REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. L. GOUPY

Erreur de dérive et choix de l'ordre des essais d'un plan d'expériences factoriel

Revue de statistique appliquée, tome 37, n° 1 (1989), p. 5-21

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1989__37_1_5_0>

Rev. Statistique Appliquée, 1989, **XXXVII** (1), 5-22

ERREUR DE DÉRIVE ET CHOIX DE L'ORDRE DES ESSAIS D'UN PLAN D'EXPÉRIENCES FACTORIEL

J.L. GOUPY

CRD TOTAL FRANCE 24, rue Erlanger 75016 PARIS

RÉSUMÉ

Le choix de l'ordre des essais n'est pas indifférent sur les résultats d'un plan d'expériences factoriel. Il faut tenir compte de certaines erreurs systématiques (variation de la moyenne des réponses par bloc, variation régulière de la moyenne des réponses) avant de randomiser. Le blocking et la randomisation sont des techniques bien connues de choix de l'ordre des essais.

L'objet du présent article est de traiter le cas de la dérive, c'est-à-dire d'une variation monotone de la moyenne des réponses au cours de l'expérimentation. On indique comment choisir l'ordre des essais pour éliminer (ou simplement diminuer selon les cas) l'influence de la dérive sur les effets principaux des facteurs étudiés par plans factoriels. L'exemple du plan 2^3 a été retenu pour sa simplicité et sa fréquente utilisation.

***Mots-clés** : plans factoriels, ordre des essais, dérive.*

SUMMARY

The order in which the tests are executed is of great importance on factorial design results. Systematic errors have to be considered before randomisation and blocking is a classic illustration of this attitude. This article tackles the "derive" case. "Derive" (or "drift") is a monotone variation of the mean of the results obtained during the factorial experiment. This "drift" could be due, for exemple, to the diminishing activity of a catalyser or to the progressive clogging of a pipe or to the simple fact of a tool being worn out, and so on. The 2^3 factorial design was chosen for its frequent occurence and we show how the systematic error of "derive" can be eliminated from main effects with a cautious choice of the test order.

***Keywords** : factorial design, order of the tests, derive.*

Introduction

Les expérimentateurs utilisent de plus en plus la méthode des plans d'expériences pour conduire leur recherche. Cette méthode est basée sur l'emploi des plans factoriels c'est-à-dire sur des séries de 4, 8, 16 ou 2^k essais faisant intervenir tous les facteurs étudiés à chaque expérience. L'ordre des essais n'est pas indifférent sur les résultats de l'expérimentation et, depuis bien longtemps, les statisticiens ont conseillé de randomiser les essais. Randomiser, c'est choisir l'ordre des essais au hasard. Bien que cette pratique soit recommandable, puisqu'elle permet d'appliquer les tests statistiques dans de bonnes conditions de validité, il est des cas où elle est dangereuse et où il est préférable de choisir un ordre particulier des essais pour exécuter un plan d'expériences. En effet, il faut distinguer deux types d'erreur : l'erreur aléatoire et l'erreur systématique. Ces deux types d'erreur interviennent constamment mais ne doivent pas être traités de la même manière. Dans la pratique, l'expérimentateur devra choisir l'ordre d'exécution des essais en fonction de ces deux types d'erreur. Certaines parties de l'expérimentation seront ordonnées pour tenir compte des erreurs systématiques; d'autres seront randomisées en vue d'obtenir une évaluation fiable de l'erreur aléatoire. Le blocking, technique bien connue, est déjà utilisé pour se prémunir d'un certain type d'erreur systématique : les essais sont d'abord groupés dans le but d'éliminer l'erreur systématique entre blocs, puis, ils sont randomisés dans chaque bloc pour obtenir une bonne évaluation de l'erreur aléatoire.

Le cas abordé dans cet article devrait être d'utilisation plus fréquente que le blocking mais, il est beaucoup moins connu des expérimentateurs. C'est celui de la dérive. Nous verrons que l'ordre des essais doit être, là aussi, choisi avec soin lorsqu'une dérive est susceptible de se produire. La qualité de l'expérimentation en dépend.

Définition de la dérive

L'interprétation des résultats d'un plan factoriel peut être faussée si un phénomène de dérive se produit pendant l'expérimentation. On appellera dérive une variation régulière de la moyenne due à un facteur non contrôlé. C'est, par exemple, une vitesse de rotation qui diminue régulièrement parce que les frottements augmentent (diminution de la lubrification ou échauffement progressif diminuant des jeux mécaniques) au fur et à mesure des essais. Cette cause d'erreur, dans le calcul des effets des facteurs ne peut pas être éliminée par randomisation. La randomisation ne fera que masquer le phénomène en augmentant la valeur de l'erreur expérimentale. Il faut, au contraire, choisir un ordre des essais bien particulier pour que les effets des facteurs principaux ne soient pas entachées de cette erreur systématique. Le modèle mathématique associé aux plans factoriels peut être écrit sous la forme :

$$y_i = \mu + \sum_{j=1}^{j=k} E_j x_{ij} + K_i$$

où :

- k est le nombre de facteurs étudiés
- y_i est la réponse de l'essai i
- μ est la moyenne des réponses de tous les essais du plan factoriel
- E_j est l'effet du facteur j
- x_{ij} est la modalité du facteur j pour l'essai i.

  x_{ij} est mesuré en unités centrées réduites et prend uniquement les valeurs + 1 et −1.
- K_i est l'influence de toutes les interactions sur la réponse de l'essai i

L'objectif que nous nous fixons est d'évaluer sans biais les effets E_j des k facteurs étudiés malgré une variation régulière de μ.

Il y a dérive lorsque la loi mathématique liant la variation de la moyenne des réponses à la succession des essais est monotone, soit croissante, soit décroissante. Dans le cas général, il y a dérive quelconque mais, si nous choisissons, dans un but de simplification, une loi linéaire, la variation de la moyenne sera la même entre deux essais consécutifs.

