

F. BASTENAIRE

L. REGNIER

**Étude des propriétés statistiques des estimations  
des paramètres d'une courbe de réponse obtenues  
par la méthode de l'escalier**

*Revue de statistique appliquée*, tome 31, n° 1 (1983), p. 5-23

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1983\\_\\_31\\_1\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1983__31_1_5_0)

© Société française de statistique, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ETUDE DES PROPRIETES STATISTIQUES DES ESTIMATIONS DES PARAMETRES D'UNE COURBE DE REPONSE OBTENUES PAR LA METHODE DE L'ESCALIER

F. BASTENAIRE et L. REGNIER (\*)

---

## RESUME

La méthode de l'escalier a été proposée en 1948 par W.J. DIXON et A.M. MOOD pour estimer les paramètres statistiques (moyenne  $\mu$  et écart-type  $\sigma$ ) d'une courbe de réponse supposée sigmoïde normale. La précision de ces estimations (justesse, fidélité. . .) dépend fortement du nombre d'essais réalisés, les auteurs suggérant un nombre supérieur à 30 et même 40.

Or, en expérimentation, les questions de coût et parfois de durée d'essai limitent bien souvent l'exécution de cette méthode à un nombre d'essais inférieur à 20.

C'est pourquoi il nous a semblé intéressant de calculer les propriétés statistiques (biais, dispersion, loi de distribution) des estimations de  $\mu$  et de  $\sigma$  obtenues par cette méthode pour un nombre d'essais allant de 5 à 20 en fonction des diverses conditions d'application qui peuvent, en pratique, se présenter.

## SUMMARY

The so-called "Staircase method" was first introduced in 1948 by W.J. DIXON and A.M. MOOD to estimate the statistical parameters (the mean  $\mu$  and the standard deviation  $\sigma$ ) of a sigmoid normal response curve. The quality of these estimates (in accuracy and precision) strongly depends on the number of tests performed, the authors having suggested as much as 30 or 40 tests.

In many experimental situations, considerations of cost and/or time often limit the application of this method to a number of tests no exceeding 20.

It therefore appeared of interest to calculate the statistical characteristics of the estimates of  $\mu$  and  $\sigma$  derived from this method for 5 through 20 tests in relation to the various conditions of application that may occur in practice.

## 1. INTRODUCTION

Les laboratoires de recherches appliquées sont fréquemment confrontés à des essais dont les résultats ne peuvent prendre que deux modalités s'excluant réciproquement (rupture, non-rupture d'une pièce, mort ou survie d'un animal à un traitement etc. . .) La probabilité d'apparition de l'une des deux éventualités ( $E$  ou  $\bar{E}$ ) du phénomène étudié est fonction d'un paramètre  $x$ , appelé dose, et la courbe représentative des variations de cette probabilité en fonction de  $x$  est très souvent donnée par la courbe sigmoïde normale.

---

(\*) Service "Statistique Appliquée" de l'I.R.S.I.D (Institut de Recherches de la Sidérurgie Française) – 78105 Saint-Germain-en-Laye, Cedex.

Soit E l'évènement étudié, alors, la probabilité p que l'on a d'observer E à un niveau x de la dose peut s'exprimer au moyen de la formule suivante :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (1)$$

où  $\mu$  représente la dose pour laquelle la probabilité de E est égale à 0.5 et  $\sigma$  l'écart-type de cette courbe de réponse.

Poser un tel modèle peut se justifier en admettant que l'évènement E observé est, en fait, déterminé par les valeurs relatives de la dose x appliquée à un individu et de la dose limite (ou critique) propre à cet individu mais inobservable, distribuée selon la loi normale. La probabilité de E se ramène alors à la probabilité que la dose critique soit inférieure à la dose appliquée.

Diverses méthodes permettent d'estimer les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  de la courbe de réponse et, parmi elles, la méthode de l'escalier (Stair-Case) dont on se propose de donner ici un tableau très complet des propriétés statistiques dans diverses conditions d'application et pour un nombre d'essais allant de 5 à 20.

Dans de telles expérimentations, on doit noter qu'il n'est généralement pas possible de soumettre un "specimen" (éprouvette, charge explosive, insecte ou animal etc.) à plus d'un essai du fait du caractère *destructif* ou *endommageant* de ce dernier.

## II. PRINCIPE DE LA METHODE

### II.1. Règles d'exécution

Cette méthode consiste à effectuer les essais (un par un) à des valeurs successives de la dose x régulièrement espacées et dont le choix, valeur immédiatement supérieure ou inférieure à la valeur de la dose précédemment utilisée, dépend du résultat obtenu à l'essai précédent.

Le niveau  $x_0$  de la dose appliquée au premier essai est choisi, a priori, le plus voisin de la médiane  $\mu$  cherchée. Nous noterons dans la suite E l'évènement dont la probabilité d'apparition croît avec x et  $\bar{E}$  l'évènement contraire.

Le premier essai étant effectué pour la dose  $x_0$ , les essais suivants seront effectués à des doses  $x_i$  choisies selon la règle donnée ci-dessous :

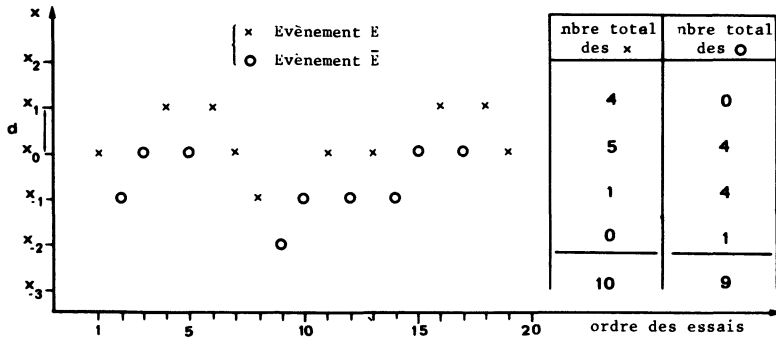
a) si le résultat de l'essai précédent est l'évènement E, on choisit pour le nouvel essai, le niveau de la dose immédiatement inférieur, dans l'échelonnement adopté, à celui utilisé lors du dernier essai.

b) si le résultat de l'essai précédent est l'évènement  $\bar{E}$ , on choisit, à l'inverse, le niveau de la dose immédiatement supérieur.

On continue cette procédure jusqu'à épuisement des spécimens soumis aux essais. On voit de suite qu'avec cette méthode les essais sont automatiquement concentrés dans la partie centrale de la courbe p(x) (1).

Cette règle d'exécution des essais, fort simple, est sans doute à l'origine de l'emploi fréquent de la méthode de l'escalier.

Un exemple de réalisation de cette méthode est donné dans la figure ci-dessous.



## II.2. Expressions des estimations

Les formules d'estimation de  $\mu$  et  $\sigma$  sont basées sur la méthode du maximum de vraisemblance. Grâce à certaines approximations introduites dans la résolution des équations, les formules sont très simples. En pratique, on détermine le type d'évènement E ou  $\bar{E}$  qui s'est produit le moins fréquemment au cours de la série d'essais. Les seuls résultats de ce type suffisent, en effet, au calcul et sont retenus de préférence aux autres dont le nombre plus important est souvent dû à un choix du niveau de départ  $x_0$  éloigné de la médiane  $\mu$  à estimer. On compte alors, pour chaque niveau de la dose, le nombre  $n_i$  des réalisations de cet évènement puis on numérote ces niveaux en attribuant la valeur  $i = 0$  au plus faible  $x'_0$  de ceux auxquels il a été observé au moins une fois.

