Revue de statistique appliquée

J. de Reffye

Étude phénoménologique des précipitations pluvieuses. Modélisation mathématique des intensités de pluie en un point du sol

Revue de statistique appliquée, tome 30, n° 3 (1982), p. 39-63
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1982__30_3_39_0>

ETUDE PHENOMENOLOGIQUE DES PRECIPITATIONS PLUVIEUSES

MODELISATION MATHEMATIQUE DES INTENSITES DE PLUIE EN UN POINT DU SOL

J. DE REFFYE

THOMSON – CSF
DRS/STS/TA
1, rue des Mathurins, 92223 – Bagneux – Cedex.

RESUME

Cette étude est avant tout une analyse théorique des intensités de précipitation en un point du sol au moyen d'un modèle mathématique. Le but est de trouver la répartition statistique des précipitations pluvieuses au cours du temps, et non d'ajuster empiriquement une loi de probabilité sur une courbe expérimentale.

SUMMARY

This study is at first a rainfall intensity theorical analysis on the pound by means of a mathematical model. The purpose is to find statistical distribution of rainfall during the time, and no to fit a probability distribution on an experimental curve.

1. PRESENTATION DU PHENOMENE PHYSIQUE

1.1. Introduction

L'étude statistique de l'intensité de la pluie intéresse depuis longtemps les géophysiciens qui veulent comprendre les phénomènes naturels, mais aussi les ingénieurs des transmissions radioélectriques, car l'interaction des ondes hyperfréquences avec les gouttes de pluie provoque des affaiblissements de propagations notables, croissant avec l'intensité de précipitation et la fréquence de l'onde porteuse. Avec le développement des faisceaux hertziens et l'avènement des télécommunications spatiales par satellites, l'étude des lois des précipitations pluvieuses est donc très importante. Malheureusement on peut dire que ce problème n'est toujours pas résolu à l'heure actuelle, puisque l'on constate un désaccord au niveau international sur les lois proposées pour décrire le phénomène de pluie.

En effet, les physiciens américains, en particulier S.H. LIN [1], affirment, d'après leurs mesures, que l'intensité de la pluie suit une loi lognormale car, consta-

Mots-clés: **Calcul des probabilités – Statistique mathématique.**

tent-ils, cette loi s'ajuste bien pour les petites valeurs de l'intensité de la pluie, tandis que l'erreur sur les grandes valeurs de l'intensité de la pluie peut fort bien être mise sur le compte d'un biais dû à la mesure.

Au contraire les physiciens japonais, dont MM. MORITA et HIGUTI [2], proposent une loi gamma pour décrire la statistique de l'intensité des précipitations pluvieuses, car cette loi s'ajuste bien sur les valeurs expérimentales. Dernièrement, on a constaté au Canada (SEGAL [3]) que la fonction puissance inverse (loi de Pareto) caractérise bien les intensités moyennes de la pluie.

Or, à la suite d'une étude comparative sur des lois de répartition expérimentales de différents climats, M.L. BOITHIAS a constaté que la loi gamma s'ajuste bien pour les grandes valeurs de l'intensité de la pluie, mais qu'elle s'écarte de la distribution expérimentale dès que la valeur des précipitations descend en-desous d'un certain seuil. Par exemple, au Japon, le seuil est faible (une dizaine de mm/h), tandis qu'en France, il est de quelques dizaines de mm/h. D'autre part, on sait que, pour les très faibles valeurs de l'intensité de la pluie, les précipitations suivent une loi lognormale dont la moyenne se situe entre 0 et 2 mm/h, et que l'approximation lognormale peut être admise tant que la valeur des précipitations n'excède pas un certain seuil (de l'ordre de 50 mm/h).

Si bien que, dans l'état actuel des connaissances, il semble que les lois lognormale et gamma soient des *lois asymptotiques* (selon une remarque de M.L. BOITHIAS), qui approximent valablement et respectivement les petites et les grandes valeurs de la répartition statistique des précipitations pluvieuses.

Or, parallèlement, l'auteur travaille depuis 1978 sur la modélisation mathématique de certains phénomènes physiques aléatoires, et, en particulier, sur le comportement statistique de ces phénomènes quand le temps d'analyse devient infini [4]. Et on est amené à poser la définition suivante :

Soit X(t) la fonction aléatoire décrivant le phénomène étudié. Celui-ci admet une loi de probabilité stationnaire si l'on a :

$$\phi_{x(\infty)}(u) = \lim_{t \to \infty} \phi_{x(t)}(u)$$

où :

$$\phi_{x(t)}(u) = E\left(e^{iux(t)}\right)$$

(Rappelons que $\phi_{x(t)}(u)$ est la fonction caractéristique de la variable aléatoire X(t)).

Dans ces conditions, la transformée de Fourier inverse de $\phi_{x(\infty)}(u)$ définit la loi de probabilité stationnaire du processus aléatoire X(t).

En affinant la représentation générale des phénomènes aléatoires physiques modélisés par des processus ponctuels, pour tenir compte des principaux paramètres associés à l'évolution temporelle de la distribution des précipitations pluvieuses, on montre que la loi de probabilité stationnaire de la pluie au cours du temps de pluie suit une loi lognormale pour les faibles valeurs des précipitations, et qu'elle est distribuée selon une loi gamma pour les grandes valeurs des précipitations. Par construction ce modèle met en évidence deux systèmes nuageux associés à deux types de pluie :

– Un système de nuages stratifiés en couches multiples et répartis sur une grande surface, qui fournit les précipitations faibles et moyennes. Ce modèle regroupe essentiellement les pluies frontales : Nuages de type stratiforme et cumuliforme.

– Un système de nuages isolés, non recouvrants, qui fournit les pluies fortes et moyennes. Sa projection sur le sol est composée "d'aires de pluie" séparées les unes des autres, chacune d'elles représentant une "cellule de pluie". Il est produit principalement par les phénomènes convectifs, qui engendrent surtout des nuages du type Cumulus Congestus et Cumulo-nimbus.

Bien entendu, ces deux concepts ne sont pas, en général, aussi nettement distingués dans la réalité des phénomènes physiques: on passe insensiblement de l'un à l'autre quand le taux des précipitations augmente. D'autre part, certains climats favorisent tel système plutôt que tel autre car les stratifications engendrent des fluctuations qui rendent la loi de probabilité de l'intensité de la pluie lognormale, tandis que des nuages qui fournissent des pluies régulières favorisent le caractère "loi gamma" de la répartition statistique des précipitations pluvieuses.

1.2. Description du phénomène physique mesuré en un point du sol

Nous allons maintenant nous placer en un point déterminé de la surface terrestre et observer l'évolution de l'état du ciel. Celui-ci varie constamment et sa teneur en nuages est graduée en huitièmes: L'état 0/8 définit le ciel bleu et l'état 8/8 définit le ciel entièrement couvert de nuages. Pourtant, le fait d'avoir un ciel contenant des nuages – même entièrement couvert de nuages – ne signifie pas nécessairement qu'il pleut. Par contre, il est nécessaire d'avoir des nuages pour espérer observer des précipitations. Dans l'hypothèse où l'on constate qu'il pleut les précipitations ne sont jamais continues au cours du temps. "Il va pleuvoir" et "Il va s'arrêter de pleuvoir" sont des expressions du langage courant qui nous montrent bien que la pluie est un phénomène discontinu. Cette description alternative des phénomènes permet alors de définir la variable indicatrice W_o du phénomène "pluie", définie par:

$$W_o\,(\text{pluie}) = 1_{(\text{pluie})} = 1 \quad \text{quand il pleut}$$
$$= 0 \quad \text{quand il ne pleut pas}$$

La représentation temporelle définit un processus aléatoire $X(t, \omega)$ à deux états 0 et 1, dont une trajectoire est représentée par la figure suivante, l'état 1 étant défini par l'existence de précipitations pluvieuses.

Bien entendu, dans la réalité, le temps de pluie est très faible par rapport au temps total, si bien que la pluie peut être considérée comme un événement rare. A titre d'exemple, pour la France, le rapport entre le temps de pluie et le temps total est de l'ordre de 5.10^{-2} (ce rapport est généralement compris entre 10^{-2} et 10^{-1}),