Influence d'une dérive linéaire sur les effets principaux

Si la réponse du premier essai est y_1 quand il n'y a pas de dérive, elle devient y'_1 quand il y a dérive.

La variation introduite par la dérive entre deux essais est l'incrément de la dérive et sera noté h.

$$y'_1 = y_1 + h$$

De même si la réponse du deuxième essai est y_2 quand il n'y a pas de dérive, elle devient y'_2 avec dérive :

$$y'_2 = y_2 + 2h$$

Si l'on prend le cas d'un plan 2^3, les huit réponses seront affectées par la dérive linéaire comme l'indique le tableau n° 1.

TABLEAU 1
Influence d'une dérive linéaire sur les réponses d'un plan 2^3

Numéro de l'essai	Réponse sans dérive	Réponses avec dérive
1	y_1	$y'_1 = y_1 + h$
2	y_2	$y'_2 = y_2 + 2h$
3	y_3	$y'_3 = y_3 + 3h$
4	y_4	$y'_4 = y_4 + 4h$
5	y_5	$y'_5 = y_5 + 5h$
6	y_6	$y'_6 = y_6 + 6h$
7	y_7	$y'_7 = y_7 + 7h$
8	y_8	$y'_8 = y_8 + 8h$

Connaissant les réponses de chaque essai, il est facile, avec la matrice des effets, de calculer l'incidence de la dérive sur les effets principaux et sur les interactions. Les numéros des essais sont ceux de l'ordre classique et les chiffres entre parenthèses indiquent l'ordre d'exécution de chaque essai. Dans le tableau n° 2, ces deux chiffres sont les mêmes. Pour faire apparaître uniquement l'influence de la dérive sur les effets nous avons supposé que toutes les réponses étaient nulles. Seul l'incrément de la dérive est pris en compte pour faire le calcul.

TABLEAU 2
Influence de la dérive sur les effets d'un plan 2^3 (Ordre classique)

N° Essai	1	2	3	12	13	23	123	I	Réponses
1 (1)	−	−	−	+	+	+	−	+	1 h
2 (2)	+	−	−	−	−	+	+	+	2 h
3 (3)	−	+	−	−	+	−	+	+	3 h
4 (4)	+	+	−	+	−	−	−	+	4 H
5 (5)	−	−	+	+	−	−	+	+	5 h
6 (6)	+	−	+	−	+	−	−	+	6 h
7 (7)	−	+	+	−	−	+	−	+	7 h
8 (8)	+	+	+	+	+	+	+	+	8 h
Influence globale de la dérive	4h	8h	16h	0	0	0	0	36h	
Influence de la dérive sur l'effet	0,5h	h	2h	0	0	0	0	4,5h	

On constate :

– Que les effets principaux sont faussés par la dérive.

– Que la moyenne est entachée d'une forte erreur systématique.

– Que les interactions ne sont pas affectées de l'erreur due à la dérive.

Or, ce qui intéresse un expérimentateur, ce sont les effets principaux. Il faudrait transférer l'erreur systématique de la dérive sur les interactions et obtenir des effets principaux sans erreur. Cela est possible si l'on remarque que c'est l'ordre des signes plus et des signes moins de chaque colonne qui provoque ou non l'apparition de l'erreur due à la dérive. Il suffit donc de prendre la colonne de signes d'une interaction pour étudier un facteur principal. Ce qui est aisé si l'on change l'ordre des essais.

Transfert de l'erreur de la dérive sur les interactions

Utilisons les notations de BOX [4] et prenons un exemple : écrivons que les colonnes des interactions 123, 13 et 12 sont respectivement utilisées pour étudier les trois facteurs principaux que nous noterons $1'$, $2'$ et $3'$.

$$1' = 123$$
$$2' = 13$$
$$3' = 12$$

La matrice d'expériences se présente alors selon le tableau n° 3. Tableau dans lequel nous retrouvons les essais d'un plan 2^3 dans un ordre différent de l'ordre habituel (il est rappelé que l'ordre d'exécution des essais est indiqué par les chiffres entre parenthèses).

TABLEAU 3
Matrice d'expériences d'un plan dont les effets des facteurs principaux ne sont pas faussés par la dérive

Numéro de l'essai	1' = 123	2' = 13	3' = 12
7 (1)	−	+	+
2 (2)	+	−	−
4 (3)	+	+	−
5 (4)	−	−	+
6 (5)	+	−	+
3 (6)	−	+	−
1 (7)	−	−	−
8 (8)	+	+	+

Nous conservons les mêmes numéros pour repérer les essais, c'est-à-dire que l'essai n° 1 sera toujours celui pour lequel les trois facteurs sont aux niveaux bas, l'essai n° 2 celui pour lequel le facteur 1 est au niveau haut, les facteurs 2 et 3 aux niveaux bas, etc.... L'essai n° 8 celui pour lequel les trois facteurs sont aux niveaux hauts. On indique alors facilement l'ordre d'exécution des essais par une série de huit chiffres. Dans notre exemple nous aurons 7 2 4 5 6 3 1 8.

La série 7 2 4 5 6 3 1 8 doit permettre d'obtenir les effets principaux exempts de l'erreur de dérive. Nous le vérifions en utilisant la matrice des effets : tableau n° 4. Cette fois ce sont les interactions $1'2'$, $1'3'$, $1'2'3'$ et la moyenne qui sont entachées de l'erreur de dérive. Les effets principaux étant, eux, les mêmes que s'il n'y avait pas eu de dérive au cours de l'expérimentation.

Il est donc possible de transférer l'erreur due à la dérive sur les interactions à condition de choisir convenablement l'ordre des essais. L'ordre que nous avons adopté pour cet exemple n'est pas le seul possible et l'on peut trouver d'autres séries de huit essais qui permettent d'obtenir le même résultat.

