

A. DESROCHES

Quelques modèles statistiques non classiques utilisables dans les tests de sensibilité

Revue de statistique appliquée, tome 30, n° 3 (1982), p. 15-25

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1982__30_3_15_0

© Société française de statistique, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES MODELES STATISTIQUES NON CLASSIQUES UTILISABLES DANS LES TESTS DE SENSIBILITE (*)

A. DESROCHES – CR2A, NANTERRE

SOMMAIRE

1. PRESENTATION DU PROBLEME
 - 1.1. Introduction
 - 1.2. Choix des méthodes
2. LES MODELES D'EXPERIMENTATION
 - 2.1. Introduction
 - 2.2. Les modèles figés
 - 2.3. Les modèles séquentiels par bloc
 - 2.4. Les modèles séquentiels
3. LES METHODES D'ANALYSE
 - 3.1. Les méthodes du maximum de vraisemblance
 - 3.2. La méthode des regroupements
 - 3.3. La méthode du recouvrement minimum
 - 3.4. La méthode des deux sous-ensembles
4. CONCLUSION ET REFERENCES

1. PRESENTATION DU PROBLEME

1.1. Introduction

L'estimation du niveau de sécurité d'un matériel M (ou plus simplement la sensibilité d'un matériau) soumis à une contrainte c_p peut être définie par la probabilité p telle que :

(*) Cette étude nous a été suggérée par J. BOUCARD, Vice Président de la 3SF (Société pour l'Avancement de la Sécurité des Systèmes en France).

$$p = p_r(c < c_p) = F(c_p)$$

où F est la fonction de distribution de la réponse du matériel à cette contrainte.

L'évaluation de p passe donc par la connaissance de tout ou partie de F . Il s'ensuit que le problème peut se ramener en fin de compte à la détermination de la partie intéressante de F (et donc de ses paramètres statistiques) dans une étude paramétrique. Il est toutefois possible par une approche non paramétrique d'estimer plus ou moins directement la probabilité p relative à c_p et réciproquement.

1.2. Choix des méthodes

Soit (c, q) le couple formé par le niveau c de contrainte appliquée sur M et q la réponse de M relative à c . Pour un critère de réponse fixée à priori, q peut avoir l'une des deux occurrences suivantes :

- pas de réponse ou réponse négative ($q = 0$),
- réponse positive ($q = 1$).

Deux méthodes permettent de déterminer p .

1.2.1. Méthode directe ou continue

En augmentant *continûment* la contrainte C , il est généralement possible d'atteindre un niveau c_i amenant le changement de réponse, soit par exemple une réponse positive. Pour un n -échantillon d'essais, on obtient donc une suite de n couples $(c_i, 1)$ qui, après traitement statistique (par exemple classement par ordre croissant des c_i) permet d'estimer par ajustement la distribution de la réponse de M à la contrainte étudiée.

Cette méthode se ramène donc à un ajustement classique d'un n -échantillon $(c_i, i = 1, n)$ à une loi de probabilité. C'est par cette méthode que l'on construit la courbe de la résistance à la rupture d'un métal ou d'un alliage donné.

1.2.2. Tests de sensibilité

Ils correspondent à l'ensemble des deux opérations *suivantes* :

- procédure ou modèle algorithmique d'expérimentation,
- méthode d'analyse statistique des résultats pendant ou à la fin de l'expérimentation.

a) La procédure d'expérimentation consiste à appliquer, suivant un algorithme, une suite de n contraintes **ponctuelles ou discrètes** c_i (n étant défini ou non a priori) et à relever les n réponses q_i . On obtient donc une suite de n couples (c_i, q_i) avec $q_i = 1$ ou 0 suivant qu'il y ait eu réponse ou pas.