On calcule alors les trois quantités suivantes,  $i$  désignant le numéro du niveau d'essais :

$$N = \sum_i n_i \quad A = \sum_i i n_i \quad B = \sum_i i^2 n_i$$

Les formules d'estimations de  $\mu$  et  $\sigma$  (DIXON et MOOD [1]) se déduisent de ces quantités :

$$\hat{\mu} = x'_0 + d \left( \frac{A}{N} \pm \frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

dans laquelle :

$x'_0$  : niveau d'indice  $i = 0$  tel que défini plus haut (le plus faible des niveaux utilisés auxquels on ait obtenu au moins un résultat du type retenu) ;

$d$  : espacement des niveaux ;

$+\frac{1}{2}$  : si le calcul est basé sur les résultats d'essais du type  $\bar{E}$  ;

$-\frac{1}{2}$  : s'il est basé sur les résultats d'essais du type E (évènement dont la probabilité d'apparition croît avec  $x$ ).

$$\hat{\sigma} = 1.62 d \left( \frac{NB - A^2}{N^2} + 0.029 \right) \quad (3)$$

Selon DIXON et MOOD [1] la formule 3 ne peut être utilisée qu'à la condition que :

$$\boxed{\frac{NB - A^2}{N^2} > 0.3} \quad (4)$$

Si nous appliquons ces formules à l'exemple de la figure 1 nous trouvons qu'il faut utiliser les résultats d'essais du type  $\bar{E}$  qui sont les moins fréquents. La nouvelle origine  $x'_0$  est donc prise en  $x_{-2}$  ; nous en déduisons alors :

$$N = 9, A = 12, B = 20$$

$$\mu = x_{-2} + d \left( \frac{12}{9} + \frac{1}{2} \right) = x_{-2} + 1.83 d$$

de plus, la valeur  $\frac{NB - A^2}{N^2}$  étant égale à 0.44, donc supérieure à 0.3, nous pouvons en déduire une estimation de l'écart-type :

$$\hat{\sigma} = 0.76 d$$

### III. SCHEMA THEORIQUE DU PROCESSUS DE CALCUL

L'étude numérique des distributions des estimations de la médiane  $\mu$  et de l'écart-type  $\sigma$  impose le calcul des différentes valeurs possibles des estimées ainsi que leurs probabilités respectives.

Dans ce but nous allons définir plusieurs variables aléatoires :

– Y, la variable aléatoire donnant la médiane  $\hat{\mu}$ . Cette variable prend pour valeurs celles calculées au moyen de la formule (2).

– S, la variable aléatoire donnant l'écart-type  $\hat{\sigma}$ . Cette variable prend pour valeurs celles calculées au moyen de la formule (3) *sans tenir compte de la condition (4) imposée par DIXON et MOOD.*

– Sval, la variable aléatoire donnant l'écart-type  $\hat{\sigma}$  lorsque la condition (4) est réalisée.

–  $E_x$ , la variable aléatoire prenant deux modalités E ou  $\bar{E}$  avec des probabilités respectives  $p(x)$  et  $q(x)$  dépendant de la valeur de la dose  $x$  :

$$\Pr(E_x = E) = p(x)$$

$$\Pr(E_x = \bar{E}) = 1 - p(x) = q(x)$$

L'exécution de la méthode nous conduit à définir une échelle de niveaux  $x_i$  régulièrement espacés, auxquels seront effectués les essais. Soit  $x_0$  le niveau de l'échelle le plus voisin de la médiane vraie  $\mu$  de la courbe de réponse sigmoïde normale considérée et  $d$  l'espacement des niveaux. L'échelle est donc constituée de valeurs de la forme  $x_i = x_0 + id$  où  $i$  est un entier qui peut être positif, nul ou négatif.

Dans le paragraphe IV, les raisonnements et les calculs ont été faits dans le cas où le *point de départ des essais se situe en  $x_0$*  donc dans le cas le plus favorable.

Dans le paragraphe VI, nous étudions l'influence de la position du point de départ sur l'estimation de la médiane. Trois points ont été retenus :  $\mu + \sigma$ ,  $\mu + 2\sigma$  et  $\mu + 3\sigma$ .

Ayant effectué une série de  $n$  essais ( $n$  compris entre 5 et 20) et connaissant leurs différents résultats  $r_i$  ( $i = 1, n$ ), résultats de la forme  $E$  ou  $\bar{E}$ , il est facile de calculer au moyen des formules (2) et (3), les estimations de  $\mu$  et de  $\sigma$  ainsi que leurs probabilités respectives (qui sont évidemment égales). Les épreuves étant supposées indépendantes en probabilité, la probabilité que la variable  $Y$  prenne la valeur  $y_j$  correspondant à l'estimation de  $\mu$  pour cette série d'essais et que la variable aléatoire  $S$  prenne la valeur  $s_j$  correspondant également à l'estimation de  $\sigma$  pour cette même série d'essais est égale à :

$$\Pr(Y = y_i) = \prod_{i=1}^n \Pr(E_{x_i} = r_i) = p_j \quad (5)$$

Les valeurs  $y_j$  et  $s_j$  des variables aléatoires discrètes  $Y$  et  $S$  ainsi que les probabilités  $p_j$  correspondantes sont donc entièrement déterminées dès que l'on connaît le nombre d'essais  $n$  et le pas  $d$  d'espacement des niveaux. A noter que ces valeurs sont alors au nombre de  $2^n - 2$  car il y a  $2^n$  configurations possibles (suites de  $n$  résultats de type  $E$  ou  $\bar{E}$ ) dont 2 donnant des résultats tous du même type ( $n$  fois  $E$  ou  $n$  fois  $\bar{E}$ ) et donc inexploitable (pour  $n \geq 5$  la probabilité  $p_j$  correspondant à ces 2 cas est d'ailleurs pratiquement nulle).

Les formules usuelles de calcul de l'espérance mathématique et de la variance nous donnent :

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_j p_j y_j ; & V[Y] &= E[Y^2] - (E[Y])^2 = \sum_j p_j y_j^2 - \left(\sum_j p_j y_j\right)^2 \\ E[S] &= \sum_j p_j s_j ; & V[S] &= \sum_j p_j s_j^2 - \left(\sum_j p_j s_j\right)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

où les sommes sur  $j$  sont étendues de 1 à  $2^n - 2$ .

Pour déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $S_{val}$  qui prend pour valeurs un sous ensemble de celles prises par  $S$ , il faut avoir recours aux probabilités conditionnelles. Considérons alors  $J$  l'ensemble des valeurs de  $j$  qui correspondent à des séries pour lesquelles la condition (4) est réalisée ( $J \leq 2^n - 2$ ).

La probabilité que cette condition (4) soit vérifiée pour l'ensemble des  $2^n - 2$  séries est alors égale à :

$$p_{val} = \Pr(\text{condition (4) vérifiée}) = \sum_{j \in J} p_j$$

il s'ensuit alors les formules classiques

$$\left| \begin{aligned} E[S_{val}] &= \frac{\sum_{j \in J} p_j s_j}{p_{val}} \\ V[S_{val}] &= \sum_{j \in J} \frac{p_j}{p_{val}} s_j^2 - \left(\sum_{j \in J} \frac{p_j}{p_{val}} s_j\right)^2 \end{aligned} \right. \quad (7)$$

*Remarque* : tous les calculs ont été effectués pour une courbe de réponse sigmoïde normale standard c'est-à-dire de médiane  $\mu = 0$  et d'écart-type  $\sigma = 1$ . Les résultats peuvent donc être considérés comme des multiples de l'écart-type ce qui conduit à remplacer l'espacement des niveaux  $d$  par un pas "standard"  $\Delta$  égal à  $d/\sigma$ .

#### IV. COMPORTEMENT DE LA METHODE SOUS DIFFERENTES CONDITIONS D'APPLICATION

Afin d'étudier l'influence des positions respectives de la médiane  $\mu$  et de l'échelle des niveaux d'essais sur le comportement de la méthode, deux origines distinctes, pour un pas d'essais  $\Delta$  fixé, ont été choisies de la façon suivante :

- la première origine est située exactement en  $x_0 = \mu$  ;
- la seconde origine est située en  $\mu + \Delta/2$  ( $x_0 = \mu + \Delta/2$ ).