Nombre de séries d'essais permettant d'obtenir des effets principaux exempts de l'erreur de dérive (Cas d'un plan 2^3)

Nous avons vu que les quatre colonnes de signes des interactions 12, 13, 23 et 123 (tableau n° 2) permettent d'obtenir des effets exempts de l'erreur de dérive. Ce ne sont pas les seules colonnes. Il y a également les colonnes de signes opposés c'est-à-dire les

TABLEAU 4
Influence de la dérive sur les effets d'un plan 2^3
(Ordre spécial)

Numéro de l'essai	1'	2'	3'	1'2'	1'3'	2'3'	1'2'3'	I	
7 (1)	−	+	+	−	−	+	−	+	1 h
2 (2)	+	−	−	−	−	+	+	+	2 h
4 (3)	+	+	−	+	−	−	−	+	3 h
5 (4)	−	−	+	+	−	−	+	+	4 h
6 (5)	+	−	+	−	+	−	−	+	5 h
3 (6)	−	+	−	−	+	−	+	+	6 h
1 (7)	−	−	−	+	+	+	−	+	7 h
8 (8)	+	+	+	+	+	+	+	+	8 h

Influence globale de la dérive	0	0	0	8h	16h	0	4h	36h
Influence de la dérive sur l'effet	0	0	0	h	2h	0	0,5h	4,5h

colonnes que l'on peut appeller −12,−13,−23,−123. Nous indiquons dans le tableau n° 5 les huit colonnes de huit signes (quatre signes plus et quatre signes moins) qui éliminent l'erreur de dérive.

TABLEAU 5
Les huit colonnes de signes éliminant l'influence de la dérive

12	−12	13	−13	23	−23	123	−123
+	−	+	−	+	−	−	+
−	+	−	+	+	−	+	−
−	+	+	−	−	+	+	−
+	−	−	+	−	+	−	+
+	−	−	+	−	+	+	−
−	+	+	−	−	+	−	+
−	+	−	+	+	−	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−

Il suffit de prendre trois colonnes distinctes pour étudier les trois facteurs principaux. Mais il faut remarquer, avant d'entreprendre les calculs, que certaines colonnes ne sont pas indépendantes.

Par exemple, on ne peut pas prendre 12, 13 et 23, car :

$$\mathbf{12.13 = 23}$$

Si l'on prend 3 colonnes indépendantes, on peut établir six séries différentes en permutant les colonnes. Prenons par exemple 12, 23 et 123, le tableau N° 6 donne les dix séries :

4	7	5	2	6	1	3	8
6	7	3	2	4	1	5	8
4	6	5	3	7	1	2	8
6	4	3	5	7	1	2	8
7	6	2	3	4	1	5	8
7	4	2	5	6	1	3	8

qui chacune permettra d'obtenir des effets principaux sans erreur de dérive. Combien y-a-t-il de groupes de trois colonnes indépendantes ? Pour le savoir, reportons nous au tableau n° 5, il y a huit colonnes de signes parmi lesquelles il est possible de trouver 24 groupes de trois colonnes indépendantes. Ces 24 groupes sont les suivants :

12,	13,	123	12,	23	123	13,	23,	123
−12,	13,	123	−12,	23	123	−13,	23,	123
12,	−13,	123	12,	−23	123	13,	−23,	123
12,	13,	−123	12,	23	−123	13,	23,	−123
−12,	−13,	123	−12,	−23	123	−13,	−23,	123
−12,	13,	−123	−12,	23	−123	−13,	23,	−123
12,	−13,	−123	12,	−23	−123	13,	−23,	−123
−12,	−13,	−123	−12,	−23	−123	−13,	−23,	−123

TABLEAU 6
Calcul des séries conduisant à l'élimination
de la dérive sur les effets principaux

12	23	123	N°	12	123	23	N°	23	12	123	N°
+	+	−	4	+	−	+	6	+	+	−	4
−	+	+	7	−	+	+	7	+	−	+	6
−	−	+	5	−	+	−	3	−	−	+	5
+	−	−	2	+	−	−	2	−	+	−	3
+	−	+	6	+	+	−	4	−	+	+	7
−	−	−	1	−	−	−	1	−	−	−	1
−	+	−	3	−	−	+	5	+	−	−	2
+	+	+	8	+	+	+	8	+	+	+	8

23	123	12	N°	123	12	23	N°	123	23	12	N°
+	−	+	6	−	+	+	7	−	+	+	7
+	+	−	4	+	−	+	6	+	+	−	4
−	+	−	3	+	−	−	2	+	−	−	2
−	−	+	5	−	+	−	3	−	−	+	5
−	+	+	7	+	+	−	4	+	−	+	6
−	−	−	1	−	−	−	1	−	−	−	1
+	−	−	2	−	−	+	5	−	+	−	3
+	+	+	8	+	+	+	8	+	+	+	8

Comme chacun de ces 24 groupes permet de trouver six séries ordonnées de huit essais, on pourra établir 24 × 6 = 144 ordres différents conduisant à des effets principaux non entachés de l'erreur de dérive. La liste des 144 séries figure dans le tableau n° 7. Nous avons complété ce tableau en ajoutant l'incidence de la dérive sur les interactions. En plus de l'obtention des effets principaux sans erreur de dérive ces séries d'essais peuvent avoir plusieurs autres applications :

– Détention d'une dérive,

– Randomisation quand il y a dérive,

– Construction d'un plan 2^{4-1}, en présence d'une dérive,

– Blocking, dérive et randomisation dans un plan 2^3,

– Plan 2^4 et séries-miroirs.