La démarche consistant alors à classer ces couples par ordre croissant ne peut aboutir car il n'est pas possible de mettre en évidence une relation d'ordre sur l'ensemble des couples (c_i, q_i) . Ceci explique la nécessité de la deuxième partie du test.

b) La méthode d'analyse statistique permet à partir des résultats obtenus (c_i, q_i) , moyennant ou non certaines hypothèses paramétriques sur la forme mathématique de tout ou partie de F , de déterminer la probabilité p relative à c_p ou inversement. Les tests de sensibilité sont utilisés quand l'augmentation continue de la contrainte risque d'entraîner une modification de la caractéristique étudiée de M . Ils servent en particulier à déterminer les lois de réponse des produits pyro-

techniques soumis à une contrainte donnée (température, friction, choc, etc.). Il en est de même de la réponse d'un organisme vivant à un produit chimique. La réponse associée à la dose c_i est naturellement de type binaire: l'organisme est vivant ($q_i = 1$) ou est mort ($q_i = 0$).

Ce sont ces deux aspects plus ou moins inséparables des tests de sensibilité qui font l'objet de la suite de l'exposé. Il sera ainsi passé en revue les différentes classes de modèles et les rattachements des modèles courants (Staircase, Probits, etc.) à ces classes. Puis sera faite une description rapide des modèles non classiques avec leur mise en oeuvre. Enfin sera abordée l'étude, ou plutôt l'énoncé des méthodes d'analyse statistique permettant l'estimation de la probabilité p à partir des résultats d'expérimentation.

2. LES MODELES D'EXPERIMENTATION

2.1. Deux types de problèmes sont rencontrés dans la pratique :

a) Etant donné un niveau de contrainte appliqué sur M , on cherche à déterminer la probabilité p de réponse relative à ce seuil, c'est-à-dire telle que $p = F(c_p)$.

b) Inversement si p est la probabilité correspondant à l'objectif de sécurité, on cherche alors à définir le niveau de contrainte c_p qui donne cette probabilité c'est-à-dire tel que $c_p = F^{-1}(p)$.

Bien que ces deux approches soient complémentaires, c'est le deuxième type de problème qui est résolu le plus couramment dans les tests de sensibilité.

Enfin le choix du modèle et l'analyse des résultats dépendent de deux paramètres :

– la forme mathématique de F choisie a priori. Dans une approche non paramétrique ceci se traduit en observant que l'information obtenue à un niveau de contrainte donne un peu d'information sur la réponse à un niveau voisin.

– la valeur de la probabilité p . C'est l'ensemble de ces deux facteurs qui doit conditionner systématiquement le choix du modèle à mettre en oeuvre.

2.2. Les modèles figés (ou non séquentiels)

Dans ce type de modèle, tous les niveaux de contraintes sont planifiés. Il en résulte qu'un nombre relativement important d'essais est nécessaire. Le modèle figé le plus utilisé est connu sous le nom de *méthode des Probits* [1] (terme provenant de la contraction de *Probability Unit*). Son principe est simple : On définit a priori un nombre k de niveaux de contrainte et n nombre d'essais par niveau. L'intervalle dS entre deux niveaux dépend alors du type d'application, du nombre de spécimens disponibles, de l'hypothèse faite sur la loi de distribution de la réponse. . .

Malgré le nombre important de variantes qui ont été construites, le modèle reste non séquentiel car la réponse obtenue à un niveau donné de contrainte n'est pas utilisée pour définir le niveau de contrainte suivant.

Enfin, on peut dire que ce type de modèle est surtout intéressant dans le cas où le délai de réponse est relativement long (essais biologiques en particulier). Des exemples d'utilisation sont donnés en [2].

2.3. Les modèles séquentiels par bloc

Ce sont les modèles dans lesquels plusieurs tests, mais pas tous, peuvent être planifiés. Il en résulte que les niveaux de contrainte relatifs à un bloc donné ne sont pas déterminés tant que les tests à effectuer sur les blocs précédents n'ont pas été faits et les dépouillements réalisés. Le nombre de blocs et le nombre d'essais par bloc peuvent toutefois être définis avant le début des essais. Il va sans dire que ces choix sont naturellement faits afin d'obtenir le maximum d'information sur le paramètre à estimer. Parmi ces modèles on peut citer :

2.3.1. Le modèle RUN DOWN [3] qui est l'exemple le plus connu. Les tests sont concentrés aux niveaux de contraintes amenant des probabilités de réponses égales à 0,35 et 0,10.