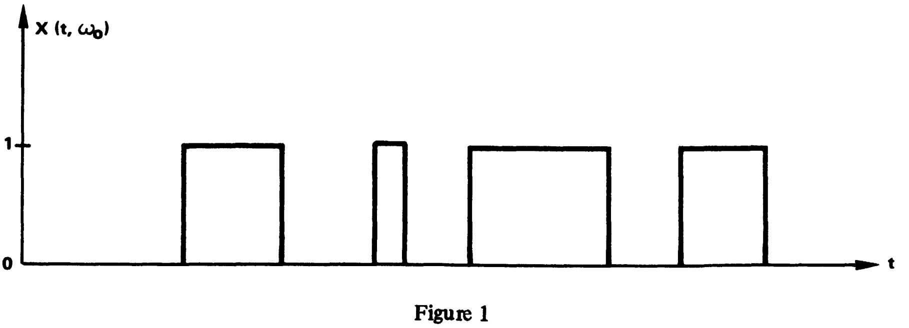


Figure 1

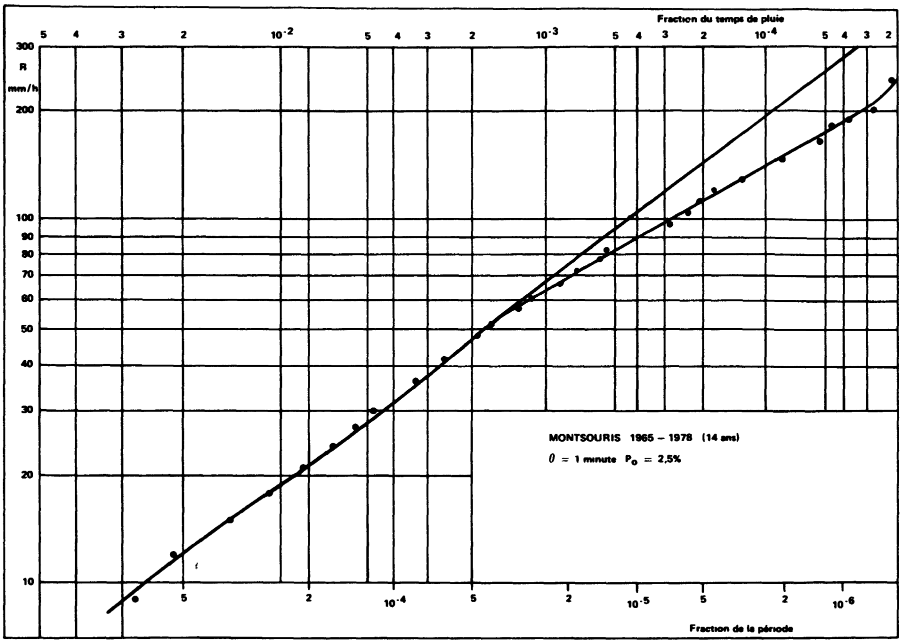


Figure 2. – Répartition de la pluie à Paris-Montsouris.

et nous dirons que la probabilité stationnaire qu'il pleuve, en France, est de 5.10^{-2}. On a donc pris l'habitude, en général, de ne considérer que le temps de pluie, et les graphiques décrivant la loi de répartition ont, par conséquent, leurs probabilités définies relativement au temps de pluie. (On a divisé les probabilités mesurées par la probabilité P_0 qu'il pleuve).

De plus, par convention, on trace la loi de probabilité cumulée inverse. A titre d'exemple, la figure 2 nous montre la répartition statistique de l'intensité de la pluie mesurée à la station météorologique de Montsouris (Paris) pendant 14 ans. On pourra remarquer que la probabilité P_0 est, ici, de $2{,}5.10^{-2}$.

En divisant les probabilités mesurées par la probabilité qu'il pleuve, on introduit le conditionnement par le fait qu'il pleuve, et ceci va influencer surtout la loi des faibles pluies. En effet, dans ces conditions, quand la valeur de précipitation tend vers zéro, le phénomène, conditionné, doit tendre vers un phénomène continu.

On pourra remarquer également que le conditionnement par le temps effectif de pluie ne permet plus de suivre l'événement au cours du temps réel. On s'intéresse à la réalisation d'un ou de plusieurs phénomènes durant un certain temps et, dans ces conditions, t représente une durée et non un temps.

1.3. Analyse des fluctuations de l'intensité de pluie pendant des précipitations pluvieuses en un point du sol.

Il est bien connu que l'intensité des précipitations varie constamment au cours du temps de pluie. Il peut même pleuvoir par intermittences, si bien que l'on est amené à définir la notion d'événement de pluie. Pour cela, nous allons formuler quelques hypothèses sur la physique des phénomènes étudiés. Ces hypothèses ne seront pas justifiées expérimentalement, mais elles sont admissibles pour deux raisons: d'abord les résultats du modèle mathématique ainsi élaboré sont tout à fait sensés physiquement, et, d'autre part, ces hypothèses ne sont ni infirmées, ni confirmées dans l'état actuel des connaissances géophysiques.

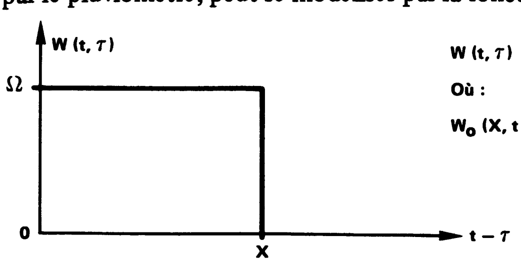
Nous supposerons que la pluie est produite d'une façon discontinue, en ce sens que, si l'on considère un certain nuage produisant des précipitations, celles-ci n'occupent qu'une partie du volume du nuage. Nous admettrons donc que les phases de production d'eau et de précipitation des gouttes d'eau vers le sol sont successives. Le nuage génère des gouttes d'eau qui tombent ensuite sous forme de précipitations. Puis il génère d'autres gouttes d'eau qui forment d'autres précipitations, et ainsi de suite jusqu'au moment où le nuage dégénère. Bien entendu, les deux phénomènes de production et de précipitation peuvent se chevaucher. Ceci représente une explication très rudimentaire du phénomène réel, mais suffisante pour le modéliser.

Nous appellerons événement élémentaire de pluie, l'effet au point de mesure de la précipitation des gouttes d'eau issues d'un nuage pendant une phase de précipitation. Les nuages pouvant se chevaucher, un événement élémentaire de pluie peut se réaliser sans que le précédent événement élémentaire soit fini. On peut donc très bien avoir un phénomène continu au niveau du sol, alors que ce phénomène est constitué par l'arrivée successive d'événements élémentaires.

Toutefois, on constate, au niveau du sol, l'absence ou la présence de pluie. C'est pourquoi nous dirons qu'il s'est produit un événement de pluie, s'il a plu sans interruption pendant un certain intervalle de temps. Durant la réalisation d'un événement de pluie, on constate donc un phénomène continu au niveau du sol, alors qu'il est constitué par un processus régénératif d'événements élémentaires.

Nous allons maintenant étudier plus précisément un événement élémentaire de pluie. Nous savons qu'il est constitué de gouttes d'eau. Pendant l'intervalle de temps (t_0, t_1) considéré, on compte les gouttes d'eau au cours du temps, et la hauteur d'eau recueillie dans le cylindre de mesure est une fonction en escalier du temps: chaque saut correspond à l'arrivée d'une goutte d'eau de l'événement élémentaire considéré, et la hauteur du saut est égale au volume d'eau de cette goutte divisé par la surface captatrice du cylindre de mesure, cette hauteur étant une variable essentiellement aléatoire. Chaque palier correspond au temps inter-arrivées entre deux gouttes d'eau. Si nous dérivons cette fonction au sens des distributions, on obtient une somme de distributions de Dirac, ce qui est assez gênant au point de vue physique. En réalité, les appareils de mesure de l'intensité de la pluie, appelés pluviomètres effectuent un lissage dû à l'étalement de la goutte d'eau sur le cône, du pluviomètre, ce qui peut être considéré comme la "fonction de réponse" de l'appareil de mesure à l'impulsion dûe à la goutte de pluie.

Ainsi, la distribution de Dirac correspondant à une goutte de pluie et "filtrée" par le pluviomètre, peut se modéliser par la fonction aléatoire :



$$W(t,\tau) = \Omega \, . \, W_0(X, t-\tau)$$

Où :

$$\begin{aligned} W_0(X, t-\tau) &= 1 \ ; \ 0 \leqslant t-\tau \leqslant X \\ &= 0 \ ; \ \{t < \tau\} \cup \{t-\tau > X\} \end{aligned}$$

où τ est l'instant d'arrivée de la goutte d'eau considérée et où Ω et X sont des variables aléatoires dont on explicitera la loi de probabilité. D'autre part, la surface du rectangle ainsi défini correspond au volume d'eau fourni par la goutte considérée, divisé par la surface de captation de l'appareil de mesure.

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour décrire le phénomène de pluie et construire un modèle mathématique associé.

2. MODELISATION MATHEMATIQUE DE L'INTENSITE DES PRECIPITATIONS PLUVIEUSES MESUREES EN UN POINT DE LA SURFACE TERRESTRE

2.1. Introduction à la modélisation de certains phénomènes physiques discontinus

La représentation de certains signaux aléatoires nous a amenés à étudier la modélisation mathématique des phénomènes aléatoires basés sur un processus ponctuel [5]. En effet, on pourra remarquer que beaucoup de phénomènes physiques sont engendrés par une succession de causes élémentaires dont l'arrivée peut être représentée par un processus de comptage.

Comme exemples de tels phénomènes, on peut citer les parasites d'origine électromagnétiques, les échos multiples dans la détection de cibles par Radar, les bruits radioastronomiques, les bruits industriels, des phénomènes de file d'attente et certains systèmes. Si l'on représente par N(t) le processus de comptage, l'état n de ce processus représente l'arrivée successive de n phénomènes aléatoires, en supposant que deux phénomènes élémentaires ne puissent pas arriver simultanément.

Le $n^{\text{ième}}$ phénomène élémentaire sera décrit par la fonction aléatoire

$$Z_n(t, \tau_n, Y_n)$$

où :

* t représente le temps;

* τ_n représente l'instant d'arrivée de ce phénomène;

* Y_n représente un ou plusieurs paramètres, aléatoires ou non.