De plus, huit valeurs de  $\Delta$  ont été considérées, à savoir :

$$\Delta = .4, .6, .8, 1., 1.2, 1.4, 1.8, 2.2$$

Les espérances mathématiques et les écarts-types des variables  $Y$ ,  $S$  et  $S_{va1}$  ont été calculés pour chaque combinaison des valeurs de  $\Delta$  et de  $n$  et chaque position de l'origine. Les résultats complets de ces calculs numériques figurent dans la référence [2] mais nous n'en rendons compte ici que par les figures 1 à 4 commentées ci-dessous (des exemplaires de la référence [2] sont toutefois à la disposition des lecteurs intéressés par les résultats numériques)

##### IV.1. Etude de l'estimation $Y$ de la médiane $\mu$

###### IV.1.1. Espérance mathématique de $Y$

Lorsque le point de départ  $x_0$  est placé exactement sur la médiane  $\mu$ , il n'y a, bien évidemment, pas d'erreur systématique ( $E[Y] = 0$ ) car l'ensemble des configurations possibles (ensemble des suites de  $n$  événements de type  $E$  ou  $\bar{E}$ ) se répartit symétriquement autour de la médiane  $\mu$ . C'est pour cette raison que nous avons reporté dans la figure 1 l'espérance mathématique de  $Y$  lorsque le point de départ est situé en  $\mu + \Delta/2$ . Nous constatons que cette erreur systématique est relativement faible et décroissante lorsque  $\Delta$  croît pour les valeurs de  $n$  impaires mais légèrement croissante lorsque  $\Delta$  croît ( $\Delta$  variant de .4 à 2.2) pour les valeurs de  $n$  paires. C'est également, quel que soit  $\Delta$ , une fonction décroissante de  $n$  pour les valeurs paires d'une part et pour les valeurs impaires d'autre part.

De plus, nous constatons que les écarts entre les valeurs de  $E[Y]$  pour les  $n$  pairs et les  $n$  impairs croissent en fonction de  $\Delta$ ,  $E[Y]$  pour  $n$  impair étant très généralement inférieure à  $E[Y]$  pour la valeur paire ( $n + 1$ ).

###### IV.1.2. Ecart-type de $Y$

L'écart-type de la variable aléatoire  $Y$ , noté  $\sigma_y$ , nous renseigne sur l'amplitude de la fluctuation aléatoire dont l'estimation de  $\mu$  est affectée. Les résultats numériques ont montré que le positionnement de l'échelle des niveaux d'essais par rapport à la médiane de la courbe de réponse n'a pratiquement pas d'influence sur  $\sigma_y$ , quelles que soient les valeurs attribuées à  $\Delta$ , et à  $n$ . Ceci nous permet d'étu-

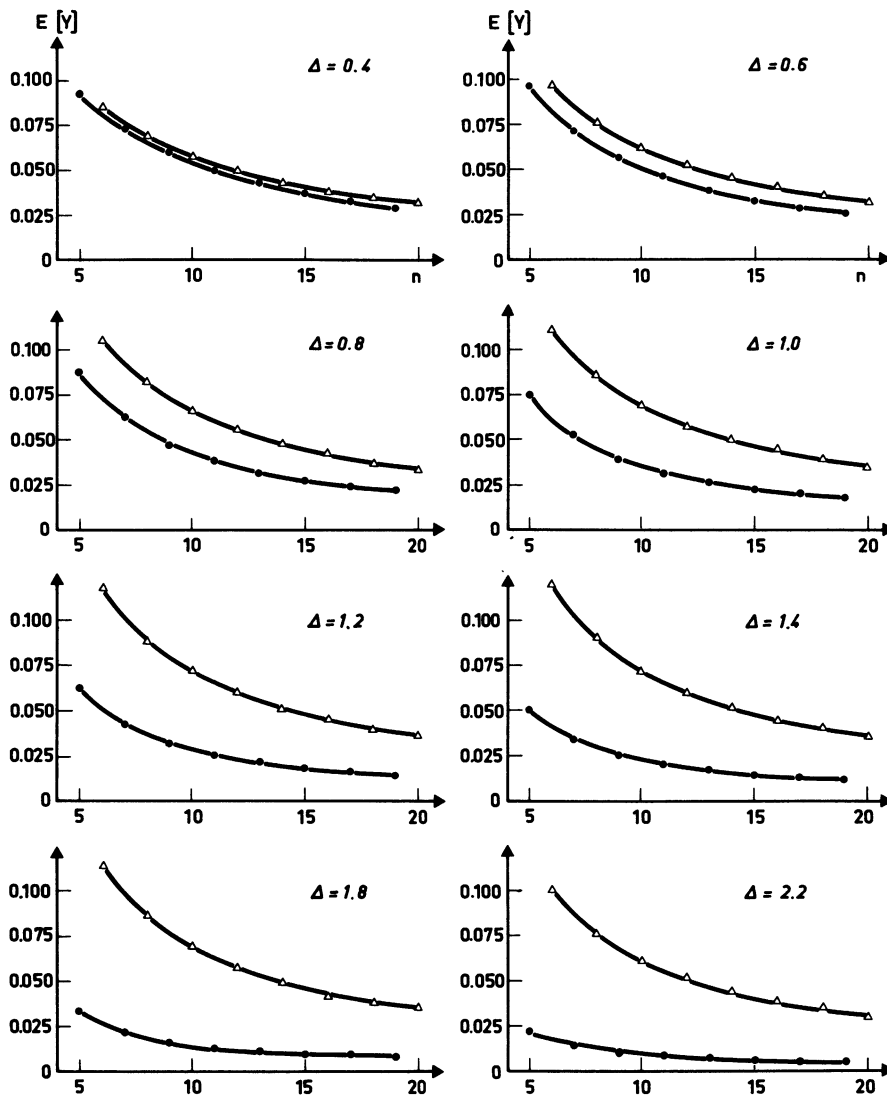


Figure 1. — Espérance mathématique de Y  $E[Y] \quad X_0 = \mu + \Delta/2$   
 $\Delta$  : n pair  
 $\bullet$  : n impair

dier entièrement l'influence des paramètres  $\Delta$  et  $n$  dans le seul cas où l'origine de l'échelle coïncide avec la médiane. Nous constatons alors que l'écart-type  $\sigma_y$ , croît en fonction de  $\Delta$ , quelle que soit la valeur donnée à  $n$ , et décroît, quel que soit  $\Delta$ , en fonction des  $n$  pairs ou impairs. Les courbes correspondantes sont reportées dans la figure 2.

La valeur minimale de  $\sigma_y$  dans le domaine étudié est atteinte pour une combinaison  $(\Delta ; n)$  égale à  $(.4 ; 20)$  pour laquelle  $\sigma_y = 0.265$  ; la valeur maximale égale à  $0.836$  est atteinte pour la combinaison diamétralement opposée  $(2.2 ; 5)$ .



