

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

G. ROUZET

D. ZANKEVITCH

**Règles de décision applicables au contrôle d'un lot
dont les individus possèdent plusieurs caractères
indépendants auxquels sont appliqués des plans
d'échantillonnage statistiques**

Revue de statistique appliquée, tome 37, n° 3 (1989), p. 19-38

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1989__37_3_19_0

© Société française de statistique, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**RÈGLES DE DÉCISION APPLICABLES AU CONTRÔLE
D'UN LOT DONT LES INDIVIDUS POSSÈDENT
PLUSIEURS CARACTÈRES INDÉPENDANTS
AUXQUELS SONT APPLIQUÉS DES PLANS
D'ÉCHANTILLONNAGE STATISTIQUES**

G. ROUZET

Ingénieur E.T.P

&

D. ZANKEVITCH

*Ingénieur de l'industrie et des mines au Ministère de l'industrie
et de l'aménagement du territoire*

Le contrôle statistique de lots relève de l'application de diverses méthodes qui sont l'objet de normes françaises ou internationales. Lorsque plusieurs caractères sont à prendre en considération sur les individus composant le lot, l'emploi d'un plan d'échantillonnage pour le contrôle de chaque caractère - dans le contrôle par mesurage, en particulier - a pour inconvénient que le risque du fournisseur s'exerce autant de fois qu'il y a de caractères : un lot satisfaisant à tous les niveaux de qualité acceptables a d'autant plus de chances d'être rejeté pour un ou plusieurs caractères que le nombre de ceux-ci est élevé.

Applicable dans les cas où les caractères sont statistiquement indépendants, une méthode permettant de prendre en compte le nombre de caractères, et conservant la protection du client dans l'efficacité du contrôle de chacun d'eux, est exposée ici. Elle donne lieu actuellement à l'élaboration d'une norme française.

Le contrôle de lots dont les individus possèdent plusieurs caractères indépendants soumis à des exigences de qualité se rencontre fréquemment, dans les contrôles de produits industriels notamment.

A ce jour, les méthodes statistiques, fort développées et en grande partie normalisées pour ce qui concerne le contrôle d'un caractère unique, ne couvrent la prise en considération de plusieurs caractères indépendants que dans le cas du contrôle par attributs, sous réserve encore que les non-conformités aux spécifications aient des conséquences pratiques comparables pour tous les caractères. On considère alors les individus non conformes quelle que soit la cause, ou quelles que soient les causes de non-conformité, et on définit un plan d'échantillonnage

unique correspondant aux exigences globales de qualité; ou encore, on considère le nombre de non-conformités par individu, et on définit un plan d'échantillonnage unique correspondant aux exigences formulées dans les mêmes termes.

Si les conséquences pratiques des non-conformités obligent à ranger les caractères dans deux catégories (non-conformités majeures, non-conformités mineures), on peut définir deux plans d'échantillonnage et les appliquer conjointement. En toute rigueur, l'augmentation du risque de rejet pour l'une ou l'autre des catégories, d'un lot acceptable dans chaque catégorie, conduit à appliquer la méthode présentée plus loin.

Si les conséquences pratiques des non-conformités sont diverses, il est d'usage courant d'attribuer des coefficients aux différentes catégories de non-conformités, pour définir un "démérite" dont l'interprétation est possible lorsque le lot appartient à une série de lots issus d'une production continue ou suffisamment répétitive. Mais cette méthode, quel que soit son intérêt pour le responsable de la qualité de la production, n'est pas à proprement parler une méthode statistique de contrôle de lot, les risques du fournisseur et du client ne pouvant être définis sur la base d'une loi de probabilité correspondant à la variation du démérite pour une qualité de lot donnée. Un contrôle statistique comparable au contrôle d'un caractère unique ne peut alors être effectué que sur la base du contrôle statistique de chacun des caractères.

Le contrôle par mesurage de tous les caractères, ou de certains d'entre eux, amène à la même situation.

On considère ci-après le contrôle d'un lot selon c caractères, chacun d'eux donnant lieu à la définition d'un plan d'échantillonnage en fonction des exigences de qualité qui lui sont propres; l'application de chaque plan conduit à la décision d'acceptation ou de rejet du lot pour le caractère auquel il se rapporte.