Détection d'une dérive

Si l'expérimentateur redoute une dérive pouvant provenir d'une usure progressive ou d'un bouchage ou de toutes autres causes comme par exemple la baisse d'activité d'un catalyseur, il peut la détecter par l'emploi de l'une de ces séries. En effet, les interactions faussées par la dérive sont, en valeurs absolues, comme les nombres 1, 2 et 4.

Si dans le tableau n° 7 l'expérimentateur choisit la série 27 36 81 54 (n° 28) les trois interactions 123, 23 et 12 sont dans des rapports (en valeurs absolues) :

de 1 à 2	pour 123 et 23
de 1 à 2	pour 23 et 12
de 1 à 4	pour 123 et 12
de 1 à 2 à 4	pour 123, 23 et 12

Ces rapports seront d'autant plus proches des valeurs théoriques que l'erreur expérimentale sera plus faible devant l'erreur de dérive. Dans les cas délicats, des calculs d'erreur pourront compléter l'interprétation des résultats. Cet aspect du problème n'est pas l'objet du présent article et nous ne l'examinerons pas.

TABLEAU 7
Séries d'essais laissant les facteurs principaux
insensibles à une dérive linéaire

Numéro de la série	Ordre des huit essais de chaque série	Influence de la dérive linéaire sur les						
		Facteurs principaux			Interactions			
		1	2	3	12	13	23	123
1	1 4 6 7 8 5 3 2	0	0	0	-1	-0,5	0	2
2	1 4 7 6 8 5 2 3	0	0	0	-1	0	-0,5	2
3	1 4 8 5 6 7 3 2	0	0	0	-2	-0,5	0	1
4	1 4 8 5 7 6 2 3	0	0	0	-2	0	-0,5	1
5	1 6 4 7 8 3 5 2	0	0	0	-0,5	-1	0	2
6	1 6 7 4 8 3 2 5	0	0	0	0	-1	-0,5	2
7	1 6 8 3 4 7 5 2	0	0	0	-0,5	-2	0	1
8	1 6 8 3 7 4 2 5	0	0	0	0	-2	-0,5	1
9	1 7 4 6 8 2 5 3	0	0	0	-0,5	0	-1	2
10	1 7 6 4 8 2 3 5	0	0	0	0	-0,5	-1	2
11	1 7 8 2 4 6 5 3	0	0	0	-0,5	0	-2	1
12	1 7 8 2 6 4 3 5	0	0	0	0	-0,5	-2	1
13	1 8 4 5 6 3 7 2	0	0	0	-2	-1	0	0,5
14	1 8 4 5 7 2 6 3	0	0	0	-2	0	-1	0,5
15	1 8 6 3 4 5 7 2	0	0	0	-1	-2	0	0,5
16	1 8 6 3 7 2 4 5	0	0	0	0	-2	-1	0,5
17	1 8 7 2 4 5 6 3	0	0	0	-1	0	-2	0,5
18	1 8 7 2 6 3 4 5	0	0	0	0	-1	-2	0,5
19	2 3 5 8 7 6 4 1	0	0	0	1	0,5	0	-2
20	2 3 7 6 5 8 4 1	0	0	0	2	0,5	0	-1
21	2 3 7 6 8 5 1 4	0	0	0	2	0	-0,5	-1
22	2 3 8 5 7 6 1 4	0	0	0	1	0	-0,5	-2
23	2 5 3 8 7 4 6 1	0	0	0	0,5	1	0	-2
24	2 5 7 4 3 8 6 1	0	0	0	0,5	2	0	-1
25	2 5 7 4 8 3 1 6	0	0	0	0	2	-0,5	-1
26	2 5 8 3 7 4 1 6	0	0	0	0	1	-0,5	-2
27	2 7 3 6 5 4 8 1	0	0	0	2	1	0	-0,5
28	2 7 3 6 8 1 5 4	0	0	0	2	0	-1	-0,5
29	2 7 5 4 3 6 8 1	0	0	0	1	2	0	-0,5
30	2 7 5 4 8 1 3 6	0	0	0	0	2	-1	-0,5
31	2 7 8 1 3 6 5 4	0	0	0	1	0	-2	-0,5
32	2 7 8 1 5 4 3 6	0	0	0	0	1	-2	-0,5
33	2 8 3 5 7 1 6 4	0	0	0	0,5	0	-1	-2
34	2 8 5 3 7 1 4 6	0	0	0	0	0,5	-1	-2
35	2 8 7 1 3 5 6 4	0	0	0	0,5	0	-2	-1
36	2 8 7 1 5 3 4 6	0	0	0	0	0,5	-2	-1
37	3 2 5 8 6 7 4 1	0	0	0	1	0	0,5	-2
38	3 2 6 7 5 8 4 1	0	0	0	2	0	0,5	-1
39	3 2 6 7 8 5 1 4	0	0	0	2	-0,5	0	-1
40	3 2 8 5 6 7 1 4	0	0	0	1	-0,5	0	-2

TABLEAU 7 (Suite)

