

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. P. INDJEHAGOPIAN

Analyse des effets d'intervention sur les prévisions issues de modèles ARIMA

Revue de statistique appliquée, tome 29, n° 4 (1981), p. 5-30

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1981__29_4_5_0

© Société française de statistique, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

ANALYSE DES EFFETS D'INTERVENTION SUR LES PREVISIONS ISSUES DE MODELES ARIMA (1)

J.P. INDJEHAGOPIAN (2)

RESUME

Dans cet article nous nous intéressons à la modélisation et à la prédiction des séries temporelles perturbées par des interventions connues telles que des modifications tarifaires, l'introduction d'un nouveau produit sur un marché, une grève, etc. Plus précisément, après avoir présenté brièvement la modélisation des effets d'interventions connues et du bruit à l'aide des filtres linéaires réalisables et dissipatifs, on introduit la notion de biais de prédiction lorsque l'on ignore dans la modélisation la partie déterministe relative à une intervention. Ce calcul de biais de prédiction nous permet à partir d'un théorème, de discuter de l'adaptabilité des prédictions issues de modèles ARIMA. Nous illustrons les résultats trouvés sur la série du trafic passagers national perturbé par les grèves de Février-Mars 1973 et Novembre-Décembre 1979.

1. INTRODUCTION

La modélisation d'une série temporelle à partir de son historique en utilisant la classe des modèles linéaires ARIMA suppose la stabilité structurelle au cours du temps du modèle retenu et de ses coefficients. Dès lors, si l'on est en présence d'une structure évolutive et/ou de paramètres variant au cours du temps, les prédictions issues du modèle univarié seront sérieusement affectées.

Dans cet article nous nous intéressons à la modélisation et à la prédiction de séries temporelles dont les historiques sont perturbés par des interventions connues telles qu'une promotion, l'introduction d'un nouveau produit concurrent sur un marché, l'annonce d'une modification de tarif, une grève, etc.

Dans la première partie de cet article nous présentons brièvement la modélisation des effets d'interventions connues et du bruit à partir de la classe des modèles linéaires dynamiques et de l'analyse des interventions développées par BOX, JENKINS et BOX, TIAO (cf. [4] et [5]). Plus précisément nous montrons comment l'analyse des interventions essaie de répondre à la question : "étant donné une ou

(1) Cet article est une version révisée d'une communication présentée à EURO IV Fourth European Congress on Operations Research, Cambridge, England, July 1980.

(2) Professeur de Statistique à l'ESSEC, Cergy Pontoise, France.

plusieurs interventions, y a-t-il un changement dans l'évolution de la série temporelle depuis la date connue d'occurrence de cette (ces) intervention(s) et si oui, quelles sont les caractéristiques et l'amplitude de ce(s) changement(s) ?"

Dans la deuxième partie nous montrons qu'il est possible de calculer le biais de prédiction lorsque l'on ignore la partie déterministe de l'intervention dans le modèle. Ce calcul du biais de prédiction nous permet de discuter de l'adaptabilité des prédictions issues des modèles ARIMA lorsque les séries temporelles sont soumises à des interventions déterminées telles que des impulsions ou des sauts.

Enfin dans la première partie nous illustrons l'analyse des interventions à partir de la série du trafic aérien national passagers perturbée par les grèves des contrôleurs aériens en Février-Mars 1973 et Novembre-Décembre 1979. Dans ce dernier exemple, on discute préalablement de la stabilité du modèle à partir du mois de Novembre 1979 début de la grève. A cet effet, on présente brièvement le test de BOX et TIAO [6].

2. MODELES D'INTERVENTION

Pour définir les modèles d'intervention de BOX et TIAO, nous présentons préalablement quelques notions fondamentales sur les filtres linéaires réalisables dissipatifs (R.D.).

Dans cet article nous appellerons filtre H une transformation linéaire invariante au cours du temps transformant une série temporelle $\xi = (\xi_t, t \in \mathbb{Z})$ à temps discret, appelée entrée, en une sortie $y = (y_t, t \in \mathbb{Z})$ à temps discret. Lorsque l'ensemble des entrées admissibles du filtre H est un espace vectoriel, on a classiquement (cf. KOOPMANS [16], OPPENHEIM [19], ROBINSON [22], [23]).

$$y_t = \sum_{-\infty}^{\infty} h_j \xi_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

où la suite $(h_j, j \in \mathbb{Z})$ représente la réponse impulsionnelle du filtre. La série formelle

$$h(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} h_j z^j \quad (2.2)$$

s'appelle fonction de transfert du filtre.

