche qu'il faudrait adopter dans ce cas.

Nous traitons d'abord les systèmes S'_1 et S'_2 placés en parallèle; nous obtenons un système à $3^2 = 9$ états, possédant 5 états de marche et 4 états de panne. Nous l'approchons par un processus de Markov S''_1 à 4 états. Puis nous

plaçons en parallèle les systèmes S_1'' et S_3' , ce qui donne un processus de Markov S_{a2} à $4 \times 3 = 12$ états (que nous réduirions s'il fallait poursuivre).

La comparaison des calculs de défiabilité et d'indisponibilité est donnée dans le tableau ci-dessous.

Nous notons \bar{R} (resp. \bar{D}) la défiabilité (resp. l'indisponibilité) du système S , \bar{R}_i (resp. \bar{D}_i) la défiabilité (resp. l'indisponibilité) du système S_{ai} ($i = 1, 2$) et E_i (resp. E_i^*) les erreurs relatives correspondantes :

$$E_i(t) = \frac{\bar{R}_i(t) - \bar{R}(t)}{\bar{R}(t)} \qquad E_i^*(t) = \frac{\bar{D}_i(t) - \bar{D}(t)}{\bar{D}(t)}$$

Temps en h	$\bar{R}(t)$	$\bar{R}_1(t)$	$\bar{R}_2(t)$	$E_1(t)$	$E_2(t)$
10	$4,085 \cdot 10^{-7}$	$4,066 \cdot 10^{-7}$	$4,614 \cdot 10^{-7}$	-0,5%	13%
100	$5,442 \cdot 10^{-5}$	$5,155 \cdot 10^{-5}$	$6,577 \cdot 10^{-5}$	-5%	21%
500	$6,639 \cdot 10^{-4}$	$6,44 \cdot 10^{-4}$	$6,907 \cdot 10^{-4}$	-3%	4%
1000	$1,535 \cdot 10^{-3}$	$1,507 \cdot 10^{-3}$	$1,524 \cdot 10^{-3}$	-2%	-1%
10000	$1,77 \cdot 10^{-2}$	$1,758 \cdot 10^{-2}$	$1,655 \cdot 10^{-2}$	-0,7%	-6%

Temps en h	$\bar{D}(t)$	$\bar{D}_1(t)$	$\bar{D}_2(t)$	$E_1^*(t)$	$E_2^*(t)$
10	$1,159 \cdot 10^{-7}$	$1,146 \cdot 10^{-7}$	$1,335 \cdot 10^{-7}$	-1%	-15%
100	$1,807 \cdot 10^{-6}$	$1,663 \cdot 10^{-6}$	$2,212 \cdot 10^{-6}$	-8%	22%
500	$4,33 \cdot 10^{-6}$	$4,288 \cdot 10^{-6}$	$4,607 \cdot 10^{-6}$	-1%	6%
1000	$4,881 \cdot 10^{-6}$	$4,853 \cdot 10^{-6}$	$5,063 \cdot 10^{-6}$	-0,6%	4%
10000	$5,216 \cdot 10^{-6}$	$5,185 \cdot 10^{-6}$	$5,187 \cdot 10^{-6}$	-0,6%	-0,5%

Le système S_{a1} donne d'excellents résultats : nous avons remplacé un système de 512 états par un système de 27 états en réalisant des erreurs minimales sur les calculs de défiabilité et d'indisponibilité.

Le système S_{a2} donne des résultats encore acceptables mais moins bons ; ceci est probablement dû à la difficulté que nous avons à approcher la fiabilité d'un système parallèle par une combinaison linéaire de deux exponentielles

Conclusion et perspectives

Nous n'avons présenté ici que quelques cas typiques ; les autres cas tests que nous avons étudiés sont tout aussi encourageants. Nous poursuivons nos recherches pour améliorer la qualité des approximations. Nous pensons que le principe de la méthode est intéressant et peut s'appliquer à de nombreux problèmes concrets.

Bibliographie

- [1] Cocozza-Thivent C., «Processus stochastiques appliqués à l'étude de la sûreté de fonctionnement des systèmes», Université de Technologie de Compiègne, cours de formation, mars 1991.
- [2] Cox D.R., «Théorie du renouvellement», Ed Dunod, Paris 1966.
- [3] Pagès A. et Gondran M., «Fiabilité des systèmes», Ed. Eyrolles, Paris 1980.
- [4] Vésely W.E., «Time Dependent Methodology for Fault Tree Evaluation», Nuclear Engineering and Design, 13, p. 337-360, 1970.
- [5] Villemeur A., «Sûreté de fonctionnement des systèmes industriels : fiabilité, facteurs humains, informatisation», Ed. Eyrolles. Paris 1988.