Numéro de la série	Ordre des huit essais de chaque série	Influence de la dérive linéaire sur les						
		Facteurs principaux			Interactions			
		1	2	3	12	13	23	123
41	3 5 2 8 6 4 7 1	0	0	0	0,5	0	1	-2
42	3 5 6 4 2 8 7 1	0	0	0	0,5	0	2	-1
43	3 5 6 4 8 2 1 7	0	0	0	0	-0,5	2	-1
44	3 5 8 2 6 4 1 7	0	0	0	0	-0,5	1	-2
45	3 6 2 7 5 4 8 1	0	0	0	2	0	1	-0,5
46	3 6 2 7 8 1 5 4	0	0	0	2	-1	0	-0,5
47	3 6 5 4 2 7 8 1	0	0	0	1	0	2	-0,5
48	3 6 5 4 8 1 2 7	0	0	0	0	-1	2	-0,5
49	3 6 8 1 2 7 5 4	0	0	0	1	-2	0	-0,5
50	3 6 8 1 5 4 2 7	0	0	0	0	-2	1	-0,5
51	3 8 2 5 6 1 7 4	0	0	0	0,5	-1	0	-2
52	3 8 5 2 6 1 4 7	0	0	0	0	-1	0,5	-2
53	3 8 6 1 2 5 7 4	0	0	0	0,5	-2	0	-1
54	3 8 6 1 5 2 4 7	0	0	0	0	-2	0,5	-1
55	4 1 5 8 6 7 3 2	0	0	0	-2	0	0,5	1
56	4 1 5 8 7 6 2 3	0	0	0	-2	0,5	0	1
57	4 1 6 7 5 8 3 2	0	0	0	-1	0	0,5	2
58	4 1 7 6 5 8 2 3	0	0	0	-1	0,5	0	2
59	4 5 1 8 6 3 7 2	0	0	0	-2	0	1	0,5
60	4 5 1 8 7 2 6 3	0	0	0	-2	1	0	0,5
61	4 5 6 3 1 8 7 2	0	0	0	-1	0	2	0,5
62	4 5 6 3 7 2 1 8	0	0	0	0	1	2	0,5
63	4 5 7 2 1 8 6 3	0	0	0	-1	2	0	0,5
64	4 5 7 2 6 3 1 8	0	0	0	0	2	1	0,5
65	4 6 1 7 5 3 8 2	0	0	0	-0,5	0	1	2
66	4 6 5 3 1 7 8 2	0	0	0	-0,5	0	2	1
67	4 6 5 3 7 1 2 8	0	0	0	0	0,5	2	1
68	4 6 7 1 5 3 2 8	0	0	0	0	0,5	1	2
69	4 7 1 6 5 2 8 3	0	0	0	-0,5	1	0	2
70	4 7 5 2 1 6 8 3	0	0	0	-0,5	2	0	1
71	4 7 5 2 6 1 3 8	0	0	0	0	2	0,5	1
72	4 7 6 1 5 2 3 8	0	0	0	0	1	0,5	2
73	5 2 3 8 4 7 6 1	0	0	0	0	1	0,5	-2
74	5 2 4 7 3 8 6 1	0	0	0	0	2	0,5	-1
75	5 2 4 7 8 3 1 6	0	0	0	-0,5	2	0	-1
76	5 2 8 3 4 7 1 6	0	0	0	-0,5	1	0	-2
77	5 3 2 8 4 6 7 1	0	0	0	0	0,5	1	-2
78	5 3 4 6 2 8 7 1	0	0	0	0	0,5	2	-1
79	5 3 4 6 8 2 1 7	0	0	0	-0,5	0	2	-1
80	5 3 8 2 4 6 1 7	0	0	0	-0,5	0	1	-2
81	5 4 2 7 3 6 8 1	0	0	0	0	2	1	-0,5
82	5 4 2 7 8 1 3 6	0	0	0	-1	2	0	-0,5
83	5 4 3 6 2 7 8 1	0	0	0	0	1	2	-0,5
84	5 4 3 6 8 1 2 7	0	0	0	-1	0	2	-0,5
85	5 4 8 1 2 7 3 6	0	0	0	-2	1	0	-0,5
86	5 4 8 1 3 6 2 7	0	0	0	-2	0	1	-0,5
87	5 8 2 3 4 1 7 6	0	0	0	-1	0,5	0	-2

TABLEAU 7 (Suite)

Numéro de la série	Ordre des huit essais de chaque série	Influence de la dérive linéaire sur les: Facteurs principaux 1	2	3	Interactions 12	13	23	123
88	5 8 3 2 4 1 6 7	0	0	0	-1	0	0,5	-2
89	5 8 4 1 2 3 7 6	0	0	0	-2	0,5	0	-1
90	5 8 4 1 3 2 6 7	0	0	0	-2	0	0,5	-1
91	6 1 3 8 4 7 5 2	0	0	0	0	-2	0,5	1
92	6 1 3 8 7 4 2 5	0	0	0	0,5	-2	0	1
93	6 1 4 7 3 8 5 2	0	0	0	0	-1	0,5	2
94	6 1 7 4 3 8 2 5	0	0	0	0,5	-1	0	2
95	6 3 1 8 4 5 7 2	0	0	0	0	-2	1	0,5
96	6 3 1 8 7 2 4 5	0	0	0	1	-2	0	0,5
97	6 3 4 5 1 8 7 2	0	0	0	0	-1	2	0,5
98	6 3 4 5 7 2 1 8	0	0	0	1	0	2	0,5
99	6 3 7 2 1 8 4 5	0	0	0	2	-1	0	0,5
100	6 3 7 2 4 5 1 8	0	0	0	2	0	1	0,5
101	6 4 1 7 3 5 8 2	0	0	0	0	-0,5	1	2
102	6 4 3 5 1 7 8 2	0	0	0	0	-0,5	2	1
103	6 4 3 5 7 1 2 8	0	0	0	0,5	0	2	1
104	6 4 7 1 3 5 2 8	0	0	0	0,5	0	1	2
105	6 7 1 4 3 2 8 5	0	0	0	1	-0,5	0	2
106	6 7 3 2 1 4 8 5	0	0	0	2	-0,5	0	1
107	6 7 3 2 4 1 5 8	0	0	0	2	0	0,5	1
108	6 7 4 1 3 2 5 8	0	0	0	1	0	0,5	2
109	7 1 2 8 4 6 5 3	0	0	0	0	0,5	-2	1
110	7 1 2 8 6 4 3 5	0	0	0	0,5	0	-2	1
111	7 1 4 6 2 8 5 3	0	0	0	0	0,5	-1	2
112	7 1 6 4 2 8 3 5	0	0	0	0,5	0	-1	2
113	7 2 1 8 4 5 6 3	0	0	0	0	1	-2	0,5
114	7 2 1 8 6 3 4 5	0	0	0	1	0	-2	0,5
115	7 2 4 5 1 8 6 3	0	0	0	0	2	-1	0,5
116	7 2 4 5 6 3 1 8	0	0	0	1	2	0	0,5
117	7 2 6 3 1 8 4 5	0	0	0	2	0	-1	0,5
118	7 2 6 3 4 5 1 8	0	0	0	2	1	0	0,5
119	7 4 1 6 2 5 8 3	0	0	0	0	1	-0,5	2
120	7 4 2 5 1 6 8 3	0	0	0	0	2	-0,5	1
121	7 4 2 5 6 1 3 8	0	0	0	0,5	2	0	1
122	7 4 6 1 2 5 3 8	0	0	0	0,5	1	0	2
123	7 6 1 4 2 3 8 5	0	0	0	1	0	-0,5	2
124	7 6 2 3 1 4 8 5	0	0	0	2	0	-0,5	1
125	7 6 2 3 4 1 5 8	0	0	0	2	0,5	0	1
126	7 6 4 1 2 3 5 8	0	0	0	1	0,5	0	2
127	8 1 2 7 3 6 5 4	0	0	0	0	-1	-2	-0,5
128	8 1 2 7 5 4 3 6	0	0	0	-1	0	-2	-0,5
129	8 1 3 6 2 7 5 4	0	0	0	0	-2	-1	-0,5
130	8 1 3 6 5 4 2 7	0	0	0	-1	-2	0	-0,5
131	8 1 5 4 2 7 3 6	0	0	0	-2	0	-1	-0,5
132	8 1 5 4 3 6 2 7	0	0	0	-2	-1	0	-0,5
133	8 2 1 7 3 5 6 4	0	0	0	0	-0,5	-2	-1