Le phénomène général est alors représenté par la fonction aléatoire R(t) suivante :

$$R(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} Z_n(t, \tau_n, Y_n)$$

Le cas le plus simple est celui où N(t) est poissonien. Malheureusement, ce cas n'est pas suffisant pour décrire l'intensité des précipitations pluvieuses au cours du temps; le modèle mathématique devra être plus élaboré et R(t) représentera, dans la suite, l'évolution de l'intensité de la pluie au cours du temps.

2.2. Etude de l'arrivée des événements élémentaires de pluie

Il est, en effet, peu probable que l'arrivée des événements élémentaires de pluie suive un processus de Poisson, puisqu'elle est la composition de plusieurs processus différents. Si l'on veut rendre compte de la réalité des phénomènes, il nous faut considérer, d'après ce qui précède, trois niveaux d'arrivée :

1) L'arrivée des systèmes nuageux, qui conditionne l'apparition de la pluie.

2) L'arrivée des événements de pluie.

3) L'arrivée des événements élémentaires de pluie, pendant la réalisation d'un événement de pluie.

Ainsi, le processus d'arrivée des événements de pluie est conditionné par la présence d'un système nuageux, et l'arrivée des événements élémentaires de pluie est conditionnée par la réalisation d'un événement de pluie.

Nous supposerons que l'hypothèse suivante est réalisée :

Hypothèse

Soit $N_1(t)$ le processus de comptage de l'arrivée des systèmes nuageux.

Soit $N_2(t)$ le processus de comptage de l'arrivée des événements de pluie, quand on est en présence de systèmes nuageux,

et soit $N_3(t)$ le processus de comptage des événements élémentaires de pluie, quand on est en présence d'un événement de pluie.

Alors $N_1(t)$, $N_2(t)$ et $N_3(t)$ sont des processus de Poisson homogènes de paramètres respectifs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

2.3. Modélisation d'un événement élémentaire de pluie et d'un événement de pluie

Un événement élémentaire de pluie est donc constitué par l'arrivée de gouttes d'eau "filtrées" par le pluviomètre. L'arrivée de ces gouttes ne serait poissonienne que si la surface de captation de l'appareil était suffisamment petite pour que deux gouttes ne puissent pas arriver simultanément. Or la sensibilité de cet appareil dépend évidemment de cette surface. C'est pourquoi nous supposons que l'arrivée des gouttes s'effectue par grappes, ou paquets de la façon suivante :

Nous supposerons que les gouttes d'eau peuvent s'agglomérer ou se diviser pour former soit des gouttes plus grosses soit des gouttes plus petites. On observe d'ailleurs ce genre de phénomène durant la chute des gouttes d'eau. On admettra que ce phénomène de division et d'agglomération engendre une partition dans la classification des gouttes d'eau. Si ce phénomène n'existait pas, un événement élémentaire de pluie se représenterait par la fonction aléatoire suivante :

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \Omega_i \,.\, W_o(X_i, t - \tau_i)$$

Si le phénomène de partition n'avait que deux états, la fonction aléatoire $Z(t)$ se mettrait sous la forme :

$$Z(t) = \sum_{i_1=1}^{\mathcal{N}_1(t)} \Omega_{i_1} \,.\, W_o(X_{i_1}, t - \tau_{i_1}) \sum_{i_2=1}^{\mathcal{N}_2(t-\tau_{i_1})} \Omega_{i_2} \,.\, W_o(X_{i_2}, t - \tau_{i_2})$$

Comme nous n'avons aucune connaissance préalable sur le nombre de classes constituant la partition décrite ci-dessus, nous supposerons que ce nombre suit un processus aléatoire M(t), si bien que la représentation la plus générale d'un événement élémentaire de pluie est la suivante :

$$Z(t) = \sum_{i_1=1}^{i_1=\mathcal{N}_1(t)} \Omega_{i_1} . W_o(X_{i_1}, t-\tau_{i_1}) \ldots \sum_{i_{M(t)}=1}^{i_{M(t)}=\mathcal{N}_{M(t)}(t-\tau_{i_1}\ldots-\tau_{i_{M(t)-1}})} \ldots$$

$$\ldots \quad \Omega_{i_{M(t)}} . W_o(X_{i_{M(t)}}, t-\tau_{i_1} \ldots - \tau_{i_{M(t)}})$$

où les variables aléatoires Ω_{im} dépendent, a priori, de l'état du processus M(t) :

$$\Omega_{im} = \Omega_{im}(M(t))$$

Et nous supposerons que :

$$\Omega_{im} = \sqrt[M(t)]{\omega} . \overline{\omega}_{im} = \omega^{M^{-1}(t)} . \overline{\omega}_{im}$$

telles que l'on puisse poser :

$$Z(t) = \omega z(t)$$

où z(t) est par construction, pour tout t fixé, une variable aléatoire de moyenne 1.

Et nous admettrons l'hypothèse suivante :

Les différents niveaux de fluctuation correspondant aux différentes classes de la partition de l'ensemble des gouttes d'eau, constituent des événements indépendants et identiquement distribués.

La fonction aléatoire Z(t) d'un événement élémentaire s'écrit alors :

$$Z(t) = \omega \cdot \sum_{i_1=1}^{i_1=\mathcal{N}_1(t)} \overline{\omega}_{i_1} . W_o(X_{i_1}, t-\tau_{i_1}) \ldots \sum_{i_{M(t)}=1}^{i_{M(t)}=\mathcal{N}_{M(t)}(t)} \ldots,$$

$$\ldots \quad \overline{\omega}_{i_{M(t)}} . W_o(X_{i_{M(t)}}, t-\tau_{i_{M(t)}})$$

$$Z(t) = \omega \prod_{m=1}^{M(t)} \sum_{i_m=1}^{\mathcal{N}_m(t)} \overline{\omega}_{i_m} . W_o(X_{i_m}, t-\tau_{i_m})) \tag{1}$$

D'autre part nous supposerons que M(t) est un processus de naissance-mort, qui est un processus aléatoire à états discrets et temps continu, et défini par les probabilités de transition infinitésimales suivantes (7 – tome I) :

$$\begin{aligned} P_{ij}(t, t+h) &= \mathbf{P}(M(t+h) = j/M(t) = i) \\ &= 0 \quad |i-j| \geqslant 2 \\ &= \lambda_i . h + 0(h) \; ; \; j = i+1 \\ &= \mu_i . h + 0(h) \; ; \; j = i-1 \\ &= 1 - (\lambda_i + \mu_i) . h + 0(h) \; ; \; j = i \end{aligned} \qquad \left.\frac{0(h)}{h}\right|_{h\to 0} \to 0$$

Et nous supposerons que :

$$\lambda_i = \lambda$$

$$\mu_i = i \, . \, \nu$$

M(t) est alors un processus d'immigration-mort, et ce cas correspond à des niveaux de fluctuation indépendants.

Nous ne considérerons plus, dans ce qui suit, que le temps effectif de pluie. Par conséquent, on supposera toujours qu'on est en présence de systèmes nuageux. En conséquence, n'interviennent que les processus $N_2(t)$ et $N_3(t)$ dans la modélisation de l'intensité de la pluie durant le temps effectif de pluie. Soit $W_o(x, t - \tau)$ la variable indicatrice de durée d'un événement élémentaire de pluie. Un *événement de pluie* est donc représenté par la fonction aléatoire :

$$\mathfrak{Z}(t) = \sum_{j=1}^{N_3(t)} \omega_j z_j (t - \tau_j) \, . \, W_o (\mathcal{X}_j, t - \tau_j) \tag{2}$$

Et nous poserons :

$$\mathfrak{Z}(t) = A_o \, . \, \mu \, . \, y(t)$$

où y(t) est une fonction aléatoire telle que :

$$y(t) = \sum_{j=1}^{N_3(t)} \omega_{j_o} z_j (t - \tau_j) \, . \, W_o (x_j, t - \tau_j) \; ; \mathbf{E}(y(t)) = 1$$

A_o étant une constante et M une variable aléatoire.

L'intensité de la pluie au cours du temps effectif de pluie est donc représentée par la fonction aléatoire R(t) suivante :

$$R(t) = \sum_{i=0}^{N_2(t)} W_o (Y_i, t - \tau_i) \, . \, \mathfrak{Z}_i (t - \tau_i)$$

où $W_o (Y_i, t - \tau_i)$ est la variable indicatrice de durée d'un évènement de pluie.