Pour n essais au total (200 par exemple) et une hypothèse sur la loi de distribution de F (normale ou lognormale), le principe de modèle est le suivant :

Bloc # 1 : Initialisation

Avec n_1 essais, on détermine par un test classique (escalier, ...) la moyenne \bar{C} et l'écart-type s_C de la loi de réponse.

Bloc # 2 : (niveau de contrainte à 35 % de réponse). n_2 essais sont alors effectués au niveau de contrainte $S_2 = \bar{C} - 0,4 s_C$.

Bloc # 3 : (niveau de contrainte à 10 % de réponse).

Si le nombre de réponses au bloc # 2 est supérieur à 5, alors n_3 essais sont réalisés au niveau de contrainte $S_3 = \bar{C} - 1,3 s_C$.

Sinon on refait n_3 essais au niveau S_2 et n_3'' au niveau $S_2' = \bar{C} - 0,2 s_C$.

Ce type de modèle ne trouve son intérêt que lorsque le coût et le délai des essais à un même niveau est analogue.

2.3.2. Le modèle de BARTLETT [4], non paramétrique, permet de déterminer les niveaux de contraintes correspondant à des probabilités égales à 0,01 et 0,001. Le nombre de tests peut toutefois dépasser 300 lorsque la dimension des pas est petite.

Son principe est le suivant :

On se fixe a priori un ensemble de niveaux de contrainte à tester dont l'intervalle est égal à dS . Le niveau initial S_1 est pris grossièrement égal au niveau médian $C_{0,50}$. Ce niveau est gardé jusqu'à ce qu'apparaisse une réponse positive. Le nouveau seuil de contrainte devient alors $S_2 = S_1 - dS$ jusqu'à l'obtention d'une autre réponse positive. Ceci ainsi de suite jusqu'à n'avoir que des réponses négatives.

Des adaptations sont faites s'il est fait une hypothèse sur la distribution de F .

2.3.3. Le modèle 20 RN, non paramétrique, permet de déterminer les niveaux de contrainte correspondant à des probabilités comprises entre 0,01 et 0,10.

Son principe est le suivant :

Un ensemble de niveaux d'essais d'écart dS est fixé. Le seuil initial de contrainte S_1 doit correspondre grossièrement au niveau médian $C_{0,50}$. On fait alors

des essais à S_1 jusqu'à ce que la première réponse positive arrive ou que 20 réponses négatives soient observées. Plusieurs cas sont possibles.

- Si la première réponse apparaît lors des cinq premiers essais à ce niveau, alors le prochain sera fait au seuil $S_{i+1} = S_i - 2dS$.
- Si la première réponse apparaît entre le 6^e et le 20^e essais alors le prochain est fait au niveau $S_{i+1} = S_i - dS$.
- L'occurrence de 20 non réponses au niveau S_i termine la séquence d'essais.

2.4. Les modèles séquentiels

Ce sont des modèles dans lesquels un niveau de contrainte n'est déterminé que lorsque le test au niveau précédent a été réalisé et que le résultat est connu (observé et peut-être analysé). Ce type de modèle est aussi appelé MARKOVIEEN car la suite des niveaux testés constitue une promenade aléatoire sur l'ensemble des niveaux d'essais définis a priori.

On distingue deux types de modèles séquentiels :

2.4.1. Les modèles UP AND DOW [5] dans lesquels l'intervalle entre deux niveaux est fixé a priori. Le nouveau seuil à tester n'est conditionné que par le résultat obtenu au test précédent. Il est alors évident que la manière dont est prise la suite des échantillons à tester a une influence non négligeable sur la suite des niveaux à tester et en définitive sur les résultats.