Si $h_j = 0$ pour $j < 0$, la sortie au temps t dépend de l'entrée seulement pour les temps $s \leq t$ i.e., du présent et du passé de ξ . Un filtre présentant cette caractéristique est dit réalisable (ou causal).

On dit que le filtre est dissipatif lorsque la réponse impulsionnelle est de carré sommable. Enfin un filtre est stable si pour toute entrée bornée la sortie est bornée (E.B.S.B.). Un filtre est stable si et seulement si

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |h_j| < \infty \quad (2.3)$$

Compte tenu des définitions données ci-dessus, la fonction de transfert d'un filtre réalisable dissipatif (R.D.) s'écrit :

$$h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^j \quad (2.4)$$

avec

$$\sum_{j=0}^{\infty} |h_j|^2 < \infty \quad (2.5)$$

La condition (2.5) implique que la fonction de transfert se définit comme une fonction analytique dans tout le disque ouvert $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

La réponse fréquentielle \hat{h} d'un filtre réalisable dissipatif est la fonction de $L^2_c[-\pi, \pi]$ définie comme la transformée de Fourier discrète de la réponse impulsionnelle $(h_j, j \in \mathbb{N})$ ⁽¹⁾

$$\hat{h}(\lambda) = \sum_0^{\infty} h_j e^{-i\lambda j}, \quad -\pi < \lambda \leq \pi \quad (2.6)$$

Si on considère (2.6) comme un développement en série de Fourier on peut alors chercher la condition pour qu'une fonction h ait un développement en série de Fourier de coefficients de Fourier h_n tels que

- (i) $h_n = 0$ pour tout $n < 0$
- (ii) $\sum_0^{\infty} |h_n|^2 < \infty$

Une telle condition peut se trouver en utilisant l'espace de Hardy H^2 .

L'espace de Hardy H^2 se définit comme l'ensemble des classes de fonctions analytiques dans le disque ouvert $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, de la forme

$$h(z) = \sum_0^{\infty} h_j z^j$$

satisfaisant à

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{-i\lambda})|^2 d\lambda < \infty \quad (2.7)$$

La relation de Parseval permet de montrer que la condition (2.7) est équivalente à la condition (2.5). Ce qui implique que tout filtre réalisable dissipatif (R.D.) appartient à H^2 . On remarquera qu'une fraction rationnelle appartient à H^2 si et seulement si ses pôles sont à l'extérieur du disque unité fermé,

$$\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

De plus, on peut vérifier que si $f \in H^2$ alors $\hat{f}(\lambda) = f(e^{-i\lambda})$ est limite

(1) Le théorème de RIESZ-FISHER affirme que si la suite $(h_j, j \in \mathbb{N})$ est telle que $\sum_0^{\infty} |h_j|^2 < \infty$ alors il existe une fonction $\hat{h} \in L^2_c[-\pi, \pi]$ telle que $\sum_0^{\infty} h_j e^{-i\lambda j}$ converge au sens de L^2 vers \hat{h} et où les h_j sont les coefficients de Fourier de \hat{h} .

au sens de L^2 et p.p. de $f(re^{-i\lambda})$ quand r tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\sum_0^\infty h_j e^{-i\lambda j}$ est le développement en série de Fourier de $\hat{f}(\lambda)$.

Compte tenu des résultats précédents, il est clair que la condition recherchée est que h appartienne à l'espace H^2 .

En outre on peut montrer que l'application qui associe à toute fonction h de H^2 sa valeur au bord ∂D du disque unité D (i.e., le cercle unité $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) c'est-à-dire \hat{h} de $L^2(T)^{(1)}$ est un isomorphisme d'espace de Hilbert de H^2 sur le sous espace hilbertien $L_+^2(T)$ de $L^2(T)$ des fonctions g de $L^2(T)$ tels que les coefficients de Fourier $\hat{g}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{-i\lambda}) e^{ni\lambda} d\lambda = 0$ pour tout $n < 0$.