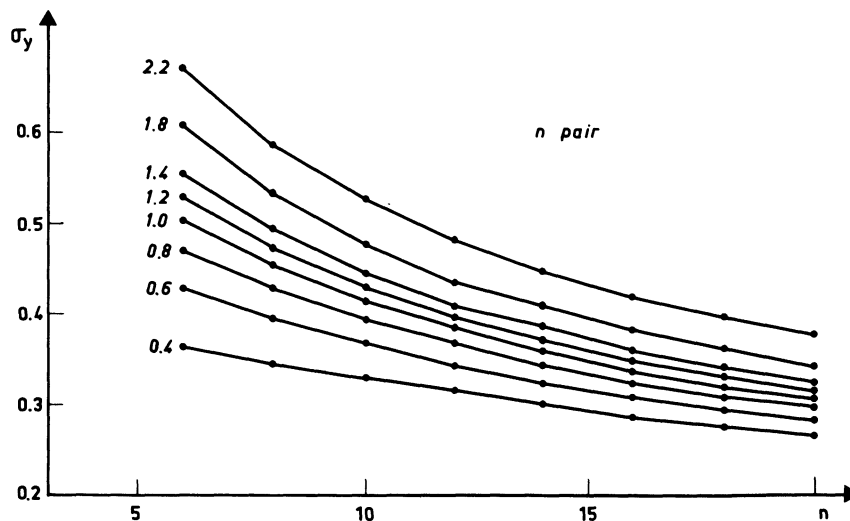
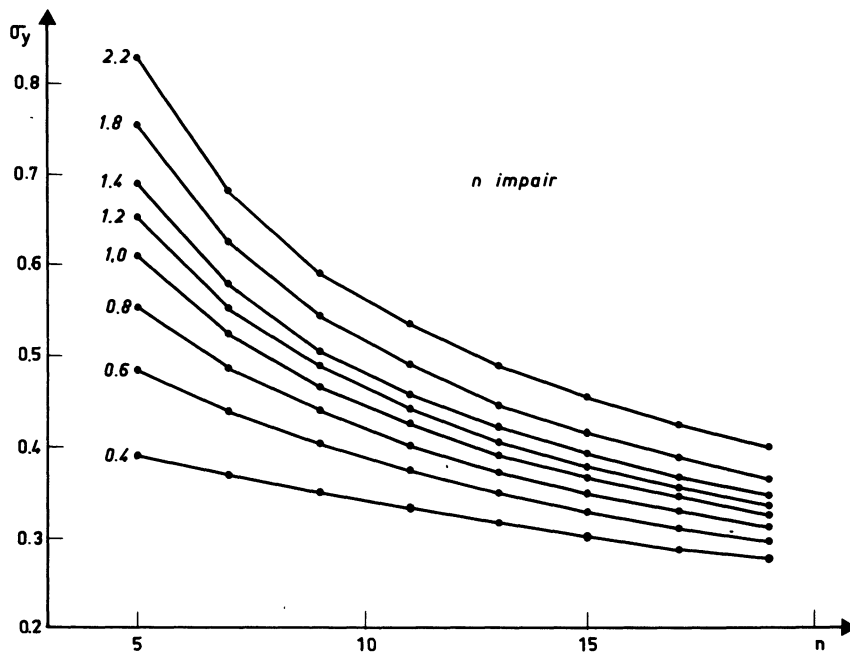


Figure 2. – Ecart-type de Y ( $\sigma_Y$ ).

#### IV.2. Etude de l'estimation de l'écart-type $\sigma$ de la courbe de réponse

Deux cas vont être envisagés selon que l'écart-type est estimé lorsque la condition (4) n'est pas réalisée (S) ou lorsqu'elle l'est ( $S_{va1}$ ).

##### IV.2.1. Condition non réalisée

C'est le cas où l'on considère l'ensemble total des valeurs de la variable S, soient  $2^n - 2$  valeurs possibles.

#### IV.2.1.1. Espérance mathématique de S

L'espérance mathématique de S ( $E[S]$ ) a été calculée en fonction des trois paramètres ( $\Delta$ ,  $n$ ,  $x_0$ ). Les résultats obtenus pour  $n$  pair sont seuls reportés (Fig. 3).

$E[S]$  est une fonction croissante à la fois de  $\Delta$  et de  $n$  et on note que sa valeur, quelle que soit la combinaison adoptée, reste toujours inférieure à l'unité.

L'influence de l'origine de l'échelle  $x_0$  est sensible quels que soient  $\Delta$  et  $n$  mais ne devient toutefois importante que pour les fortes valeurs de  $\Delta$  (1.8 et surtout 2.2).

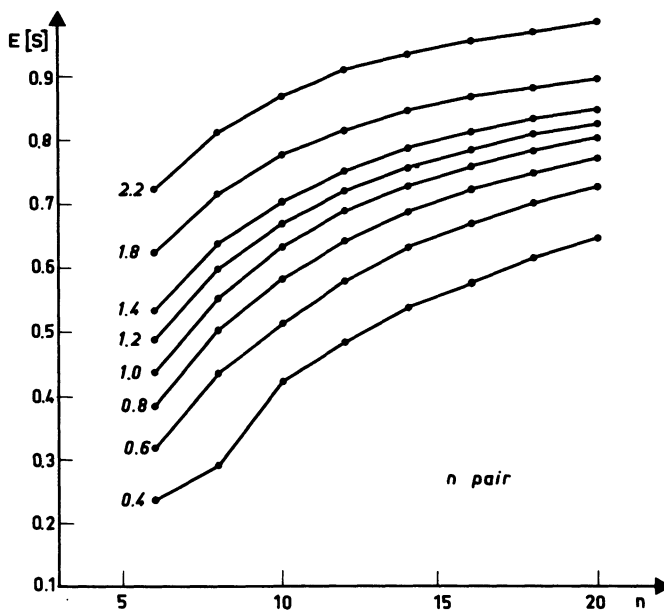


Figure 3. – Espérance mathématique de S ( $E[S]$ ) pour  $x_0 = \mu$ .

#### IV.2.1.2. Ecart-type de S

De même que pour  $E[S]$ , on constate que l'influence de  $x_0$  sur l'écart-type de S,  $\sigma_S$ , n'est importante que pour les fortes valeurs de  $\Delta$  (1.8 et 2.2).

Il est par contre plus important de remarquer que, pour les valeurs de  $\Delta$  inférieures à 0.8,  $\sigma_S$  est une fonction *croissante* de  $n$  (Fig. 4). Pour les valeurs intermédiaires  $0.8 < \Delta < 1.8$ ,  $\sigma_S$  est d'abord croissant (jusqu'à environ  $n = 10$ ) puis décroissant. A partir de  $\Delta = 1.8$ ,  $\sigma_S$  est décroissant en fonction de  $n$ .

Cette dernière constatation est troublante lorsque l'on sait que la précision des estimations classiques croît toujours avec l'effectif de l'échantillon, c'est-à-dire que l'écart type de l'estimateur est une fonction décroissante de  $n$ .

Excepté pour les valeurs de  $\Delta$  égales à 1.8 et 2.2, pour lesquelles l'influence de  $x_0$  n'est pas négligeable, la valeur de  $\sigma_S$  lorsque  $n$  est supérieur à 10, est toujours supérieure à 0.34, soit à plus du tiers de l'écart-type de la courbe de réponse.

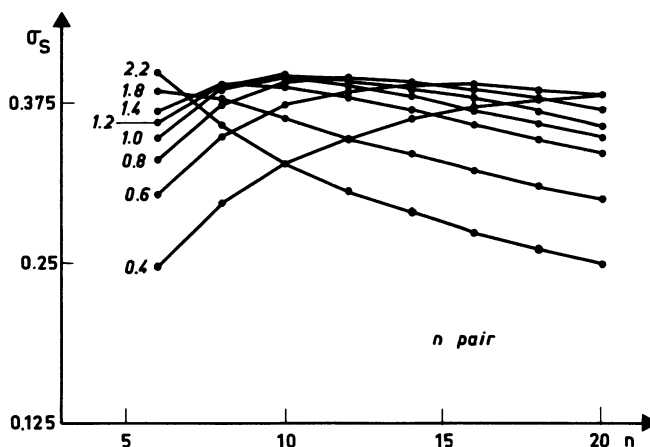


Figure 4. – Ecart-type de S ( $\sigma_S$ ) pour  $x_0 = \mu$ .

#### IV.2.2. Condition réalisée

##### IV.2.2.1. Espérance mathématique de $S_{val}$

Les valeurs de  $E[S_{val}]$  sont, pour chaque combinaison  $(\Delta, n)$ , toujours supérieures à celles de  $E[S]$ , ce qui est logique puisque la condition (4) a pour effet de ne pas tenir compte des faibles valeurs de l'estimation de l'écart-type.

La figure 5 montre l'évolution des courbes de  $E[S_{val}]$  en fonction de  $n$  et des différentes valeurs de  $\Delta$ . Ces courbes sont généralement décroissantes pour  $\Delta > 1$  et très faiblement croissantes pour  $\Delta < 1$  et  $n > 10$ . La convergence éventuelle vers la vraie valeur de l'écart-type (ici l'unité) est très lente.

L'influence de la position de l'échelle se fait surtout sentir pour les deux valeurs de  $\Delta$  les plus élevées.