1. La méthode concerne l'ensemble des c décisions statistiques indépendantes

Il convient d'insister sur le fait que ni la qualité du lot, ni la décision d'acceptation ou de rejet, ne sont considérées ici de manière globale. En effet, la technique du "démérite" évoquée plus haut étant inutilisable comme base de la méthode, la notion de qualité globale ne peut se traduire par une grandeur définie quantitativement: la qualité n'est définie d'une manière précise qu'au niveau de chaque caractère. Conjointement, l'efficacité d'une méthode de décision globale, portant sur c caractères, ne pourrait être déterminée que dans un espace à $(c + 1)$ dimensions, et ne se prêterait donc pas à une interprétation aisée sur le plan pratique.

La méthode exposée ci-après concerne donc bien la définition des c plans d'échantillonnage qui seront appliqués aux c caractères, et l'interprétation de l'ensemble des c résultats indépendants.

L'ensemble des c décisions statistiques indépendantes définitives à l'issue de l'application de la méthode, sera une base pour la décision technico-commerciale: accepter le lot et l'utiliser directement ou après tri, retourner le lot au fournisseur,

retourner au fournisseur les seuls individus non conformes après tri vis-à-vis de l'ensemble des caractères pour lesquels il y a eu rejet, etc, tout comme dans le cas d'un caractère unique.

2. Choix de la qualité acceptable pour chaque caractère

La qualité acceptable constitue la qualité du risque fournisseurs QRF à laquelle sera associée une valeur donnée du risque du fournisseur.

Le choix de chaque valeur QRF doit tenir compte des considérations économiques propres au caractère auquel elle se rapporte, mais aussi de l'aptitude à l'emploi d'un lot dans lequel les niveaux de qualité de tous les caractères seraient égaux à leurs QRF respectifs. La notion de qualité acceptable implique en effet que soit considéré comme acceptable un lot dans lequel la qualité relative à chacun des caractères est acceptable.

3. Bases de la méthode

On se place dans la situation où la qualité du lot présenté au contrôle est égale, pour chacun des c caractères, à la valeur QRF correspondante, situation qui définit l'hypothèse H_0 considérée ci-après.

Dans la définition des c plans d'échantillonnage, une même valeur est donnée au risque du fournisseur α .

La probabilité que les c décisions résultant de l'application des plans d'échantillonnage comprennent r décisions de rejet est donnée par la loi binomiale de paramètres c et α . On peut donc définir un domaine des valeurs de r correspondant à une probabilité élevée, telle que $Pr(r \leq L) \approx 0,95$, et un domaine complémentaire dans lequel la probabilité est suffisamment petite ($\approx 0,05$) pour qu'un résultat r lui appartenant soit à considérer comme non compatible avec l'hypothèse H_0 .

Dans ce dernier cas, il n'y a donc pas lieu d'aller plus loin dans l'investigation statistique : les c décisions statistiques sont définitives.

Si $r \leq L$, on est fondé à admettre que les r décisions de rejet sont compatibles avec l'hypothèse H_0 , c'est-à-dire qu'elles peuvent être des réalisations du risque α de rejeter à tort un lot acceptable, risque admis pour chacun des caractères en cause.

Il paraît logique, dans ce cas, de requérir à un complément d'information pour réviser chaque décision de rejet. Un échantillonnage complémentaire est effectué, et le plan d'échantillonnage résultant du même point du risque fournisseur (même QRF et même α que précédemment) et de l'effectif de l'échantillon total ainsi constitué (échantillonnage initial + échantillonnage complémentaire) est appliqué, pour chacun des r caractères. Les résultats obtenus dans cet échantillon total conduisent à la décision statistique révisée d'acceptation ou de rejet, pour chacun des r caractères.

L'échantillonnage complémentaire doit être tel que, pour chacun des caractères, la probabilité d'accepter le lot pour ce caractère, que ce soit à l'issue de l'application du plan d'échantillonnage initial ou, s'il y a rejet, au niveau de la décision révisée, ne modifie pas sensiblement le risque du client.

Quantitativement, cette méthode peut être établie sur une valeur de α égale à 5 %, valeur habituellement utilisée, pour chaque plan d'échantillonnage. Le critère L peut être défini par le fractile d'ordre 0,95 de la loi binomiale de r pour c donné, ou plus exactement par la valeur de r pour laquelle la probabilité cumulée est la plus voisine de 0,95. Pour que l'approximation soit suffisamment bonne vis-à-vis de cette valeur théorique de 0,95, on exigera en outre que la probabilité cumulée soit comprise entre 0,90 et 0,99.

Le tableau 1 présente la probabilité cumulée de la loi binomiale de r pour les vingt premières valeurs de c , au voisinage du fractile d'ordre 0,95. On observe que L ne peut être défini pour $c < 4$. En effet :

- pour $c = 2$, $L = 0$ ne convient pas puisque le principe de la méthode n'a de sens que si L est au moins égal à 1,
- pour $c = 3$, aucune valeur de r ne satisfait aux conditions énoncées.