2.4.1.1. Le modèle de l'escalier ou STAIRCASE [6, 7, 3] appelé plus classiquement test de Bruceton du nom de la ville de Pennsylvanie où il fut réalisé pour la première fois. Il permet d'estimer la médiane $C_{0,50}$ de la loi de réponse. Sous l'hypothèse de normalité de la réponse, l'analyse développée par DIXON et MOOD a permis d'estimer la moyenne \bar{C} et l'écart-type s_C .

Si avec une telle hypothèse $\bar{C} = \bar{C}_{0,50}$ on peut toutefois remarquer que l'écart-type est sous-estimé car ce modèle tend à recentrer les niveaux de contraintes à appliquer et par là même à diminuer la variabilité des résultats. Son algorithme bien que connu est rappelé ci-après :

a) on choisit un pas dS entre niveaux de contrainte notés S_i . Ce pas est constant pendant toute la mise en oeuvre du modèle.

b) le premier niveau S_1 de contrainte doit être choisi le plus près possible de $C_{0,50}$ tandis que dS doit être approximativement égal à s_C .

c) si la réponse est positive ($q_i = 1$), alors le nouveau test sera effectué au niveau $S_2 = S_1 - dS$. Dans le cas contraire, on prendra $S_2 = S_1 + dS$.

d) soit S_i le niveau de contrainte du $i^{\text{ème}}$ test et soit q_i sa réponse, alors :

$$S_{i+1} = \begin{cases} S_i + dS & \text{si } q_i = 0 \\ S_i - dS & \text{si } q_i = 1 \end{cases}$$

e) bien que le nombre d'essais n soit fixé a priori on s'efforcera de faire apparaître une *séquence expérimentale fermée*. C'est en particulier une suite de niveaux S de contraintes dans laquelle les nombres de réponses positives et négatives sont égaux et telle que S_1 soit voisin de S_n . Des exemples d'utilisation sont donnés en [8, 9, 10, 11, 12, 13].

Quand le premier niveau à tester S_1 est mal connu et (ou) que l'intervalle dS entre deux niveaux est difficile à estimer, il est possible d'utiliser l'une des deux variantes suivantes :

2.4.1.2. Le modèle de COCHRAN et DAVIS [14] dont la procédure de mise en oeuvre est la suivante :

a) on utilise le modèle de l'escalier avec $dS = 1,25 s_C$ jusqu'à l'obtention d'un changement de réponse.

b) soit alors le niveau moyen calculé à partir des deux derniers niveaux testés. Deux suites sont alors possibles :

- utilisation du modèle de Robbins MONRO (§ 2.4.2.2.) avec $k = 1,25 s_C$;
- utilisation du modèle de l'escalier avec $dS = s_C$.

2.4.1.3. Le modèle de WETHERILL [15] dont la procédure de mise en oeuvre est la suivante :

a) utilisation du modèle de l'escalier de pas $dS = s_C$ jusqu'à l'observation de 5 changements de réponse ;

b) utilisation de ce même modèle, mais avec un pas $dS = 0,5 s_C$.

2.4.2. Les modèles à approximation stochastique dans lesquels la même information est utilisée mais où la taille du pas peut évoluer avec tout ou partie des résultats des tests précédents. Ce qui revient à dire qu'un niveau donné de contrainte dépend des résultats de tous les tests ou de quelques-uns.

Parmi ces modèles on trouve :

2.4.2.1. Le modèle de LANGLIE [16] appelé plus couramment modèle ONE SHOT et dont la procédure est apparentée aux méthodes numériques de bisection (ou méthode de l'artilleur). Sa mise en oeuvre associée à l'hypothèse de normalité de la loi de réponse permet d'estimer \bar{C} et s_C .

2.4.2.2. Le modèle de ROBBINS MONRO [17]

Ce modèle associé ou non à une hypothèse sur la nature de la loi de réponse permet d'avoir une estimation non biaisée de $C_{0,50}$.