TABLEAU 7 (Suite)

Numéro de la série	Ordre des huit essais de chaque série	Influence de la dérive linéaire sur les						
		Facteurs principaux			Interactions			
		1	2	3	12	13	23	123
134	8 2 1 7 5 3 4 6	0	0	0	-0,5	0	-2	-1
135	8 2 3 5 1 7 6 4	0	0	0	0	-0,5	-1	-2
136	8 2 5 3 1 7 4 6	0	0	0	-0,5	0	-1	-2
137	8 3 1 6 2 5 7 4	0	0	0	0	-2	-0,5	-1
138	8 3 1 6 5 2 4 7	0	0	0	-0,5	-2	0	-1
139	8 3 2 5 1 6 7 4	0	0	0	0	-1	-0,5	-2
140	8 3 5 2 1 6 4 7	0	0	0	-0,5	-1	0	-2
141	8 5 1 4 2 3 7 6	0	0	0	-2	0	-0,5	-1
142	8 5 1 4 3 2 6 7	0	0	0	-2	-0,5	0	-1
143	8 5 2 3 1 4 7 6	0	0	0	-1	0	-0,5	-2
144	8 5 3 2 1 4 6 7	0	0	0	-1	-0,5	0	-2

Dérive et randomisation

Dans la plupart des ouvrages sur les plans d'expériences, il est conseillé de randomiser les essais. Cette technique ne doit pas s'appliquer aveuglément si l'on soupçonne une dérive. En effet, si la randomisation est indispensable pour pouvoir appliquer correctement les tests statistiques elle a l'inconvénient d'augmenter l'erreur aléatoire lorsque des erreurs systématiques sont présentes. Il est donc plus avantageux d'éliminer d'abord les erreurs systématiques, si cela est possible, puis de randomiser ensuite. C'est d'ailleurs la technique qui est employée lorsque l'on fait un blocking, on élimine d'abord l'erreur systématique due à une éventuelle variation de la moyenne, puis on randomise chaque bloc.

Pour la dérive, on peut procéder de la manière suivante : quand on veut exécuter un plan 2^3 complet, on choisit au hasard l'une des 144 combinaisons possibles. Ainsi, les facteurs principaux sont-ils exempts de l'erreur de dérive et le choix, au hasard, de la série, joue le rôle de la randomisation.

Construction d'un plan 2^{4-1} en présence d'une dérive

Si l'expérimentateur désire effectuer un plan fractionnaire avec un facteur supplémentaire et qu'il veuille en même temps s'affranchir de l'influence d'une dérive, il faudra qu'il aliase le facteur supplémentaire sur l'interaction qui n'est pas touchée par la dérive. Supposons, pour prendre un exemple, que le choix d'une série, au hasard, désigne celle portant le n° 41. C'est l'interaction 13 qui est obtenue sans biais dû à la dérive, le facteur supplémentaire sera étudié sur cette interaction. On posera donc :

$$\mathbf{4 = 13}$$

d'où le générateur d'aliases du plan 2^{4-1}

$$I = 134$$

Cette manière de procéder va à l'encontre de la méthode classique qui consiste à choisir l'interaction d'ordre le plus élevé possible, soit 123, pour aliaser le facteur supplémentaire. Avec la méthode classique ont aurait choisi :

$$4 = 123$$

entraînant le générateur d'aliases :

$$I = 1234$$

Dans le cas de la série n° 41, l'interaction 123 est faussée de −2 h et le choix de cette interaction serait maladroit. En présence de dérive, il ne faut pas appliquer la méthode classique.

En consultant le tableau n° 7, on constatera qu'il y a toujours une interaction non touchée par la dérive et qu'il est ainsi toujours possible de construire un plan 2^{4-1} dont les effets principaux des quatre facteurs sont sans biais de dérive.

Blocking et dérive sur un plan 2^3

Si un expérimentateur désire réaliser un blocking et se prémunir d'une dérive, il faut qu'il choisisse avec soin l'ordre de ses essais.