La méthode devra donc être basée sur un autre principe pour les premières valeurs de c . En fait, on verra plus loin que le présent principe est proposé pour $c \geq 5$.

L est alors défini par les valeurs de r pour lesquelles la probabilité cumulée est soulignée dans le tableau 1, tableau qui peut être prolongé à des valeurs de c aussi grandes qu'on le désire.

Quantitativement toujours, on peut proposer pour des raisons pratiques que l'effectif de l'échantillonnage complémentaire soit semblable à celui de l'échantillonnage initial; la règle est d'application aisée si l'on a choisi initialement un plan simple; il en est très généralement ainsi en contrôle par mesurage.

Comme il est dit plus haut, ceci implique que le risque du client ne soit pas sensiblement modifié.

Une première assurance en est donnée par le raisonnement suivant : si l'échantillon d'effectif double était indépendant du premier, sa courbe d'efficacité propre décroîtrait plus rapidement que la première au-delà du point du risque fournisseur, et, pour la qualité du risque du client QRC , la probabilité d'accepter serait très petite par rapport au risque β initialement choisi; l'emploi conditionnel de ce second échantillon conduirait donc à une augmentation de la probabilité d'acceptation, notable au voisinage de QRF , progressivement décroissante, et peu importante au voisinage de QRC . En fait, selon la méthode, l'échantillon d'effectif double inclut le premier; il s'ensuit que la probabilité d'acceptation se trouve diminuée par rapport à celle correspondant aux conditions précédemment supposées, de sorte que le risque du client est a fortiori peu augmenté par rapport à celui du plan initial.

Numériquement, il est aisé, dans le cas du contrôle par attributs, d'étudier quelques exemples; ainsi, pour des données ($QRF = 0,7\%$; $\alpha = 5\%$) et ($QRC = 7,5\%$; $\beta = 10\%$) et en supposant la loi binomiale applicable, le

plan simple initial a pour caractéristiques ($n = 50; A = 1$), et, s'il y a lieu, l'échantillonnage complémentaire d'effectif 50 permet d'appliquer le plan simple ($n = 100; A = 2$); la probabilité d'acceptation, qui est initialement de 0,9519 pour la qualité *QRF*, devient 0,9821, et, qui est initialement de 0,1025 pour la qualité *QRC*, devient 0,1058.

Dans le cas du contrôle par mesurage d'un caractère distribué selon une loi normale, il est difficile, au contraire, d'obtenir par calcul des illustrations semblables. Mais des estimations peuvent être obtenues par simulation. Les travaux de M. D. ZANKEVITCH, présentés ci-après en annexe, conduisent sur plusieurs exemples à des résultats analogues.

La méthode, qui augmente la sélectivité du contrôle de chaque caractère, conserve donc bien le risque du client.

Elle est, à ce stade, complètement définie, sauf pour les petites valeurs de c .

4. Bases complémentaires

Toujours dans l'hypothèse H_0 où la qualité du lot présenté au contrôle est égale, pour chacun des c caractères, à la valeur *QRF* correspondante, la probabilité que chacune des décisions statistiques soit l'acceptation a pour valeur $(1 - \alpha)^c$.

Le risque que l'application des plans d'échantillonnage conduise, au moins, à une décision de rejet pour l'un des caractères, a donc pour valeur $1 - (1 - \alpha)^c$. Ce risque croît rapidement avec c : il est, par exemple, de 23 % pour $\alpha = 5\%$ et $c = 5$. Pour le ramener à une valeur convenable, aussi voisine que possible de 5 % et ne dépassant pas 10 %, on peut diminuer α . Mais le choix du point du risque fournisseur exige, en pratique, que α ne soit pas exagérément petit.

Si l'on veut que α ne soit pas inférieur à 2 %, les seules solutions possibles sont celles indiquées dans le tableau 2.

Pour $c = 2$ et $c = 3$, la méthode peut donc prendre pour base ce principe.

Pour $c = 4$ et $c = 5$, le principe vient en concurrence avec celui énoncé plus haut. Il semble raisonnable d'adopter la présente base complémentaire pour $c \leq 4$ (le principe retenu se trouve être alors celui qui donne la valeur de probabilité la plus proche de la valeur théorique correspondante).

La méthode s'énonce donc comme il est dit ci-dessous.

5. Enoncé de la méthode

La méthode exposée ici consiste en des règles complémentaires à respecter, dans la définition des plans d'échantillonnage à appliquer aux c caractères, et dans l'interprétation des résultats.