L'algorithme décrivant ce modèle permet toutefois d'avoir une estimation de n'importe quel niveau de contrainte c_p . Une description rapide de sa procédure est donné ci-après :

a) soit S_1 une estimation à priori de c_p .

b) deux cas peuvent se présenter à la suite du test :

– s'il y a une réponse au niveau S_1 ($q_1 = 1$) alors $S_2 = S_1 - a_1 (1 - p)$ où a_1 est le premier terme d'une suite (a_n) ;

– s'il n'y a pas de réponse ($q_1 = 0$) alors $S_2 = S_1 + a_1 p$,

c) au $n^{\text{ième}}$ test, effectué au niveau S_n la réponse peut être $q_n = 0$ ou $q_n = 1$.

Le niveau suivant sera alors :

$$S_{n+1} = S_n + a_n (p - q_n)$$

Outre certaines contraintes sur la suite (a_n) l'introduction de l'hypothèse de linéarité de F localement autour de c_p permet d'écrire :

$$a_n = k/n$$

où k est la valeur optimale qui minimise asymptotiquement la variance de l'estimateur de c_p . On montre que sa valeur est donnée par $k = 1/F'(c_p)$.

Dans l'hypothèse paramétrique, la valeur de k peut être parfaitement connue. Par contre dans l'hypothèse non paramétrique, cette relation n'offre aucun intérêt.

On montre d'autre part, que le choix de k n'est pas critique tant que sa valeur n'est pas supérieure à l'optimum.

d) l'estimation de c_p après n tests est naturellement donnée par S_{n+1} . Des variantes de ce modèle ont été construites.

Parmi celles-ci on trouve :

- le modèle de COCHRAN-DAVIS [14]
- le modèle de KESTEN [18]
- le modèle de ODELL [19]

2.4.2.3. Le modèle d'ALEXANDER

Dans ce modèle la taille du pas reste constante mais chaque nouveau seuil de contrainte dépend de tous les résultats des niveaux précédents.

La détermination de c_p pour p donnée met en œuvre alternativement des suites croissantes et décroissantes qui convergent vers c_p .

L'application de ce modèle nécessite pour chaque niveau de contrainte l'utilisation de la méthode des regroupements après chaque test.

Bien que simple à comprendre l'algorithme décrivant ce modèle ne sera pas exposé car il nécessite un développement assez long.

Il a été montré que ce modèle est, d'une part plus efficace que tous les modèles non paramétriques et, d'autre part il est asymptotiquement aussi efficace que la meilleure approximation stochastique paramétrique (c'est-à-dire quand il est fait une hypothèse sur la forme mathématique de F).

2.4.2.4. Le modèle de ROTHMAN [20] nécessite aussi l'utilisation de la méthode des regroupements après chaque test. Il a été montré que pour des échantillons assez grands, les niveaux des tests et les estimations convergent vers la vraie valeur de c_p .

Dans ce modèle on fait l'hypothèse que le premier seuil de contrainte S_1 , estimation de c_p est une variable aléatoire gaussienne de moyenne inconnue c_p et d'écart type s connu.

2.4.2.5. Le modèle de DERMAN [21] est un modèle non paramétrique basé sur la seule hypothèse que la fonction de réponse est strictement monotone croissante. Les tests sont appliqués à des niveaux également espacés de dS . Son principe est le suivant :

- a) soit S_1 une estimation à priori de c_p ;
- b) soit S_n le niveau appliqué au $n^{\text{ième}}$ test ;
- c) alors on a :

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n - dS & \text{avec une probabilité } 1/2 \text{ p si } q_n = 1 \\ S_n + dS & \text{avec une probabilité } 1-1/2 \text{ p si } q_n = 1 \\ S_n + dS & \text{si } q_n = 0 \end{cases}$$

On utilise alors une table de nombres au hasard. S'il y a réponse, on compare un nombre au hasard X de deux chiffres à $100/2p$.

Alors :

- si X est plus petit alors, S_{n+1} est pris plus petit que S_n ;
- si X est plus grand alors, S_{n+1} est pris plus grand que S_n ;
- si $X = 100/2p$ alors, on tire un nouveau nombre au hasard.

Pour $p = 0,5$, on montre que le modèle de DERMAN est identique au modèle de l'ESCALIER.