La dérive l'oblige à prendre l'une des 144 séries du tableau n° 7. Parmi celles-ci, le blocking doit s'effectuer sur la colonne ayant quatre signes identiques dans sa partie supérieure. C'est-à-dire une colonne pour laquelle l'influence de la dérive est 2 ou −2. En général, le blocking se fait sur l'interaction d'ordre le plus élevé, soit 123. Il y a 48 séries qui peuvent être choisies. Elles sont réunies dans les tableaux n° 8 et n° 9.

L'une quelconque de ces séries permettra :

- d'obtenir des effets principaux sans erreur due à la dérive,
- d'obtenir des effets principaux indépendants d'une variation de la moyenne entre la série des quatre premiers essais et la série des quatre derniers.

La série à utiliser sera choisie au hasard parmi les 48 des tableaux n° 8 et n° 9.

Blocking et dérive sur un plan 2^4

Le blocking permet de réaliser un plan 2^4 en deux fois. Soit deux plans 2^3, un plan initial et un plan complémentaire.

Les quatre facteurs seront étudiés dans le premier plan 2^3 en utilisant la colonne de l'interaction non influencée par la dérive pour étudier le facteur 4. On aura donc l'un des 6 cas suivants :

$$\begin{array}{ll} 4 = 12 & 4 = -12 \\ 4 = 13 & 4 = -13 \\ 4 = 23 & 4 = -23 \end{array}$$

Le plan complémentaire sera choisi de telle manière que les erreurs dues à la dérive soient exactement compensées. Par exemple, si le plan initial a été réalisé avec la série n° 104 :

TABLEAU 8
Séries d'essais-"miroirs" à utiliser pour réaliser un blocking

Numéro de la série	Ordre des huit essais de chaque série	Influence de la dérive linéaire sur les — Facteurs 1	2	3	Interactions 12	13	23	123
1	1 4 6 7 8 5 3 2	0	0	0	−1	−0,5	0	2
2	1 4 7 6 8 5 2 3	0	0	0	−1	0	−0,5	2
5	1 6 4 7 8 3 5 2	0	0	0	−0,5	−1	0	2
6	1 6 7 4 8 3 2 5	0	0	0	0	−1	−0,5	2
9	1 7 4 6 8 2 5 3	0	0	0	−0,5	0	−1	2
10	1 7 6 4 8 2 3 5	0	0	0	0	−0,5	−1	2
57	4 1 6 7 5 8 3 2	0	0	0	−1	0	0,5	2
58	4 1 7 6 5 8 2 3	0	0	0	−1	0,5	0	2
65	4 6 1 7 5 3 8 2	0	0	0	−0,5	0	1	2
68	4 6 7 1 5 3 2 8	0	0	0	0	0,5	1	2
69	4 7 1 6 5 2 8 3	0	0	0	−0,5	1	0	2
72	4 7 6 1 5 2 3 8	0	0	0	0	1	0,5	2
93	6 1 4 7 3 8 5 2	0	0	0	0	−1	0,5	2
94	6 1 7 4 3 8 2 5	0	0	0	0,5	−1	0	2
101	6 4 1 7 3 5 8 2	0	0	0	0	−0,5	1	2
104	6 4 7 1 3 5 2 8	0	0	0	0,5	0	1	2
105	6 7 1 4 3 2 8 5	0	0	0	1	−0,5	0	2
108	6 7 4 1 3 2 5 8	0	0	0	1	0	0,5	2
111	7 1 4 6 2 8 5 3	0	0	0	0	0,5	−1	2
112	7 1 6 4 2 8 3 5	0	0	0	0,5	0	−1	2
119	7 4 1 6 2 5 8 3	0	0	0	0	1	−0,5	2
122	7 4 6 1 2 5 3 8	0	0	0	0,5	1	0	2
123	7 6 1 4 2 3 8 5	0	0	0	1	0	−0,5	2
126	7 6 4 1 2 3 5 8	0	0	0	1	0,5	0	2

6 4 7 1 3 5 2 8

pour laquelle :

- l'interaction 12 est biaisée de 0,5 h
- l'interaction 23 est biaisée de 1 h
- l'interaction 123 est biaisée de 2 h

On choisira, pour le plan complémentaire, la série d'essais pour laquelle :

- l'interaction 12 est biaisée de −0,5 h
- l'interaction 23 est biaisée de −1 h
- l'interaction 123 est biaisée de −2 h

c'est la série n° 136 :

8 2 5 3 1 7 4 6

Ces deux séries ont la propriété remarquable d'avoir leurs chiffres exactement dans l'ordre inverse. On les appellera des séries-miroirs.

Si l'on désire exécuter un plan 2^4 on choisira une série quelconque pour le plan initial. La colonne de signes du facteur 4 sera celle de l'interaction exempte de l'erreur