Si $c \leq 4$, la valeur du risque du fournisseur α doit être prise égale à celle indiquée dans le tableau ci-dessous :

c	α
2	3%
3	2%
4	2%

Chaque plan conduit à la décision d'acceptation ou de rejet du lot pour le caractère correspondant.

Si $c \geq 5$, la valeur du risque du fournisseur α doit être prise égale à 5 % .

Chaque plan conduit à une décision d'acceptation ou de rejet. Soit r le nombre de décisions de rejet.

- Si $r = 0$: le lot est accepté pour chacun des caractères ;
- Si $0 < r \leq L$: l'échantillonnage est complété par un prélèvement de même effectif que le prélèvement initial, de manière à constituer un échantillon d'effectif double; pour chacun des r caractères en cause, le plan d'échantillonnage résultant du même point du risque fournisseur que précédemment (même $QRF, \alpha = 5\%$) et de ce nouvel effectif d'échantillon, est appliqué; il conduit à la décision révisée d'acceptation ou de rejet du lot pour le caractère correspondant;
- Si $r > L$: le lot est rejeté pour chacun des r caractères en cause.

c	L
5 à 10	1
11 à 20	2
21 à 32	3
33 à 45	4

Remarque :

Eventuellement, si le plan d'échantillonnage initial est issu des tables des normes NF X 06-023 ou NF X 06-022, on peut, lorsque $0 < r \leq L$, effectuer un complément d'échantillonnage tel que le nouveau plan soit celui qui résulte du même NQA et d'une double incrémentation de la lettre-code du plan initial.

Cette modification de la définition du nouveau plan d'échantillonnage, dont le seul objet est de simplifier l'application pratique de la méthode, est évidemment susceptible d'entraîner des écarts d'efficacité supérieurs à ceux indiqués plus haut.

6. Exemples

Exemple 1

Une fabrication spéciale de 600 appareils électroniques est considérée comme un lot isolé. On désire faire un contrôle de réception par échantillonnage.

Ce contrôle doit porter sur 6 grandeurs, qui sont statistiquement indépendantes du fait de réglages distincts effectués en fabrication.

L'une des grandeurs (G_1) doit respecter une limite supérieure. La qualité acceptable est une proportion d'appareils non conformes égale à 1 %. Les cinq autres (G_2 à G_6) doivent respecter un intervalle de tolérance. Pour chacune d'elles, la qualité acceptable est 0,5 % d'appareils non conformes.

On envisage un contrôle par mesurage de chaque grandeur au moyen d'un échantillon d'effectif $n = 25$, sous réserve d'une efficacité suffisante.

Comme c est supérieur à 5, le risque du fournisseur doit être de 5 %. L'application de la norme NF X 06-027 à chaque caractère est particulièrement aisée, puisque les caractéristiques du plan peuvent être lues directement dans les tables de valeurs numériques.

La table 5 de NF X 06-027 donne les valeurs de la qualité du risque client QRC , soit 8,6 % d'appareils non conformes pour G_1 et 6,1 % d'appareils non conformes pour G_2 à G_6 . Cette efficacité est jugée satisfaisante.

La même table donne le coefficient K définissant :

- pour G_1 ($K = 1,80$) le critère d'acceptation $\bar{x} \leq T_s - Ks$
- pour G_2 à G_6 ($K = 2,01$) les deux côtés des trapèzes délimitant les régions d'acceptation.

Pour G_2 à G_6 le coefficient f_s définissant les hauteurs des trapèzes, c'est-à-dire $s_{\max} = f_s (T_s - T_i)$, est lu dans la table 7 ($f_s = 0,220$).

On prélève donc 25 appareils au hasard dans le lot et on effectue sur chacun d'eux le mesurage des 6 grandeurs.

Les valeurs de la moyenne \bar{x} et de l'estimation s de l'écart-type du lot sont calculées pour chaque grandeur.

Sans entrer dans le détail de l'application de la norme X 06-027 à chacun des caractères, on suppose que les constatations sont les suivantes :

$$G_1 \quad \bar{x} < T_s - Ks$$

$$G_2 \quad \text{point } (s, \bar{x}) \text{ dans la région d'acceptation}$$

$$G_3 \quad \text{point } (s, \bar{x}) \text{ dans la région de rejet}$$

$$G_4 \text{ à } G_6 \quad \text{point } (s, \bar{x}) \text{ dans la région d'acceptation.}$$

Le lot est donc accepté pour les grandeurs G_1 et G_2 ainsi que G_4 à G_6 .