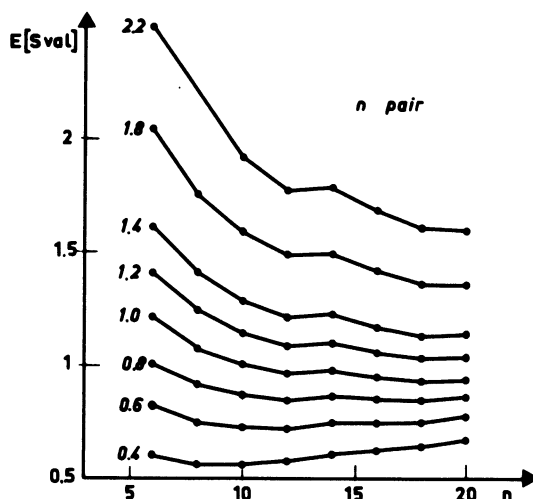


Figure 5. – Espérance mathématique de  $S_{val}$  ( $E[S_{val}]$ ) pour  $x_0 = \mu$ .

#### IV.2.2.2. Ecart-type de $S_{val}$

Les valeurs de l'écart-type  $\sigma_{S_{val}}$  relatives à  $n = 5$  n'ont pas été reportées car elles présentaient de trop grandes distorsions dues au faible nombre de configurations retenues pour leurs calculs.

L'effet introduit par l'origine de l'échelle est important mais tend à diminuer pour les fortes valeurs de  $n$ .

Les différentes courbes (fig. 6) présentent, pour  $\Delta > 0.8$ , un dôme pour les valeurs de  $n$  comprises entre 7 et 13. Pour les valeurs  $\Delta$  supérieures à 1, elles décroissent brutalement pour  $n = 14$  et 15 puis se stabilisent avant de décroître à nouveau pour  $n = 20$ . Pour  $\Delta$  inférieur à 1, elles croissent lentement en fonction de  $n$ .

Excepté pour  $\Delta = 1.8$  et 2.2, les valeurs de  $\sigma_{S_{val}}$  sont toujours supérieures à 0.25, soit le quart de l'écart-type vrai.

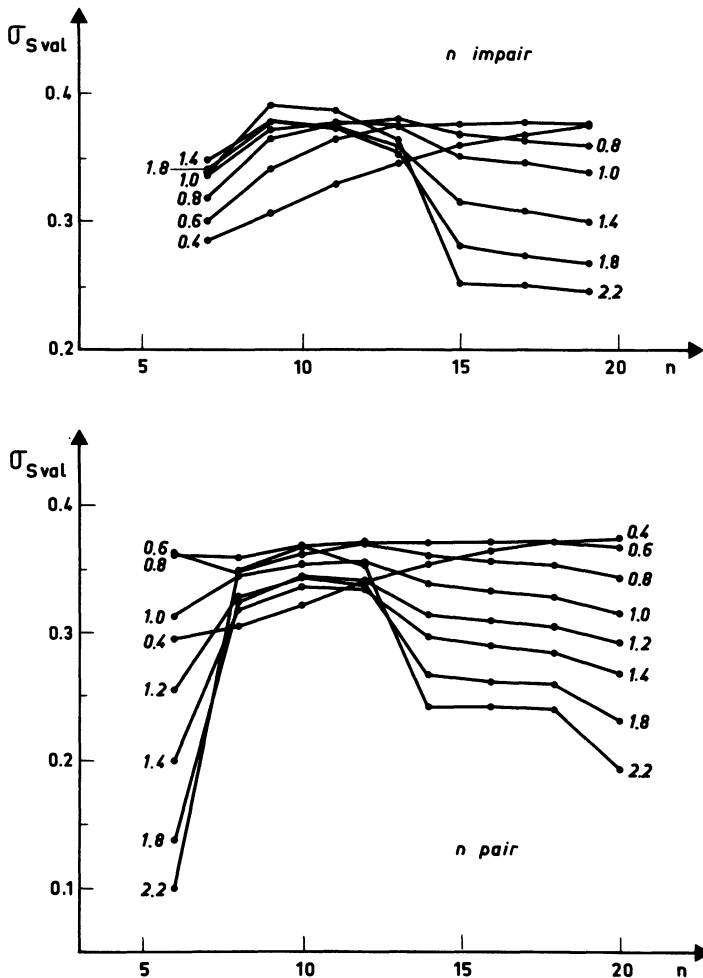


Figure 6. - Ecart-type de  $S_{val}$  ( $\sigma_{S_{val}}$ ) pour  $x_0 = \mu$ .

### IV.3. Etude de la courbe G

Etant donnés les estimations  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\sigma}$  et le nombre d'essais "utile" N, la détermination d'un intervalle de confiance pour la médiane  $\mu$  de la courbe de réponse nécessite la connaissance de la précision de l'estimation  $\hat{\mu}$ , caractérisée par l'écart-type  $\sigma_{\hat{\mu}}$ . La valeur de ce dernier a été exprimée par DIXON et MOOD au moyen de la formule :

$$\sigma_{\hat{\mu}} = G \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (5)$$

dans laquelle le coefficient G, donné sous forme de courbes, dépend du rapport  $d/\sigma$  et de la position de l'origine de l'échelle des niveaux d'essais  $x_0$ , par rapport à la médiane  $\mu$ .

A partir des résultats de nos calculs théoriques nous pouvons, pour chaque combinaison  $\Delta$ , n et  $x_0$  ( $= \mu$  ou  $\mu + \Delta/2$ ), fournir la valeur G théorique correspondante. En effet, il suffit de remplacer dans la formule (5) l'écart type de la courbe de réponse  $\sigma$  par la valeur choisie pour les calculs (égale à l'unité),  $\sigma_{\hat{\mu}}$  par la valeur calculée  $\sigma_y$  et N, le nombre "utile" d'essais, par la valeur moyenne obtenue sur l'ensemble des  $2^n - 2$  configurations possibles. Nous obtenons alors l'ensemble des valeurs de la fonction G.

Nous avons constaté que l'influence de l'origine  $x_0$  était négligeable quels que soient  $\Delta$  et n, ce qui est en accord avec les résultats de DIXON et MOOD où une influence marquée n'apparaît qu'à partir de valeurs de  $\Delta$  supérieure à 2.25.

Nous avons reporté sur la figure 7 les valeurs de G en fonction de  $\Delta$ . On obtient, en fonction de n, un réseau de courbes qui semblent converger, à mesure que n augmente, vers la courbe G donnée par DIXON et MOOD.

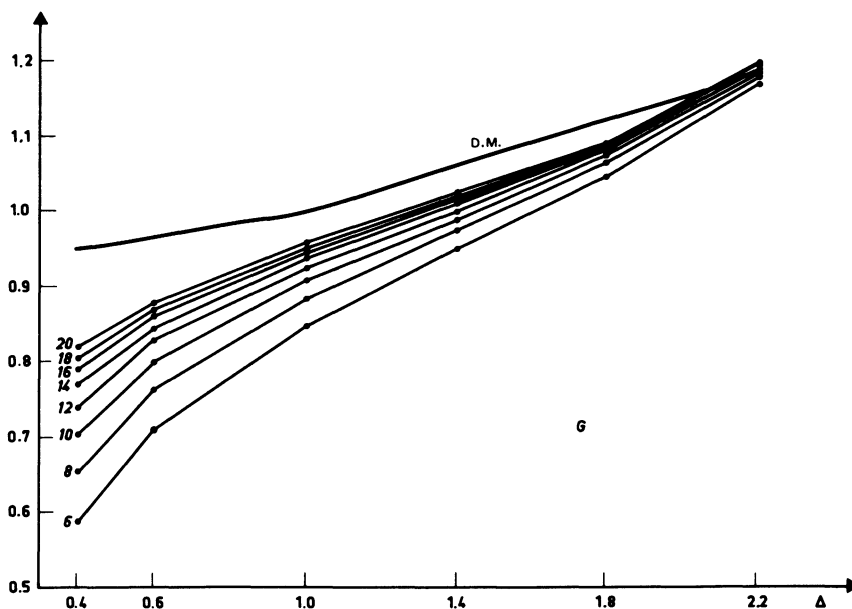


Figure 7. - Courbe G.