TABLEAU 9

Séries d'essais-"miroirs" à utiliser pour réaliser un blocking

Numéro de la série	Ordre des huit essais de chaque série	Influence de la dérive linéaire sur les Facteurs 1	2	3	Interactions 12	13	23	123
19	2 3 5 8 7 6 4 1	0	0	0	1	0,5	0	-2
22	2 3 8 5 7 6 1 4	0	0	0	1	0	-0,5	-2
23	2 5 3 8 7 4 6 1	0	0	0	0,5	1	0	-2
26	2 5 8 3 7 4 1 6	0	0	0	0	1	-0,5	-2
33	2 8 3 5 7 1 6 4	0	0	0	0,5	0	-1	-2
34	2 8 5 3 7 1 4 6	0	0	0	0	0,5	-1	-2
37	3 2 5 8 6 7 4 1	0	0	0	1	0	0,5	-2
40	3 2 8 5 6 7 1 4	0	0	0	1	-0,5	0	-2
41	3 5 2 8 6 4 7 1	0	0	0	0,5	0	1	-2
44	3 5 8 2 6 4 1 7	0	0	0	0	-0,5	1	-2
51	3 8 2 5 6 1 7 4	0	0	0	0,5	-1	0	-2
52	3 8 5 2 6 1 4 7	0	0	0	0	-1	0,5	-2
73	5 2 3 8 4 7 6 1	0	0	0	0	1	0,5	-2
76	5 2 8 3 4 7 1 6	0	0	0	-0,5	1	0	-2
77	5 3 2 8 4 6 7 1	0	0	0	0	0,5	1	-2
80	5 3 8 2 4 6 1 7	0	0	0	-0,5	0	1	-2
87	5 8 2 3 4 1 7 6	0	0	0	-1	0,5	0	-2
88	5 8 3 2 4 1 6 7	0	0	0	-1	0	0,5	-2
135	8 2 3 5 1 7 6 4	0	0	0	0	-0,5	-1	-2
136	8 2 5 3 1 7 4 6	0	0	0	-0,5	0	-1	-2
139	8 3 2 5 1 6 7 4	0	0	0	0	-1	-0,5	-2
140	8 3 5 2 1 6 4 7	0	0	0	-0,5	-1	0	-2
143	8 5 2 3 1 4 7 6	0	0	0	-1	0	-0,5	-2
144	8 5 3 2 1 4 6 7	0	0	0	-1	-0,5	0	-2

de dérive. Le plan complémentaire ne sera plus choisi au hasard : c'est celui de la série-miroir, sœur de celle du plan initial.

A titre d'exemple, nous donnons le détail du plan bâti sur les séries-miroirs 104 et 136 (tableau n° 10).

Conclusion

Cet article n'a pas la prétention d'être complet. On pourrait établir les séries permettant d'éliminer la dérive des effets des facteurs principaux pour les plans 2^4, 2^5, etc. Le plan 2^2 étant lui sans problème puisque seule l'interaction 12 est utilisable. On pourrait également chercher d'autres applications.

L'exemple du plan 2^3 et les applications que nous proposons nous semblent suffisamment riches et démonstratifs pour que les expérimentateurs ne se lancent pas dans la voie de la randomisation sans avoir envisagé la possibilité d'erreurs systématiques. Deux types d'erreur doivent toujours être considérés : l'erreur systé-

TABLEAU 10
Exemple de Plan d'expériences permettant un blocking
et l'élimination de la dérive sur les facteurs principaux

Séries miroir	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3	Facteur 4	Blocking sur 134
6	+	−	+	−	−
4	+	+	−	+	−
7	−	+	+	+	−
1	−	−	−	−	−
3	−	+	−	−	−
5	−	−	+	+	−
2	+	−	−	+	−
8	+	+	+	−	−
8	+	+	+	+	+
2	+	−	−	−	+
5	−	−	+	−	+
3	−	+	−	+	+
1	−	−	−	+	+
7	−	+	+	−	+
4	+	+	−	−	+
6	+	−	+	+	+

matique et l'erreur aléatoire. Pour minimiser cette dernière, il faut maîtriser la première. Le blocking est déjà utilisé dans ce but, nous proposons d'y associer la dérive.

Les plans d'expériences offrent la grande chance de déceler ou d'éliminer des erreurs systématiques, l'expérimentateur doit en profiter.

Avant d'entreprendre une expérimentation par plan d'expériences factoriel, l'ordre des essais doit être choisi avec soin car la qualité de l'expérimentation peut s'en trouver grandement améliorer. Blocking, dérive et randomisation doivent être associés au mieux pour minimiser les erreurs.

Bibliographie

[1] R.A. FISHER "Statistical Methods for Research Workers" Olivier and Boyd. (1925).

[2] R.A. FISHER "The Design of Experiments" Oliver and Boyd (1935)

[3] R.L. PLACKETT and J.P. BURMAN "The Design of Optimum Multifactorial Experiments" Biometrika, n° 33, 1946.

[4] George.E.P. BOX , W.G. HUNTER, J.S. HUNTER "Statistics for Experimenters" John Wiley and Sons 1971.

[5] Owen L. DAVIES "The Design and Analysis of Industrial Experiments" Oliver and Boyd. (1971).

[6] Cuthbert DANIEL "Applications of Statistics to Industrial Experimentation" John Wiley and Sons. (1976).

[7] Harold HOTELLING "Some Problems in Weighing and other Experimental Techniques" Am. Math. Stat, 15, 297-306-4.

[8] W.G. COCHRAN, G. COX "Experimental Design" John Wiley and Sons. (1966).

[9] George.E.P. BOX, N.R. DRAPER "Evolutionary Operation. A Statistical Method for Process Improvement." John Wiley and Sons, New-York. (1969).

[10] Stuart J. HUNTER "Statistical Design Applied to Product Design" Journal of Quality Technology, vol. 17, n° 4, 1985.

[11] CHAPOUILLE "Planification et analyse des expériences" MASSON. Paris. (1973).

[12] D. BENOIST "Notions sur les plans d'expériences" Société des éditions TECHNIP. Paris. (1974).

[13] Michel G. VIGIER "Pratique des plans d'expériences. Méthodologie TAGUCHI" Les Editions d'organisation. Paris. (1988).

[14] J.C. MILLER and J.N. MILLER "Statistics for Analytical Chemistry" Ellis HORWOOD limited. Chischester. (1984).

[15] George E.P. BOX, Norman R. DRAPER "Empirical model – building and response surfaces" John Wiley and Sons – New-York (1987).

[16] G. SADO et J. GOUPY "La Méthodologie des plans d'expériences appliquée à l'optimisation du réglage d'un spectrofluorimètre." Analusis, 1986, Vol. 14, n° 8, p. 389-400.

[17] J. GOUPY "La Méthode des Plans d'Expériences" DUNOD. Paris. (1988).