Nous effectuons le changement d'indice suivant :

$$N_2(t) \to N_1(t)$$
$$N_3(t) \to N_2(t)$$

On obtient donc :

$$R(t) = \sum_{i=0}^{N_1(t)} A_o \mu_i W_o (Y_i, t - \tau_i) \, . \, y_i (t - \tau_i) \tag{3}$$

On supposera les hypothèses suivantes réalisées :

1) Les fonctions aléatoires $y_i(t - \tau_i)$ sont la réalisation d'une même fonction aléatoire $y(t - \tau_i)$ et l'activité des événements de pluie ne dépend pas de leur durée d'activité.

$$y_i(t - \tau_i) = y(t - \tau_i) = y(t)$$

La fonction aléatoire R(t) s'écrit donc :

$$R(t) = y(t) \sum_{i=0}^{N_1(t)} A_o \mu_i W_o (Y_i, t - \tau_i) \tag{4}$$

ou :
$$y(t) = \sum_{j=1}^{N_2(t)} \omega_{j_o} z_j (t - \tau_j) . W_o (X_j, t - \tau_j)$$

2) Les fonctions aléatoires $z_j(t - \tau_j)$ sont la réalisation d'une même fonction aléatoire $z(t - \tau_j)$ et l'activité des événements élémentaires de pluie ne dépend pas de leur durée d'activité.

$$z_j(t - \tau_j) = z(t - \tau_j) = z(t)$$

Et la fonction aléatoire y(t) s'écrit :

$$y(t) = z(t) \sum_{j=1}^{N_2(t)} \omega_{j_o} . W_o (X_j, t - \tau_j) \tag{5}$$

3) Les fonctions aléatoires :

$$\sum_{i_m=1}^{\mathcal{N}_m(t)} \bar{\omega}_{i_m} . W_o (X_{i_m}, t - \tau_{i_m})$$

sont identiquement distribuées et indépendantes par rapport à la fonction aléatoire :

$$\sum_{j=1}^{N_2(t)} \omega_{j_o} . W_o (X_j, t - \tau_j)$$

On identifie donc la réalisation d'un événement élémentaire de pluie et la réalisation des différentes classes de gouttes d'eau, ou, si l'on veut, un événement élémentaire de pluie est admis comme produisant des gouttes d'eau de taille homogène. On suppose, de plus, que les processus aléatoires $\{\mathcal{N}_m(t)\}_{m \geqslant 1}$ admettent la même loi temporelle que le processus aléatoire $N_2(t)$.

Dans ces conditions, la fonction aléatoire y(t) s'écrit, d'après (0), (1), (5) :

$$y(t) = \prod_{m=0}^{M(t)} \left(\sum_{i_m=1}^{N_2(t)} \bar{\omega}_{i_m} . W_o (X_{i_m}, t - \tau_{i_m}) \right)$$

Un événement de pluie est toujours défini comme la réalisation continue de précipitations pluvieuses. Toutefois, il faut noter que les événements de pluie peuvent se chevaucher dans le temps, et que le passage d'un événement de pluie à un autre événement de pluie est caractérisé par la variation de l'intensité moyenne de la pluie durant sa réalisation. Chaque événement de pluie est donc défini comme la durée maximum d'une réalisation continue du phénomène de pluie pendant laquelle l'intensité de la pluie peut se décomposer en sa valeur moyenne durant la réalisation de l'événement de plus multipliée par le produit d'un nombre aléatoire de fluctuations élémentaires.

Et en ne considérant que le temps effectif de pluie, le processus aléatoire R(t) modélisant l'intensité de la pluie pendant le temps effectif de pluie se factorise d'après (4), (6) : sous la forme suivante :

$$R(t) = R_1(t) \, . \, R_2(t)$$

où :

$$R_1(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} A_o \mu_i W_o(Y_i, t - \tau_i) \tag{7}$$

$$R_2(t) = y(t) = \prod_{m=0}^{M(t)} R_{2_m}(t)$$

avec :

$$R_{2_m}(t) = \sum_{i_m=1}^{N_2(t)} \overline{\omega}_{i_m} W_o(X_{i_m}, t - \tau_{i_m})$$

$$E(R_{2_m}(t)) = 1 \quad ; \quad \forall m \geqslant 1$$

Le processus $R_1(t)$ est le processus d'arrivée des événements de pluie. Durant la réalisation d'un événement de pluie, il garde une valeur constante (égale à $A_o \mu_i$ pour le $i^{ème}$ événement de pluie) qui définit la valeur moyenne des précipitations pendant la réalisation de cet événement. Ce processus suit donc la variation de la valeur moyenne de l'intensité de la pluie fournie par les événements de pluie, d'un événement à l'autre. Par définition, nous appellerons "valeur moyenne" de l'intensité de la pluie, le processus $R_1(t)$.

Au contraire, le processus $R_2(t)$, indépendant par construction du processus $R_1(t)$, définit les fluctuations (multiplicatives) de l'intensité de la pluie pendant la réalisation de chaque événement de pluie, puisque sa valeur moyenne est égale à 1. Nous appellerons "fluctuations" de l'intensité de la pluie, le processus $R_2(t)$.

Nous allons étudier la loi de probabilité stationnaire de la "valeur moyenne" de l'intensité de la pluie et celle de ses "fluctuations".

3. LOI STATIONNAIRE DE LA "VALEUR MOYENNE" ET DES "FLUCTUATIONS" DE L'INTENSITE DE LA PLUIE

Nous supposons, par hypothèse, que les variables aléatoires Y_i suivent une loi Γ_1, de paramètre μ_i

$$i \geqslant 1 : P(Y_i \geqslant t - \tau_i) = e^{-\mu_i(t-\tau_i)} \quad ; \quad t \geqslant \tau_i \tag{8}$$

en étant indépendantes.

De même, les variables aléatoires μ_i sont supposées indépendantes et identiquement distribuées selon une loi Γ_1 de paramètre α :

$$\forall i \geqslant 1 : \mathrm{P}(\mu_i \geqslant \mu_o) = e^{-\alpha\mu_o} \quad \mu_o \geqslant 0 \ ; \alpha > 0$$

Par construction, chaque événement de pluie a une valeur moyenne constante, égale à A_o.

En supposant que $N_1(t)$ est un processus de Poisson de paramètre λ_1, la fonction caractéristique asymptotique de $R_1(t)$ est égale à:

$$\Phi_{R_1(\infty)}(u) = \left[\frac{\left(\frac{\alpha}{A_o}\right)}{\frac{\alpha}{A_o} - iu}\right]^{\lambda_1 \alpha} \tag{9}$$

et l'on obtient, pour la fonction caractéristique asymptotique du logarithme de $R_1(t)$:

$$\Phi_{\log R_1(\infty)}(u) = \left(\frac{A_o}{\alpha}\right)^{iu} \left.\frac{\Gamma(\lambda_1 \alpha + iu)}{\Gamma(\lambda_1 \alpha)}\right|_{\alpha \to \infty} \rightarrow e^{iu \operatorname{Log} \lambda_1 A_o} \tag{10}$$

La loi stationnaire de la "valeur moyenne" de l'intensité de la pluie est une loi gamma, de paramètres α/A_o et $\lambda_1 \alpha$. L'espérance de R_1 est égale à:

$$\mathrm{E}(R_1) = \lambda_1 A_o$$

La valeur moyenne vraie de l'intensité de la pluie au cours du temps est égale à la valeur moyenne de la quantité d'eau fournie par un événement de pluie, A_o, divisée par le temps moyen qui sépare l'arrivée de deux événements de pluis successifs, λ_1^{-1}.

D'autre part, la variance de R_1 est égale à:

$$\operatorname{var}(R_1) = \lambda_1 A_o \cdot A_o/\alpha$$

Elle est obtenue par la valeur moyenne vraie de l'intensité de la pluie au cours du temps total multipliée par la valeur moyenne vraie de l'intensité de la pluie.

La loi des "fluctuations" de l'intensité des précipitations est obtenue par une transformation logarithmique:

$$\operatorname{Log} R_2(t) = \sum_{m=0}^{M(t)} \operatorname{Log} R_{2_m}(t)$$

avec:

$$R_{2_m}(t) = \sum_{i_m=1}^{N_2(t)} \overline{\omega}_{i_m} \cdot W_o(X_{i_m}, t - \tau_{i_m})$$

On pose:

$$\omega_{i_m} = \frac{\mu_{i_m}}{\lambda_2}$$

car $\mathrm{E}(R_{2_m}(t)) = 1$, et on suppose que les fonctions aléatoires $R_{2_m}(t)$ sont indépendantes et identiquement distribuées avec:

$$\mathrm{P}(X_{i_m} \geqslant t - \tau_{i_m}) = e^{-\mu_{i_m}(t-\tau_{i_m})} \ ; \ t \geqslant \tau_{i_m} \tag{11}$$

où μ_{i_m} est une variable aléatoire qui suit une loi Γ_1, de paramètre β, de densité de probabilité :

$$P(\mu_{i_m}) = \beta e^{-\beta \mu_{i_m}} \; ; \; \forall i_m \in N \; ; \; \forall m \in N \tag{12}$$

Rappelons que M(t) est un processus d'Immigration – mort de paramètres λ et ν, et que $N_2(t)$ est un processus de Poisson de paramètre λ_2, M(t) et $N_2(t)$ étant des processus aléatoires indépendants entre eux et indépendants des fonctions aléatoires $R_{2_m}(t)$.

En supposant, de plus, que les "fluctuations" de l'intensité de la pluie sont factorisées sous la forme du produit d'un nombre infini de fluctuations élémentaires, la fonction aléatoire Log $R_2(t)$ admet comme fonction caractéristique asymptotique :

$$\lim_{\lambda = \lambda_2 \to \infty} \Phi_{\mathrm{Log}\, R_2(\infty)}(u) = e^{-\frac{u^2}{2\nu\beta}} \tag{13}$$

La loi de probabilité stationnaire limite est une loi lognormale dont la loi normale associée est centrée et de variance $1/\nu\beta$.