Il est intéressant de noter que ces courbes ne sont pas confondues, ce qui indique, comme nous l'avons déjà noté plus haut, que l'effet de  $N$  ne peut s'exprimer uniquement par le moyen du dénominateur  $\sqrt{N}$  dans la formule (5),  $G$  est aussi fonction de  $N$ , d'ailleurs croissante. Sauf pour les valeurs élevées de  $\Delta$ , pour lesquelles le faisceau des courbes se resserre, la convergence de  $\hat{\mu}$  vers  $\mu$  est moins rapide que selon une loi en  $N^{1/2}$ . Noter que la courbe de Dixon est située au-dessus des courbes calculées. La précision de  $\hat{\mu}$  est donc meilleure que celle indiquée précédemment par DIXON.

#### IV.4. Etude de la courbe H

De façon analogue à celle de  $\hat{\mu}$ , les précisions de  $S$  et de  $S_{val}$  peuvent être exprimées, à la manière de DIXON, par la formule :

$$\sigma_s = H\sigma/\sqrt{N} \quad (6)$$

en utilisant un facteur  $H_s$  pour  $S$  et  $H_{val}$  pour  $S_{val}$ . Ces facteurs  $H$  sont reportés sur les figures 8 et 9. Ici encore, le dénominateur  $\sqrt{N}$  ne suffit pas à exprimer l'effet de  $N$  sur  $\sigma_s$  et  $\sigma_{Sval}$  et l'accroissement de précision est moins rapide qu'en  $N^{1/2}$ . Pour  $\Delta \geq 1.4$   $\sigma_s$  et  $\sigma_{Sval}$  dépendent assez fortement de la position de l'échelonnement de  $x$ .

Quoique  $\sigma_{Sval}$  soit plus favorable que ne le laisse attendre la courbe de DIXON, il ne faut pas perdre de vue les résultats qui montrent que l'estimation de l'écart-type, qu'il s'agisse de  $S$  ou de  $S_{val}$ , est affectée d'une erreur systématique importante fonction de  $n$  et de  $\Delta$ . S'il est possible d'admettre l'introduction d'une correction en fonction de  $n$  —qui est connu— il n'en est pas de même pour  $\Delta$ , égal dans les applications pratiques de la méthode à  $d/\sigma$  (rapport de l'espacement des niveaux à l'écart-type vrai) et donc inconnu. De plus,  $S$  et  $S_{val}$  sont affectés de dispersions très importantes.

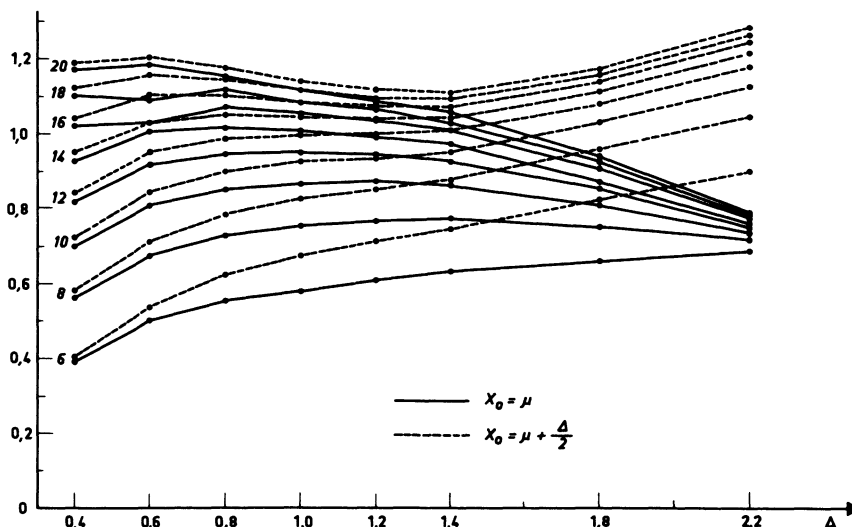


Figure 8. — Courbe H sans condition.

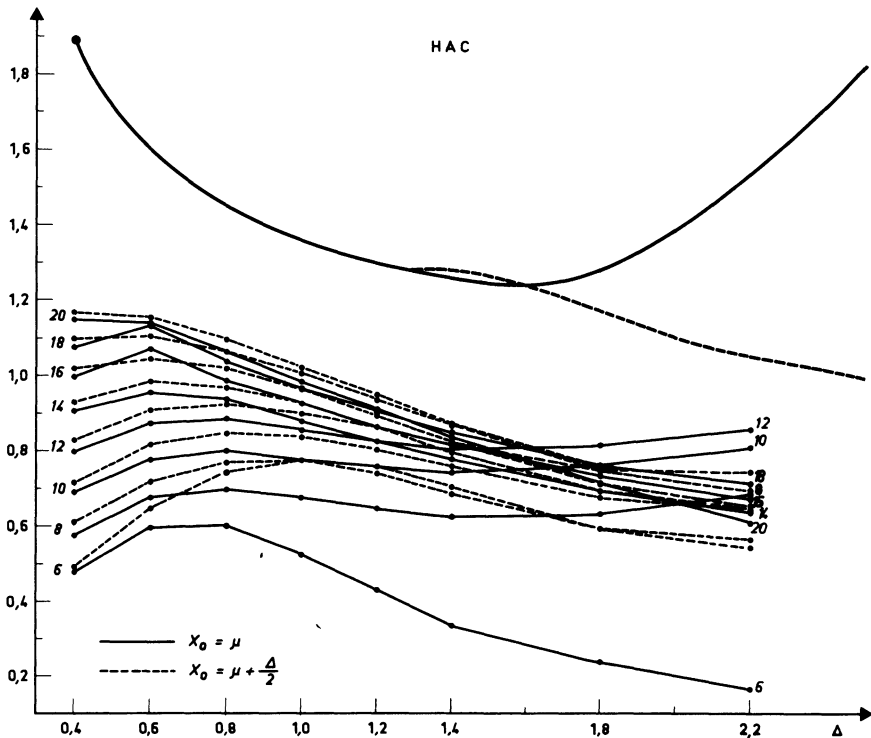


Figure 9. – Courbe H avec condition.