3. LES METHODES D'ANALYSE

A la fin de l'application du modèle d'expérimentation (ou éventuellement à chaque pas) il est fait une analyse de résultats globaux (ou intermédiaires) par des méthodes plus ou moins classiques. Parmi celles-ci on trouve :

- la méthode du maximum de vraisemblance ;
- la méthode des regroupements ;
- la méthode du recouvrement minimum ;
- la méthode des deux sous-ensembles.

Elles permettent en tenant compte d'hypothèses paramétriques ou non, d'obtenir une solution du problème initial ou de son complémentaire.

3.1. Méthode du maximum de vraisemblance

C'est la plus connue. Elle a été utilisée en particulier dans l'analyse des modèles de l'escalier (étude de DIXON et MOOD) et de ONE SHOT (étude de LANGLEIE).

Très classique, sa procédure ne sera pas développée ici.

3.2. Méthode des regroupements

Elle est en fait une application directe de la méthode du maximum de vraisemblance. Elle permet d'obtenir l'estimation d'une distribution à partir d'une fonction de réponse monotone non décroissante.

L'hypothèse de monotonie implique en particulier l'existence d'inégalités entre deux niveaux adjacents de contrainte.

Sans entrer dans les détails de cette méthode, son principe est le suivant :

Etant donné :

- les niveaux de contraintes testés (S_1, \dots, S_k);
- n_i le nombre de tests effectués au niveau S_i ;
- r_i le nombre de réponses positives observées au niveau S_i .

On considère alors la suite :

$$\frac{r_1}{n_1}, \frac{r_2}{n_2}, \dots, \frac{r_k}{n_k}$$

correspondant aux probabilités \tilde{p}_i de réponses telles que :

$$\tilde{p}_1 \leq \tilde{p}_2 \leq \dots \leq \tilde{p}_k$$

pour i donné on doit avoir l'inégalité

$$\frac{r_i}{n_i} \leq \frac{r_{i+1}}{n_{i+1}}$$

Dans le cas contraire on fait un regroupement noté :

$$\frac{r_{i,i+1}}{n_{i,i+1}} = \frac{r_i + r_{i+1}}{n_i + n_{i+1}} = \tilde{p}_i = \tilde{p}_{i+1}$$

La nouvelle suite s'écrit alors :

$$\frac{r_1}{n_1}, \dots, \frac{r_{i-1}}{n_{i-1}}, \frac{R_{i,i+1}}{N_{i,i+1}}, \frac{r_{i+2}}{n_{i+2}}, \dots, \frac{r_k}{n_k}$$

Si une inversion apparaît encore, on réitère un nouveau regroupement jusqu'à obtenir une suite non décroissante.

L'estimation de la fonction de réponse entre deux niveaux de test se fait par interpolation linéaire.

3.3. La méthode de recouvrement minimum [22]

C'est une méthode d'estimation des paramètres \bar{C} et s_C dans l'hypothèse de normalité de la loi de réponse. Longue à exposer et difficile à maîtriser sa procédure d'utilisation ne sera pas développée ici.

3.4. La méthode des deux sous-ensembles

C'est une méthode simple pour estimer les paramètres d'une loi de réponse. Son principe est le suivant :

a) soit a et b les paramètres de la fonction de réponse telle que $p = F(x; a, b)$.

b) soit c un niveau donné de contrainte.

$N_1(c)$ le nombre total de tests effectués à des niveaux inférieurs ou égaux à c et $p_1(c)$ la fraction de réponses correspondante.

$N_2(c)$ le nombre total de tests effectués à des niveaux supérieurs à c et $p_2(c)$ la fraction de réponses correspondante.

c) La plus petite valeur c' qui minimise la quantité :

$$p(c) = |p_1(c) [1 - p_1(c)] N_1(c) - p_2(c) [1 - p_2(c)] N_2(c)|$$

peut être utilisée pour partager l'ensemble des niveaux (et des résultats) en deux sous-ensembles E_1 et E_2 .

d) Soit S_1 et S_2 les niveaux moyens de contrainte de E_1 et E_2 .