4. LOIS DE PROBABILITE RESPECTIVES DES PETITES PRECIPITATIONS ET DES GROSSES PRECIPITATIONS

Nous allons étudier la loi des précipitations du logarithme de l'intensité de la pluie, car l'on a la somme de deux variables indépendantes :

$$\mathrm{Log}\, R(t) = \mathrm{Log}\, R_1(t) + \mathrm{Log}\, R_2(t)$$

On en déduit la loi stationnaire de R(t) par changement de variable.

On obtient, tous calculs effectués, la loi stationnaire de Log R(t) sous la forme de la densité de probabilité suivante :

$$p_{\mathrm{Log}\, R}(y) = \frac{\sqrt{\frac{\nu\beta}{2\pi}} \cdot \left(\frac{\alpha}{A_o}\right)^{\lambda_1 \alpha}}{\Gamma(\lambda_1 \alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\nu\beta}{2}(y-x)^2} \, e^{\lambda_1 \alpha x} \, e^{-\frac{\alpha}{A_o} e^x} \, dx \tag{14}$$

Cette formule est peu commode à utiliser. C'est pourquoi nous allons étudier les lois asymptotiques de l'intensité de la pluie pour les petites précipitations et pour les grosses précipitations.

Pour les faibles précipitations, la loi de probabilité de la "valeur moyenne" de la pluie tend vers sa valeur moyenne, et l'on obtient :

$$\lim_{\alpha^{-1} \to 0} \Phi_{\mathrm{Log}\, R}(u) = e^{iu\, \mathrm{Log}\, \lambda_1 A_o} \, e^{-\frac{u^2}{2\nu\beta}} \tag{15}$$

Par conséquent, l'intensité de la pluie suit alors une loi lognormale, dont les deux premiers moments sont égaux à :

$$E(R) = \lambda_1 A_o e^{\frac{1}{2\nu\beta}}$$

$$\sigma(R) = \sqrt{\mathrm{var}(R)} = \lambda_1 A_o \sqrt{e^{\frac{1}{\nu\beta}} (e^{\frac{1}{\nu\beta}} - 1)}$$

Au contraire, pour les grosses précipitations, la durée de vie $1/\nu$ des événements de pluie tend vers zéro, si bien que les "fluctuations" de l'intensité de la pluie s'estompent. Celle-ci suit alors une loi gamma dont les paramètres sont ceux de la loi de probabilité de la "valeur moyenne" de l'intensité de la pluie au cours du temps.

$$E(R) = \lambda_1 A_o$$

$$\sigma(R) = \sqrt{\mathrm{var}(R)} = A_o \sqrt{\frac{\lambda_1}{\alpha}}$$

5. CONSEQUENCES DU MODELE PROPOSE SUR LA FORME DES SYSTEMES NUAGEUX

Si l'on admet que les précipitations fournies par un nuage sont une fonction croissante de l'épaisseur de ce nuage, et si l'on admet que la durée d'un événement de pluie est une fonction croissante des dimensions horizontales du nuage, alors:

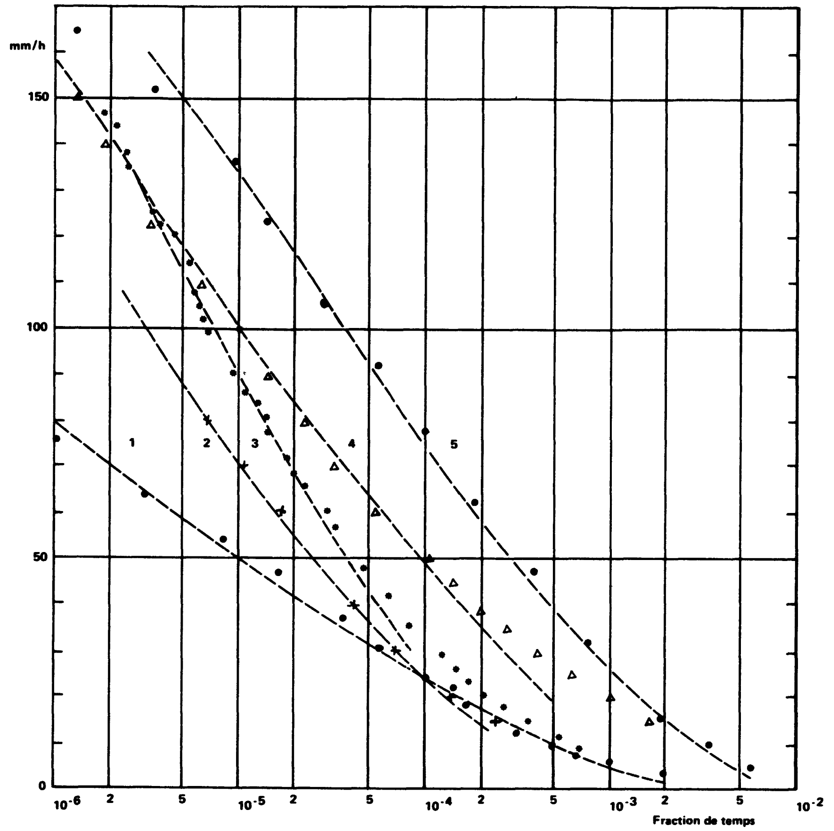
– Les nuages fournissant les petites pluies sont très étendus dans leur longueur et leur largeur, mais chaque nuage est peu développé en épaisseur. Verticalement, tous ces nuages d'un même système nuageux sont répartis en couches multiples, en formant des strates. On obtient les nuages stratiformes: stratus, stratocumulus, nimbostratus.

– Les nuages fournissent les grosses pluies sont peu étendus dans leur dimensions horizontales, mais très développés verticalement. De plus, chaque nuage est isolé des autres dans l'espace. On obtient ainsi les nuages cumuliformes: cumulus congestus, cumulo - nimbus.

6. COMMENTAIRES SUR LA STABILITE DU MODELE PROPOSE – INFLUENCE DE LA MESURE

Si l'on réalise des ajustements de la loi gamma sur des courbes expérimentales donnant l'intensité de précipitation en fonction de la probabilité de dépassement, on doit constater un bon accord pour les grandes précipitations et un écartement croissant entre la courbe théorique et la courbe expérimentale au fur et à mesure que l'intensité des précipitations décroît. C'est bien ce que l'on remarque dans les approximations gamma réalisées dans la figure 3.

Au contraire, un ajustement de la loi lognormale doit être d'autant plus précis que l'on se rapproche des faibles précipitations, et devenir de moins en moins exact quand l'intensité des précipitations augmente. C'est ce que l'on observe dans les figures 4 et 5.



1	Darmstadt	(RFA)	1976	ν = 0,0012	Ro = 15
2	Stockholm	(S)	1954-1963	ν = 0,0003	Ro = 31
3	Paris	(F)	1965-1978	ν = 0,00022	Ro = 44
4	Fucino	(I)	1975-1978	ν = 0,0012	Ro = 30
5	Palmetto	(USA)	(2 ans)	ν = 0,0035	Ro = 31

- - - - - Approximation GAMMA

Figure 3. – Exemples d'approximation gamma.

D'une façon générale, si le modèle défini ci-dessus est correct, on doit pouvoir ajuster correctement, sur une courbe expérimentale, une loi lognormale pour les faibles valeurs de l'intensité de la pluie, et une loi gamma pour les grandes valeurs de l'intensité de la pluie. C'est bien ce que l'on observe dans la réalité physique. Voici, à titre d'exemple, la répartition expérimentale des intensités de pluie mesurées pendant 13 ans à Paris (station météorologique de Montsouris). (Fig. 6). Le seuil de passage de la loi lognormale à la loi gamma est de 50 mm/h. Cette valeur pourra d'ailleurs être communément admise comme seuil de transition. L'inconvénient d'utiliser conjointement deux lois asymptotiques réside dans la nécessité d'estimer quatre paramètres au lieu des trois paramètres de la loi générale.

La question, maintenant, est de savoir si le seuil de transition entre la loi lognormale et la loi gamma peut être nul ou infini. En d'autres termes, existe-t-il des types de climat où la pluie serait pratiquement "lognormale" ou "gamma" ?