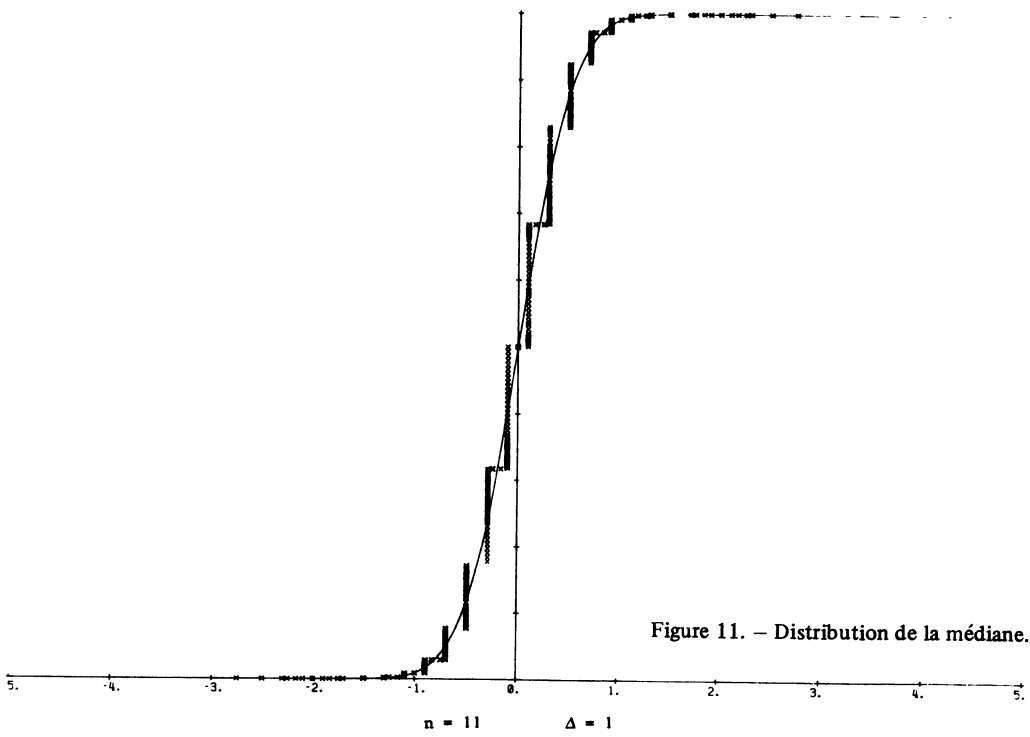
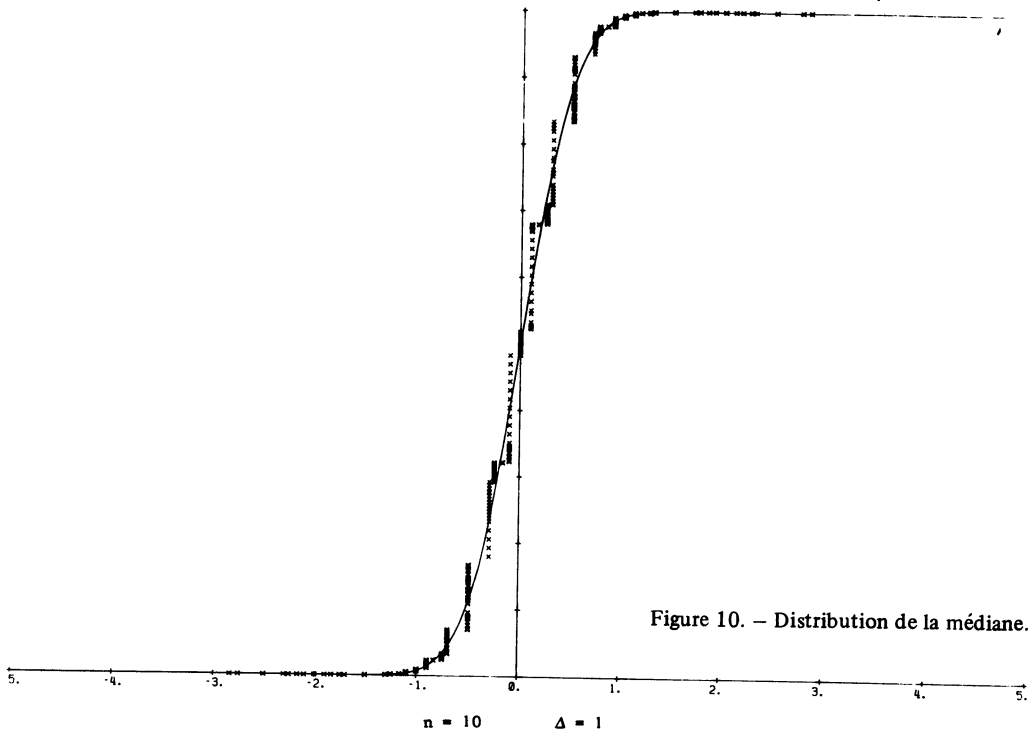
On peut donc en conclure que, du moins pour les valeurs du nombre d'essais  $n$  envisagées ici ( $5 \leq n \leq 20$ ), l'estimation de l'écart-type d'une courbe de réponse donnée par la méthode de l'escalier doit être considérée comme très peu satisfaisante, surtout si on tient compte du fait que sa dispersion commence d'abord par croître en fonction de  $n$  et ne décroît ensuite lentement que pour  $n \sim 10$  dans les cas les plus favorables.

## V. DISTRIBUTION DE L'ESTIMATION DE LA MEDIANE

La qualité de l'estimation  $Y$  de  $\mu$  n'est pas seulement fonction de son biais et de sa dispersion mais aussi de sa loi de distribution. Nous nous sommes limités à déterminer cette dernière pour  $n = 10$  et  $11$  à titre d'essai.

Les fonctions de répartition de  $Y$  correspondant à ces deux cas sont reportées point par point figures 10 et 11. La variable  $Y$  étant discrète (elle ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs), les fonctions de répartition sont discontinues. La courbe continue tracée sur chaque figure représente la fonction de répartition de la variable normale de même moyenne et de même écart-type que  $Y$ .

On voit que, les discontinuités mises à part, les fonctions de répartition de  $Y$  ne présentent pas d'anomalie notable par rapport à la courbe normale, notamment aux extrémités.





## VI. ETUDE DE L'ESTIMATION DE LA MEDIANE POUR DIFFERENTS POINTS DE DEPART DE LA METHODE

Dans le chapitre IV, nous avons étudié le comportement de la méthode de l'escalier dans l'hypothèse d'un point de départ  $x_0$  très voisin de la médiane  $\mu$  cherchée. Cette hypothèse nous plaçait dans d'excellentes conditions puisque l'essai de la première éprouvette se réalisant dans la zone cherchée, son résultat était entièrement pris en compte. Il n'en est malheureusement pas de même dans la réalité expérimentale puisqu'on a souvent, en pratique qu'une très vague idée de la valeur de  $\mu$ . Cette méconnaissance nous conduit alors au choix d'un point de départ qui peut être éloigné de la médiane réelle  $\mu$ , les premiers essais, ne servant qu'à ramener la dose dans la zone utile. L'information apportée par ces derniers sur la valeur de  $\mu$  est donc faible. Pour recréer ces conditions expérimentales courantes nous avons considéré trois points de départ graduellement éloignés de la médiane  $\mu$ . Le premier point est choisi à un écart-type  $\sigma$  de la médiane  $\mu$ , le second à  $2\sigma$  et le troisième à  $3\sigma$ . Nous ne nous sommes intéressés dans cette partie qu'à l'estimation de la médiane  $\mu$  et à sa précision. L'estimation de l'écart-type  $\sigma$  de la courbe de réponse ayant déjà été jugée peu satisfaisante dans les conditions les plus favorables d'emploi de la méthode de l'escalier.

### VI.1. Espérance mathématique de Y

L'erreur systématique  $E[Y]$  est reportée pour les trois points de départ, les huit espacements  $\Delta$  et des nombres d'éprouvettes  $n$  (pairs) de 6 à 20 sur la figure 12.

Pour les faibles valeurs du pas  $\Delta$  et du nombre d'éprouvettes  $n$  et pour les points de départ éloignés il n'est pas possible de fournir une estimation de  $E[Y]$  aucune configuration ne parvenant à encadrer la valeur de la médiane  $\mu$ .

Les valeurs  $E[Y]$  décroissent à mesure que  $n$  croît et que  $\Delta$  croît.

Il existe un décalage systématique du biais en fonction du point de départ, ce décalage diminuant en fonction de l'augmentation de  $n$ .

### VI.2. Ecart type de Y

Les résultats (pour  $n$  pair seulement) sont reportés dans la figure 13. En plus des trois points de départ considérés ici nous avons ajouté, à titre d'indication, les résultats obtenus au § IV lorsque le point de départ est situé sur la médiane. L'influence des différents paramètres  $\Delta$ ,  $n$  et  $x_0$  est globalement identique à celle trouvée précédemment pour  $E[Y]$ . La précision de l'estimation  $E[Y]$  croît à mesure que  $n$  et  $\Delta$  croissent. L'influence de la position du point de départ diminue lorsque  $n$  croît. Quelle que soit la valeur de  $\Delta$ , les différentes courbes convergent pour  $n = 19$  ou  $20$  vers des valeurs comprises entre 0.3 et 0.4.