L'estimation des paramètres a et b est donnée par le système.

$$\bar{S}_1 = F^{-1}(p_1; \hat{a}, \hat{b})$$

$$\bar{S}_2 = F^{-1}(p_2; \hat{a}, \hat{b})$$

4. CONCLUSION

Cet exposé rapide a eu pour but de présenter après classification quelques modèles non classiques et leurs méthodes d'analyse. La liste des références permettant d'approfondir l'utilisation de ces différents outils statistiques est donnée ci-après.

REFERENCES THEORIQUES ET PRATIQUES

- [1] D.J. FINNEY. – *Probit analysis*, Cambridge University Press, 1952.
- [2] J.P. BOULOUIMIE (GTPS). – *Méthode Statistique des Probits*, 1978.
- [3] L.D. HAMPTON, J.N. AYRES and I. KABIK (NOLTR 63-266 WHITE OAK). – *Estimation of high and low probability EED functioning levels*, 1964.
- [4] M.S. BARTLETT. – A modified probit technique for small probabilities, *Statist. Soc. Suppl.* 8, 1946.
- [5] R. de TONCKERE. – Les essais de sensibilité par la méthode "up and down", *Revue - X - Tijdschrife*, 2, 1975.
- [6] W.J. DIXON et A.M. MOOD. – A method for obtaining and analyzing sensitivity data, *J. Amer. Statis. Assoc.*, 43, 1948.
- [7] W.J. DIXON. – The up and down method for small samples, *J. Amer. Statis. Assoc.*, 1965.
- [8] G. PFEFFER (GTPS). – *Etablissement de la fiabilité expérimentale d'éléments et de systèmes monocoup*, 1977.
- [9] G. PFEFFER. – *Degré de confiance de l'évaluation de la fiabilité en sécurité ou en sureté d'une chaîne pyrotechnique*, Société Thomson Brandt, St-Denis, 1973.
- [10] G. PFEFFER (GTPS). – *Méthode de Bruceton*, 1979.
- [11] I.G. PINON (EFAB). – *Exploitation Statistique de tests de sensibilité. Emploi pratique de la méthode séquentielle de Bruceton*.
- [12] I.G. PINON (EFAB). – *Note complémentaire sur les tests de sensibilité. Tests de Bruceton en variable logarithmique*.

- [13] R. MALABIAU (GERPY). – *Méthodes Statistiques utilisables pour déterminer la sensibilité des dispositifs électro-pyrotechniques à diverses excitations d'origine électrique ou électromagnétique*, 1980.
- [14] W.G. COCHRAN and DAVIS Miles. – *Stochastic approximation to the median effective dose in bio-assay. Stochastic Models in Medicine and biology*. University of Wisconsin Press, Madison, 1964.
- [15] G.B. WETHERILL. – Sequential estimation of quantal response curves. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B.* **25**, 1-48, 1963.
- [16] H.J. LANGLIE. – A reliability test method for “one shot” Items. *Aeronutronic Publication*, n° U-1792, 1962.
- [17] H. ROBBINS et S. MONRO. – A stochastic approximation method. *Ann. Math. Statist.*, **22**, 1951.
- [18] H. KESTEN. – Accelerated stochastic approximation. *Ann. Math. Statist.* **29**, 1958.
- [19] P.L. ODELL. – *Stochastic approximation and non-parametric interval estimation in sensitivity testing with involves quantal response data*, Oklahoma State University, 1962.
- [20] D. ROTHMAN and J. ZIMMERMAN. – The design of complex sensitivity experiments. Proceedings of the tenth Conference of the Design of Experiments in *Army Research, Development and Testing*, Washington, D.C., 1965.
- [21] C. DERMAN. – Non-parametric up and down experimentation. *Ann. Math. Statist.*, **28**, 1957.
- [22] A. GOLUB and F.E. GRUBBS. – Analysis of sensitivity experiments when the levels of stimulus cannot be controlled. *J. Amer. Stat. Assoc.*, **51**, 257, 1956.