Une pluie dont l'intensité suit seulement une loi gamma suppose des précipitations régulières durant leur réalisation. Ceci est réalisé si les précipitations sont

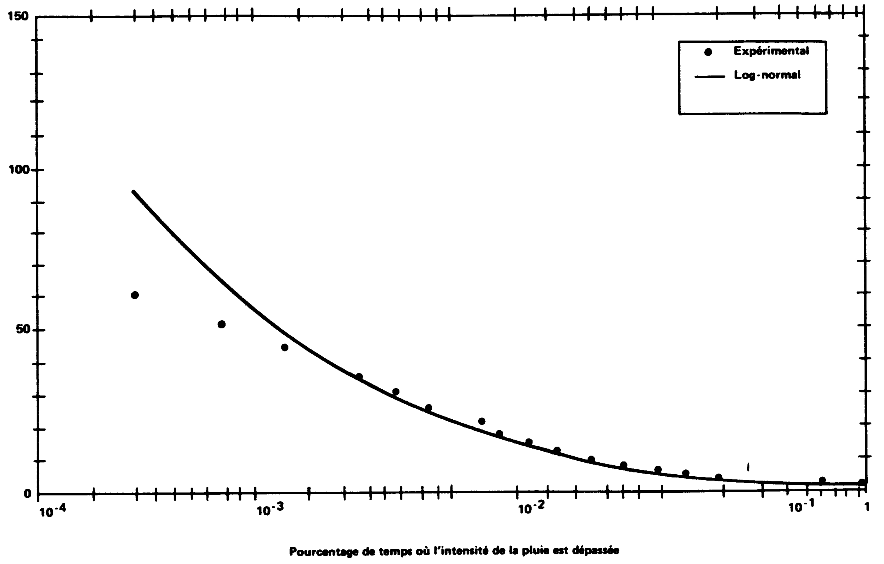


Figure 4. – Distribution cumulative de l'intensité de la pluie

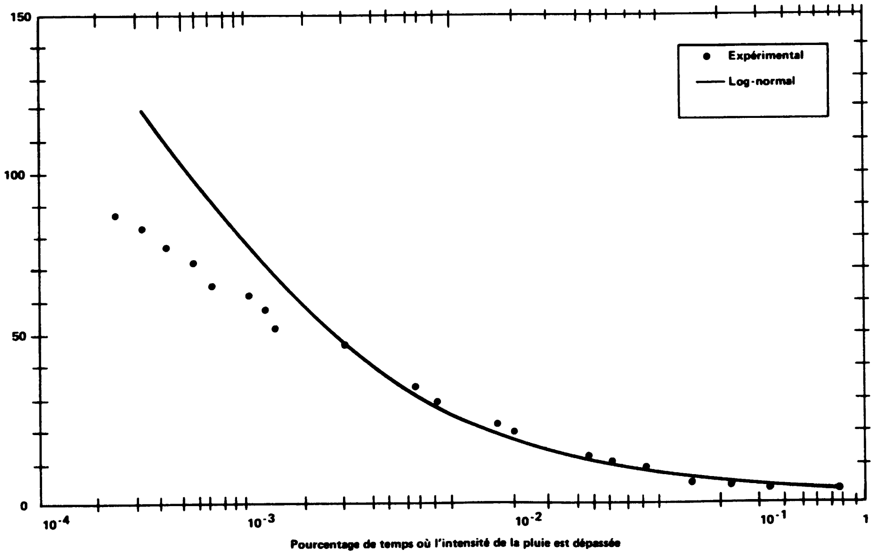


Figure 5. – Distribution cumulative de l'intensité de la pluie

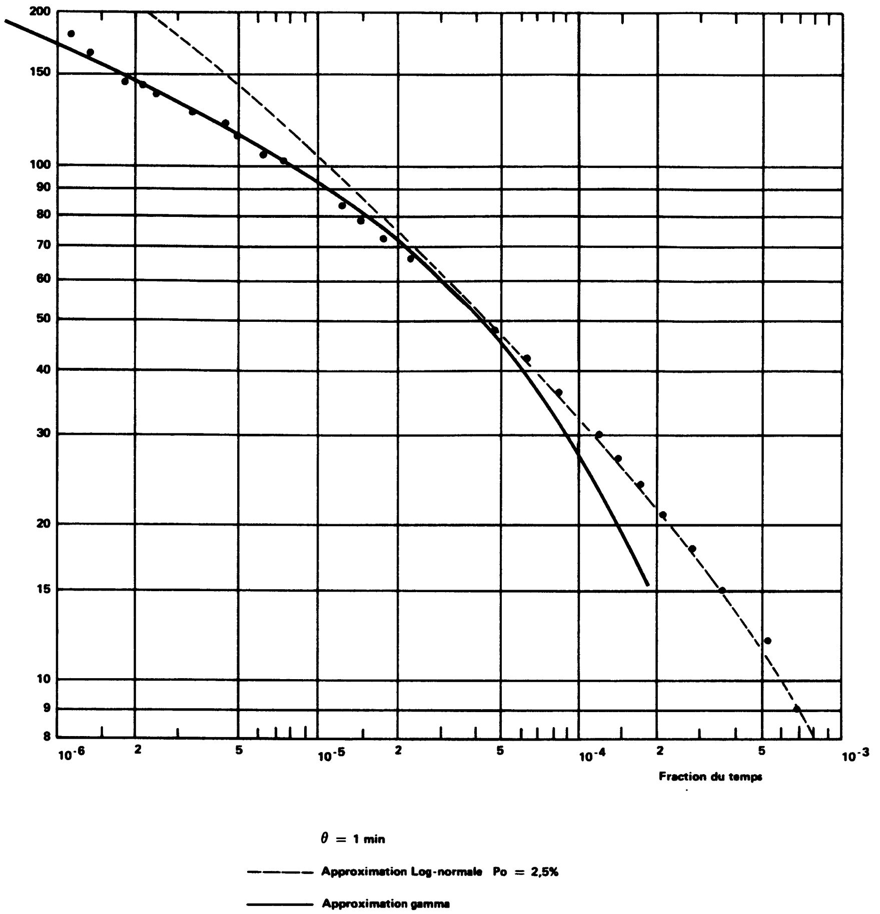


Figure 6. – Statistique de la pluie Paris – Montsouris 1965-1978

toujours fortes. Par conséquent, le climat de type méditerranéen et le climat de mousson doivent favoriser le caractère “loi gamma” de la répartition statistique de la pluie.

Une loi purement lognormale pour décrire la répartition statistique de la pluie suppose des variations de l’intensité de pluie pouvant être théoriquement infinies, car, dans ces conditions : $\beta \to \infty$.

Mathématiquement, le modèle admet parfaitement ce type de loi, car, théoriquement les fluctuations infinitésimales de l’intensité de la pluie sont définies par une série de distributions de Dirac, dont les amplitudes sont infinies.

En fait, ceci n’a guère de sens physique, car nous avons dérivé la loi de la quantité d’eau fournie par les systèmes nuageux au sens des distributions et non au sens des fonctions puisque, étant une fonction en escalier, elle n’admet pas de dérivée au sens des fonctions (on ne dérive que des fonctions continues).

La seule façon de définir physiquement une intensité de pluie instantanée (en mm/h) est donc de calculer le produit suivant :

$$\frac{(\text{Nombre de gouttes par seconde}) \times (\text{Volume des gouttes}) \times 3\,600}{(\text{surface équivalente de captation}).}$$

Il est évident que, ni le nombre de gouttes par secondes, ni la taille des gouttes ne peuvent devenir infinis.

Par conséquent, on pourra trouver des climats à grande variabilité de précipitations, mais, il existe toujours un seuil au-delà duquel la loi de la pluie tend vers une loi gamma.

Toutefois, les fluctuations des précipitations peuvent être réduites par les instruments de mesure. En effet, les pluviomètres possèdent tous ce qu'on appelle un "temps d'intégration" qui correspond à la borne inférieure temporelle du rapport :

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

où ΔQ est la quantité d'eau fournie pendant Δt.

Il est clair que, plus Δt est grand et plus l'on a :

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} \neq \frac{dQ}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

où dQ/dt définit l'intensité de précipitation instantanée de la pluie.

Par conséquent, si le temps d'intégration est trop grand, les fluctuations disparaissent et la loi de la pluie apparente suit une loi gamma.

Par exemple, dans la courbe ci-dessous (Fig. 7) décrivant la répartition statistique de la pluie sur une année avec un pluviomètre ayant un temps d'intégration de 6 mn, on ne peut pas dire si l'ajustement très correct d'une loi gamma est dû au type du climat considéré, ou au temps d'intégration du pluviomètre.

Il sera intéressant d'utiliser le pluviomètre développé au C.N.E.T., possédant un temps d'intégration de 10 s, pour observer les variations du seuil de transition en fonction du temps d'intégration du pluviomètre.

On peut remarquer, d'autre part, l'avantage indéniable que représente la modélisation d'un phénomène physique par une fonction aléatoire unidimensionnelle. En se plaçant en un point du sol, et en regardant l'évolution du phénomène au cours du temps, on a pu s'abstraire de toute hypothèse sur la nature géophysique des phénomènes, et sur les hypothèses thermodynamiques pour analyser le phénomène tridimensionnel. Les seules hypothèses nécessaires au modèle considéré sont pour le moins rudimentaires, et, de ce fait, très générales, (au point de vue de la connaissance physique des phénomènes).

Il est tout de même ennuyeux de devoir admettre que la pluie admet deux types de loi de probabilité pour décrire sa répartition statistique. C'est pourquoi nous allons proposer un modèle simplifié dont la loi s'ajuste bien avec la loi lognormale pour les faibles valeurs et avec la loi gamma pour les grandes valeurs.