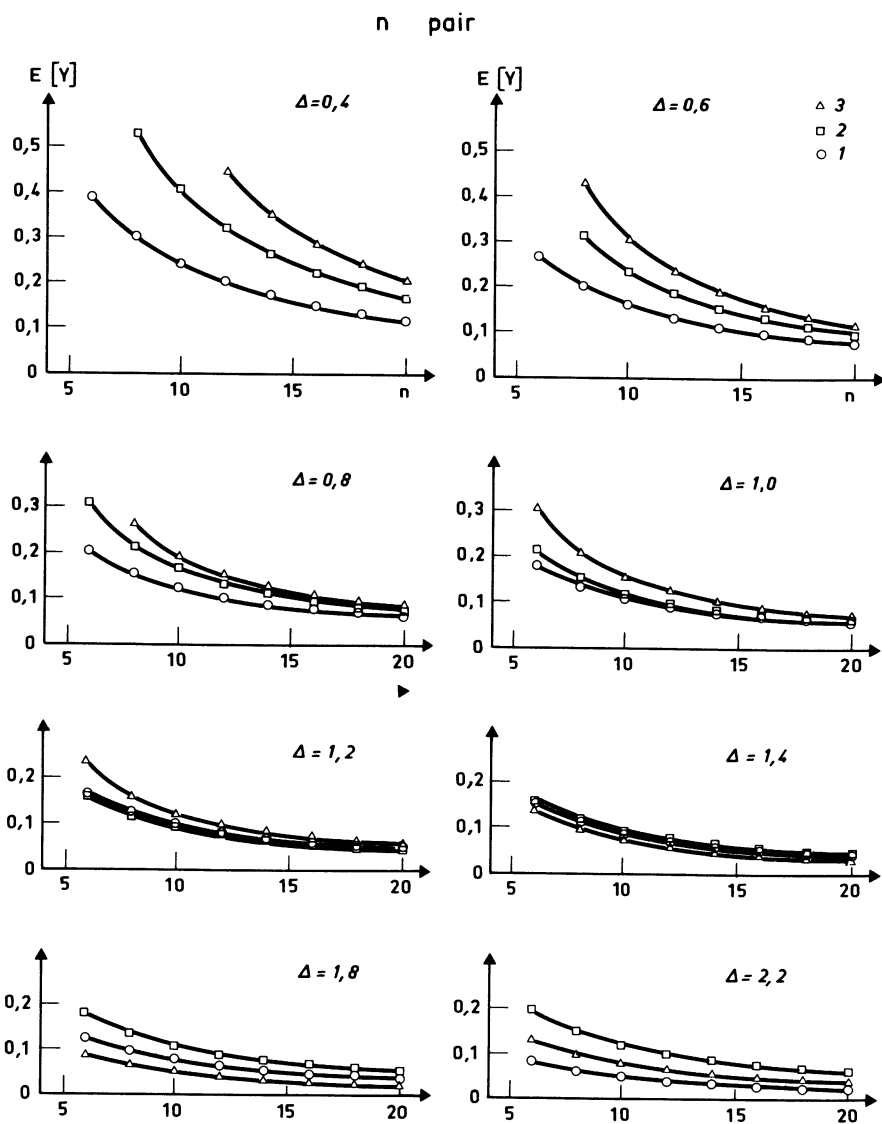


Figure 12. – Espérance mathématique de Y  $E[Y]$ , n pair.

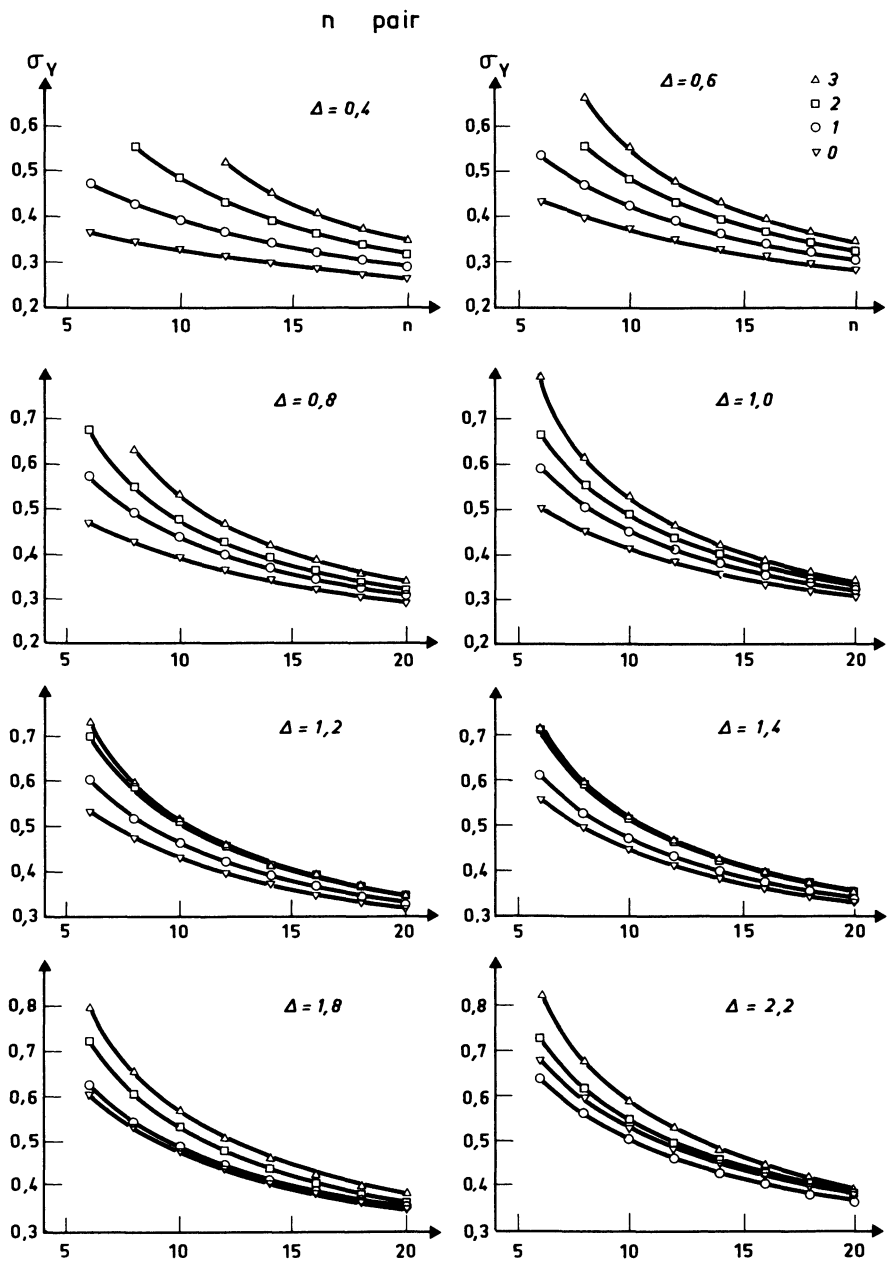


Figure 13. – Ecart-type de Y,  $\sigma_Y$ , n pair.

## VII. CONCLUSIONS

Le comportement de la méthode de DIXON et MOOD, dite de l'escalier, pour déterminer les paramètres d'une courbe de réponse sigmoïde normale a été établi de façon directe, par calcul, pour des nombres d'essais allant de 5 à 20.

Pour des échelonnements des doses variant de  $0.4 \sigma$  à  $2.2 \sigma$  et pour des doses initiales allant de 0 à  $3 \sigma$ , l'espérance mathématique et l'écart-type de l'estimation de  $\mu$  d'une part, la valeur moyenne et l'écart-type de l'estimation de l'écart-type  $\sigma$  de la courbe de réponse, d'autre part, ont été calculés.

En l'absence d'écart important au premier essai, on a également étudié l'influence de la position de l'échelle des doses.

Si l'estimation de la médiane est assez satisfaisante aussi bien du point de vue de son biais que de sa dispersion et de sa distribution, il n'en est pas de même de l'estimation de l'écart-type  $\sigma$  de la courbe de réponse qui est toujours très dispersée et, en général, très fortement biaisée.

Le comportement de l'estimation de l'écart-type ne paraît pouvoir être conforme à celui prévu par DIXON et MOOD que pour des nombres d'essais très largement supérieurs à 20, valeur maximale de  $n$  utilisée dans nos calculs.

## REFERENCES

- [1] W.J. DIXON, A.M. MOOD. — A method for obtaining and analyzing sensitivity data. *Journal of the American Statistical Association*, 43 (1948), 109.
- [2] François BASTENAIRE, Lionel REGNIER. — Etude des propriétés statistiques des estimations des paramètres d'une courbe de réponse obtenues par la méthode de l'escalier. *Rapport IRSID RE 813*, 1981.