Conformément à la méthode (ici $c = 6$ et $r = 1$), un échantillonnage

complémentaire doit être effectué pour $G3$.

Le nouveau plan d'échantillonnage est défini par $QRF = 0,5\%$ avec $\alpha = 5\%$ et $n = 50$, d'où, selon les tables 5 et 7 de NF X 06-027, $K = 2,16$ et $f_s = 0,208$.

Le prélèvement complémentaire de 25 appareils est effectué, au hasard, et la seule grandeur $G3$ est mesurée.

Les valeurs de \bar{x} et de s de l'échantillon d'effectif $n = 50$ ainsi obtenu sont calculées. Le point de coordonnées (s, \bar{x}) se place encore dans la région de rejet.

Le lot est donc rejeté pour la grandeur $G3$.

Exemple 2

Un lot de 1000 pièces mécaniques est présenté à un contrôle de réception par échantillonnage. Trois dimensions sont à prendre en considération. Chacune d'elles doit respecter un intervalle de tolérance. Le contrôle doit être fait au moyen de calibres, donc par attributs. Les trois dimensions sont statistiquement indépendantes.

L'incidence pratique du non-respect de l'intervalle de tolérance étant très différente, il convient de ne pas rassembler dans un même comptage, des individus non conformes ou des non-conformités, les résultats relatifs aux trois dimensions.

La qualité du risque fournisseur QRF est fixée à 0,4 % de pièces non conformes, pour chacune des dimensions.

La table des valeurs de α pour $c \leq 4$ indique que le risque du fournisseur doit être pris égal à 2 % .

La courbe d'efficacité du contrôle de chaque caractère doit donc passer par le point du risque fournisseur d'abscisse 0,4 % et d'ordonnée 98 % .

La qualité du risque client QRC est fixée à 8 % de pièces non conformes, avec un risque du client de 10 % .

Le plan d'échantillonnage correspondant à ces données est déterminé en utilisant la norme NF X 06-026 ou éventuellement NF X 06-022. Pour illustrer ce dernier cas, on supposera que la recherche est faite dans la table 10 de cette norme, où l'on obtient le plan simple $n = 50$ et $A = 1$.

On prélève donc 50 pièces au hasard dans le lot et on détermine pour chaque dimension le nombre de pièces non conformes dans l'échantillon. On obtient les résultats suivants :

- première dimension : 0 d'où acceptation
- deuxième dimension : 1 d'où acceptation
- troisième dimension : 0 d'où acceptation

Le lot est donc accepté pour chacune des trois dimensions.

TABLEAU 1
 Probabilité cumulée de la loi binomiale de r
 de paramètres c et $\alpha = 0,05$

r c	0	1	2	3
2	<u>0,9025</u>	1,0000		
3	0,8574	0,9928		
4	0,8145	<u>0,9860</u>	0,9995	
5	0,7738	<u>0,9774</u>	0,9988	
6	0,7351	<u>0,9672</u>	0,9978	
7	0,6983	<u>0,9556</u>	0,9962	
8	0,6634	<u>0,9428</u>	0,9942	
9	0,6302	<u>0,9288</u>	0,9916	
10	0,5987	<u>0,9139</u>	0,9885	
11		0,8981	<u>0,9848</u>	0,9984
12		0,8816	<u>0,9804</u>	0,9978
13		0,8646	<u>0,9755</u>	0,9969
14		0,8470	<u>0,9699</u>	0,9958
15		0,8290	<u>0,9638</u>	0,9945
16		0,8108	<u>0,9571</u>	0,9930
17		0,7922	<u>0,9497</u>	0,9912
18		0,7735	<u>0,9419</u>	0,9891
19		0,7547	<u>0,9335</u>	0,9868
20		0,7358	<u>0,9245</u>	0,9841

TABLEAU 2

c	α	$1 - (1 - \alpha)^c$
2	3%	5,91%
3	2%	5,88%
4	2%	7,76%
5	2%	9,61%

Annexe

Résultats de simulations

Les graphiques présentés dans les pages suivantes rendent compte des résultats de simulations effectuées sur 1000 échantillons d'effectifs 5 - 10 - 20 - 50 - 125 afin d'obtenir les illustrations mentionnées dans le paragraphe 3 "bases de la méthode", dans le cas du contrôle par mesurage d'un caractère distribué selon une loi normale.

Les plans d'échantillonnage sont tirés de la norme AFNOR NF X 06-027 (contrôle par mesurage de la proportion d'individus non conformes) avec un écart-type connu et une seule limite de spécification.



