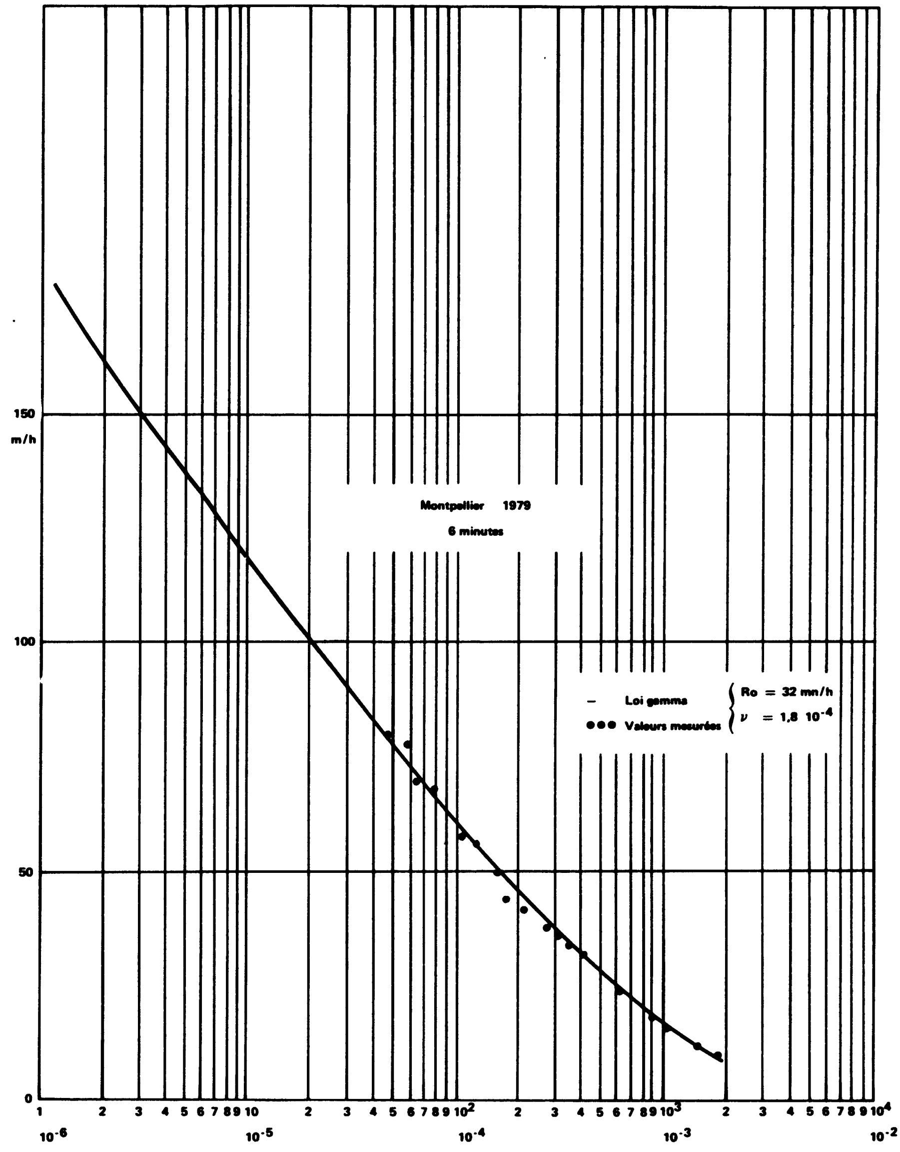


Figure 7

7. MODELE SIMPLIFIE POUR LA DESCRIPTION DE LA REPARTITION STATISTIQUE DES INTENSITES DE PLUIE

Dans le précédent modèle, si nous négligeons les fluctuations, nous avons une succession de fonctions aléatoires d'amplitude constante, celle-ci suivant une loi exponentielle.

Nous supposerons que les fluctuations rendent aléatoire le paramètre de cette loi, et nous supposerons, de plus, que la fonction aléatoire représentant ce paramètre, suit un modèle analogue à celui d'une fluctuation.

Par conséquent, on suppose que la répartition statistique de la pluie suit approximativement une loi Γ_1 à paramètre variable au cours du temps.

D'autre part, comme nous voulons construire un modèle proche de la courbe expérimentale, on doit tenir compte du fait que les intensités de pluie sont mesurées à partir d'un certain seuil. Soit R_o ce seuil, et soit $\mu(t)$ le paramètre aléatoire de la loi de l'intensité de pluie $R(t)$.

Dans ces conditions, nous avons :

$$\mathbf{P}(R(t) > R_1) = e^{-\mu(t)[R_1 - R_o]} \quad ; \quad R_1 \geqslant R_o$$

Bien entendu, $\mu(t)$ est une f.a. positive. Comme, dans ce modèle, l'intensité de la pluie ne peut pas être nulle, le paramètre qui donne le caractère aléatoire aux amplitudes de la f.a. $R(t)$, ne peut être nul, et nous supposons :

$$\mu(t) \geqslant \mu_o$$

Ces hypothèses sont, en fait très liées au modèle général. En effet, on sait que les précipitations en un lieu donné sont dues à l'intersection de plusieurs événements élémentaires indépendants. Si bien que, si l'on étudie l'intensité de précipitation $R(t)$ au dessus d'un niveau donné R_o, on peut écrire :

$$R(t) = \operatorname{Sup}(R_o, \operatorname{Inf}(R_1(t - \tau_1), \ldots, R_{N(t)}(t - \tau_{N(t)})))$$

$$R_1 \geqslant R_o : \{R(t) > R_1\} = \bigcap_{i=1}^{N(t)} \{R_i(t - \tau_i) > R_1\}$$

Nous supposons que l'intensité de précipitation d'un événement élémentaire de pluie, durant sa réalisation, est distribuée selon une loi Γ_1, au-dessus du seuil R_o :

$$R_1 \leqslant R_o \; ; X_i > t - \tau_i \; ; \mathbf{P}(R_i(t - \tau_i) > R_1 / R(u) > R_1 \; ; u \leqslant \tau_i)$$
$$= e^{-\Omega_i W_o(X_i,\, t - \tau_i)(R_1 - R_o)}$$

D'où l'intensité de la pluie, $R(t)$ au dessus du seuil R_o, et pendant le temps effectif de pluie :

$$\mathbf{P}(R(t) > R_1 / R(u) > R_1 ; u \leqslant t) = \prod_{i=1}^{N(t)} \mathbf{P}(R_i(t - \tau_i) > R_1)$$

$$= e^{-\sum_{i=1}^{N(t)} \Omega_i W_o(X_i, t - \tau_i)(R_1 - R_o)} \quad ; \; R_1 \geqslant R_o$$

Pour une longue durée d'observation, on peut admettre que :

$$\mathbf{P}(R(u) > R_1 \; ; u \leqslant t) = e^{-\mu_o(R_1 - R_o)}$$

On obtient donc la fonction de répartition de l'intensité de la pluie durant le temps effectif de pluie :

$R_1 \geqslant R_o$; $\mathbf{P}(R(t) > R_1 ; R(u) > R_1, u \leqslant t)$

$$= e^{-\left(\mu_o + \sum_{i=1}^{N(t)} \Omega_i W_o(X_i, t-\tau_i)\right)(R_1 - R_o)}$$

Soit x(t) le processus aléatoire défini par :

$$x(t) = \mu(t) - \mu_o$$

x(t) est donc de la forme suivante :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} \beta_n W_o(y_n, t - \tau_n)$$

où N(t) est un processus de Poisson de paramètre λ et où :

$$W_o(y, t-\tau) = 1_{\{y > t-\tau\}} \quad ; t \geqslant \tau$$

$$\mathbf{P}(y > s) = e^{-\beta s} \quad ; \beta \geqslant 0$$

$$p(\beta) = \alpha e^{-\alpha\beta} \quad ; \alpha \geqslant 0$$

On peut montrer que la loi de probabilité asymptotique de x(t) est une loi gamma, dont la densité de probabilité est :

$$p(x) = \frac{\alpha^{\lambda\alpha} x^{\lambda\alpha - 1} e^{-\alpha x}}{\Gamma(\lambda\alpha)} ; x \geqslant 0$$

On obtient pour la fonction de répartition F(R) de la loi de probabilité stationnaire de R(t), l'expression suivante :

$$R_1 \geqslant R_o : 1 - F(R_1) = \mathbf{P}(R > R_1) = \left(\frac{\alpha_o + R_o}{\alpha_o + R_1}\right)^{\nu} e^{-\mu_o(R_1 - R_o)}$$

avec : $\nu = \lambda\alpha \; ; \alpha_o = \alpha - R_o$

On pourra remarquer que cette loi de probabilité, appelée loi de Pareto généralisée, dépend de quatre paramètres. Ceci est suffisant puisque la loi générale dépend de trois paramètres. B. Segal [3] a essayé d'ajuster la simple loi de Pareto ($\alpha_o = \mu_o = 0$) sur des répartitions statistiques expérimentales de l'intensité des précipitations, et il a constaté que l'ajustement n'est valable que dans un petit domaine des valeurs prises par l'intensité de la pluie ($20 \leqslant R \leqslant 80$ mm/h).

Ceci nous prouve qu'il faut au moins trois paramètres pour réaliser un ajustement correct.

La densité f(x) de cette loi se comporte aux grandes valeurs comme $Ax^{-\nu} e^{-\mu_o x}$, ce qui est le comportement asymptotique de la loi gamma.

D'autre part, f(x), pour x petit, se comporte (si on suppose de plus que : $\nu \cong 1$; $\alpha_0 << x$; $\mu_0 (x + \alpha_0) >> 1$) comme la fonction $(A_o/x) . (e^{-\mu_o(x - R_o)})$

ce qui est de la même forme que le comportement de loi log-normale de densité :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\log\left(\frac{x}{x_o}\right)\right)^2}$$

au voisinage de : $x = 4x_o$. En effet, dans ce voisinage, un calcul élémentaire montre que :

$$\log \frac{x}{x_o} \simeq 0{,}3 \sqrt{\frac{x}{x_o}}$$

Comme l'on constate expérimentalement que x_o est de l'ordre de 2 mm/h, la loi de Pareto généralisée de densité f(x), jusqu'à des valeurs inférieures à 10 mm/h, réalise un bon ajustement de la répartition statistique expérimentale de l'intensité des précipitations.

On pourra d'ailleurs simplifier la densité f(x) en posant $R_o = 0$; il reste trois paramètres pour réaliser l'ajustement, ce qui est suffisant. Et la densité f(x) est alors égale à :

$$f(x) = \left(\frac{\alpha_o}{\alpha_o + x}\right)^{\nu} e^{-\mu_o x} \; ; x \geqslant 0$$

Le calcul empirique des trois paramètres est aisé, si on suppose que α_o n'est pas trop grand, de sorte que l'on peut trouver des valeurs suffisamment grandes de x telles que :

$$x >> \alpha_o \; ; \Rightarrow f(x) \cong \left(\frac{\alpha_o}{x}\right)^{\nu} e^{-\mu_o x}$$

Soient x_0, x_1, x_2 de telles valeurs :

On obtient le système suivant :

$$\log \frac{f(x_1)}{f(x_0)} = \nu \log \frac{x_0}{x_1} - \mu_o (x_1 - x_0)$$

$$\log \frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \nu \log \frac{x_1}{x_2} - \mu_o (x_2 - x_1)$$

D'où l'on déduit immédiatement ν et μ_o, et donc la valeur de α_o fournie par :

$$\alpha_o = x_o \, . \, e^{\frac{\mu_o x_o}{\nu}} \, . \, [f(x_o)]^{1/\nu}$$

Et on vérifiera que la courbe ainsi obtenue s'ajuste bien sur la courbe expérimentale.

Remarque :

Les premiers résultats expérimentaux semblent confirmer les résultats prévus par le modèle simplifié. M. Fidel MOUPFOUMA, ingénieur du corps des télécommunications de la République Populaire du Congo détaché au CNET/Paris B/RPE, a étudié la loi expérimentale de la répartition statistique de l'intensité de la pluie

R pour les climats équatoriaux et tropicaux (10). Il a remarqué, indépendamment de cette étude, que l'intensité R était bien ajustée par la distribution suivante :

$$P(R > R_1) = \frac{P_o \cdot e^{-\mu_o R_1}}{R_1^{\nu}} ; \; R_1 > 0$$

Celle-ci se déduit de la loi de Pareto généralisée en posant :

$$\alpha_o = 0 \; ; \; R_o^{\nu} \cdot e^{\mu_o R_o} = P_o$$

La figure 8, extraite de la référence [10], est un bon exemple d'ajustement de la loi de Pareto généralisée.

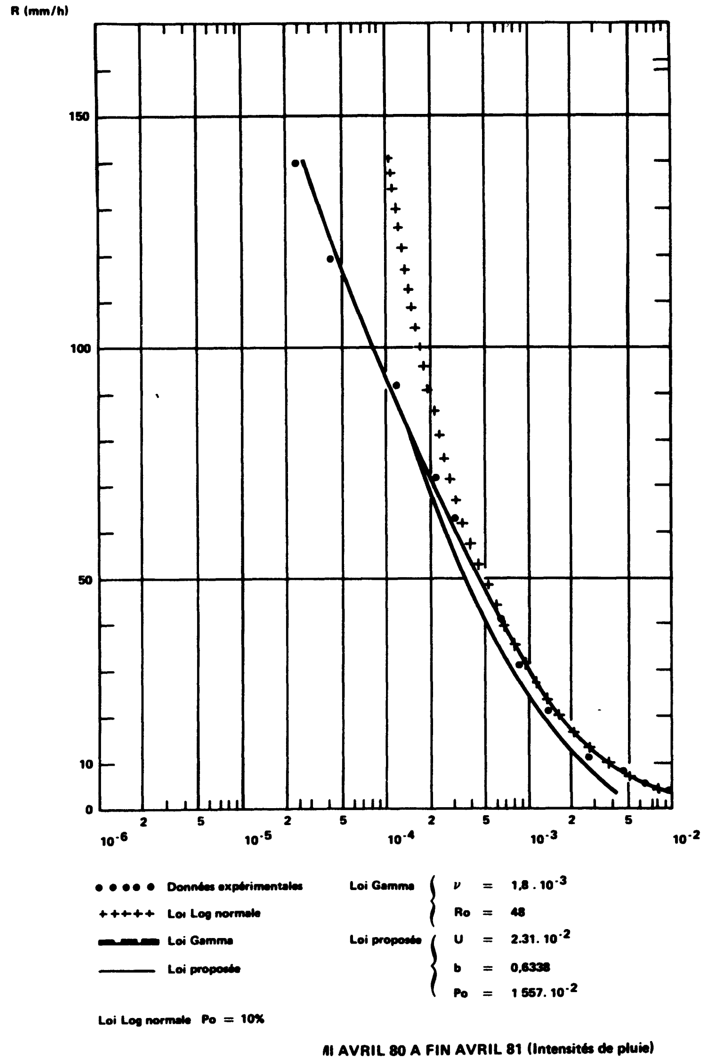


Figure 8. – Station de Brazzaville – Période de mi-avril 80 à fin avril 81 (Intensités de pluie).

8. CONCLUSION

Par rapport à toutes les précédentes études sur le sujet, celle-ci les synthétise en un seul modèle d'où l'on obtient toutes les lois proposées précédemment. (En effet, le modèle simplifié, dans son essence, est très proche du modèle général). Par conséquent, chaque loi proposée dans les publications antérieures était une partie de la connaissance du phénomène, puisque celui-ci nécessite deux lois de probabilité pour être complètement décrit. Dans l'état actuel des télécommunications par satellite, la loi gamma semble être la plus importante, puisqu'elle décrit les fortes intensités, et que ce sont celles-ci qui provoquent les forts affaiblissements de propagation.

Toutefois, avec l'augmentation de la fréquence porteuse, la loi log-normale pourra devenir importante, surtout au-delà de la vingtaine de gigahertzs et avec une réception en diversité de trajets.

D'autre part, puisque nous parlons des affaiblissements, il nous faut dire un mot sur les méthodes existantes par rapport aux résultats nouvellement acquis :

– la méthode de LIN [1] donne des affaiblissements trop forts car elle suppose que la pluie suit seulement une loi lognormale.

– la méthode de MORITA et HIGUTI [2], en s'appuyant seulement sur la loi gamma, donne de bons résultats dans les climats de mousson (pluies régulières), mais n'est pas applicable aux climats à grande variabilité comme le climat océanique.

– la méthode de MISME et FIMBEL [3] s'appuie uniquement sur la loi lognormale et on suppose qu'il existe des intensités de précipitation théoriquement infinies (cf. remarque précédente sur ce sujet). On sait maintenant qu'il faut repenser le problème en fonction des deux types de lois, ce qui aura une répercussion sur la taille des cellules de pluie, ceci étant très important pour le calcul du gain en diversité de trajets.

La notion de variabilité du climat est, ici, indépendante de la hauteur d'eau tombée. Elle est relative à l'importance des "fluctuations" de l'intensité de la pluie par rapport à la "valeur moyenne" de l'intensité de précipitations.

Je remercie tout particulièrement M. L. BOITHIAS pour son intuition à propos du caractère asymptotique de la loi gamma, et pour les ajustements de cette loi sur les courbes relevées expérimentalement, sans oublier M. J. BATTESTI pour les nombreuses courbes qu'il a bien voulu me fournir, ainsi que Melle E. MOURIER professeur à l'Université Paris VI, pour la correction de ce travail.

Je remercie également MM. MON et MOUPFOUMA du CNET/PAB/RPE pour l'intérêt porté à ce travail et les résultats de mesures qu'ils ont bien voulu me fournir.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.H. LIN. – A method for Calculating Rain Attenuation Distribution on Microwave Paths. *BSTJ,* Vol 54, **n° 6,** July – August 1975.

[2] Kazuo MORITA and Isao HIGUTI. – Statistical Studies on Electromagnetic Wave Attenuation due to Rain. *Review of the Electrical Communication Laboratories,* Vol 19, **n° 7-8,** July – August 1971.

[3] B. SEGAL. – *An Analytical examination of Mathematical Models for the Rainfall Rate Distribution Functions.* Communications Research Center, Dept. of Communications, Ottawa, Canada.

[4] P. MISME, J. FIMBEL. – Détermination théorique et expérimentale de l'affaiblissement par la pluie sur un trajet radio-électrique. *Annales des Télécommunications – Mai - Juin,* **30,** n° 5-6, 1975.

[5] COX et MILLER. – Stochastic Processes (Wiley).

[6] L. TAKACS. – Au Introduction to the Theory of queues (Cambridge).

[7] W. FELLER. – Au Introduction to the Probability Theory and it's Applications (Wiley) Tomes I et II.

[8] N. JOHNSON - S. KOTZ. – Distributions in statistics (Wiley).

[9] PATEL, KAPADIA, GWEN. – *Handbook of statistical Distribution* Marcel Dekker Inco.

[10] CCIR. – Commission d'étude: *Rapports 863-1 et 721,* à paraître dans les annales des Télécommunications.