Cette isométrie permet donc d'identifier H^2 à $L_+^2(T)$ en munissant H^2 du produit scalaire

$$\begin{aligned} (h_1, h_2)_{H^2} &= (\hat{h}_1, \hat{h}_2)_{L_+^2} = \int_{-\pi}^{\pi} h_1(e^{-i\lambda}) \overline{h_2(e^{-i\lambda})} d\lambda \\ &= \sum_0^\infty h_j^{(1)} \overline{h_j^{(2)}} \end{aligned}$$

L'intérêt d'une telle identification réside dans le fait que toute fonction f non identiquement nulle appartenant à H^2 admet la factorisation unique

$$f(z) = \rho B(z) F(z) S(z), \quad \text{où } \rho = e^{ia} \quad \text{avec } a = \arg(f/B)(0),$$

$$B(z) = z^p \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z} \cdot \frac{\overline{a_n}}{|a_n|} \right]^{p_n}, \quad 0 < |a_n| < 1, \quad \sum (1 - |a_n|) < \infty ;$$

$$F(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i\lambda} + z}{e^{-i\lambda} - z} \text{Log} |f(e^{-i\lambda})| d\lambda \right\},$$

$$S(z) = \exp \left\{ - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i\lambda} + z}{e^{-i\lambda} - z} d\mu(\lambda) \right\},$$

où $\{a_n\}$ est l'ensemble des zéros de f dans D , d'ordre respectivement p_n , avec $a_n \neq 0$ et p l'ordre du zéro à l'origine, B le produit de BLASCHKE associé à ces zéros et où μ est une mesure positive bornée sur $[-\pi, \pi]$ singulière par rapport à la mesure de LEBERGUE (i.e., $d\mu/d\lambda = 0 \forall \lambda$ p.p. sur $[-\pi, \pi]$).

Ainsi, tout filtre réalisable et dissipatif pourra être factorisé de façon unique. De plus, si le filtre f est une fraction rationnelle dont les pôles sont à l'extérieur de \overline{D} donc appartenant à H^2 , la composante singulière disparaît.

Le lecteur intéressé par la théorie de l'espace H^2 et plus généralement les espaces H^p pourra consulter BELA Sz. NAGY [18], DUREN [7], DYM [8], HOFFMAN [14], HELSON [12], KOOSIS [17], RUDIN [28], RUCKEBUSCH [26], STEIN [30], WIENER [34].

(1) On peut identifier $L^2(T)$ et $L_c^2[-\pi, \pi]$ cf. RUDIN [28].

REMARQUE

Dans cet exposé, seuls les filtres scalaires ont été étudiés. Il est cependant possible de généraliser les résultats présentés au cas vectoriel (cf. BELA S. NAGY [18], HANNAN [11], ROBINSON [21], ROZANOV [24] et [25], RUCKEBUSCH [27], WIENER [34]).

Lorsque l'on cherche à approximer un filtre discret réalisable dont la réponse impulsionnelle est une suite infinie, il est souvent intéressant d'utiliser la sous classe des filtres récurrents autorégressif-moyenne mobiles (ARMA). Un filtre de cette sous classe transforme l'entrée ξ en une sortie y de la forme

$$y_t = \sum_{j=1}^r (-\delta_j) y_{t-j} + \sum_{k=0}^s \omega_k \xi_{t-k} \quad (2.8)$$

L'équation aux différences (2.8) peut s'écrire sous forme plus compacte

$$\delta(B) y_t = \omega(B) \xi_t \quad (2.9)$$

où
$$\delta(B) = \sum_{j=0}^r \delta_j B^j, \quad \delta_0 = 1$$

et
$$\omega(B) = \sum_{k=0}^s \omega_k B^k$$

où B est l'opérateur de décalage arrière

$$B y_t = y_{t-1}, \quad B^m y_t = B^{m-1}(B y_t) = y_{t-m}$$

La filtre ARMA (r, s) a pour fonction de transfert la fraction rationnelle

$$h(z) = \frac{\omega(z)}{\delta(z)}$$

et pour réponse impulsionnelle la fraction

$$\hat{h}(\lambda) = \frac{\omega(e^{-i\lambda})}{\delta(e^{-i\lambda})} = \frac{\sum_{k=0}^s \omega_k e^{-i\lambda k}}{\sum_{j=0}^r \delta_j e^{-i\lambda j}} \quad (2.10)$$

On peut montrer (cf. KOOPMANS p. 174) qu'une condition suffisante pour que le filtre ARMA soit réalisable et dissipatif est que le polynôme $\delta(z) = 0$ n'ait pas de racines dans le disque fermé $\bar{D} = \{z : |z| \leq 1\}$ où $\delta(z) = \sum_{j=0}^r \delta_j z^j$; $\delta_0 = 1$.

La classe des modèles considérés par BOX et TIAO pour modéliser des séries temporelles soumises à des interventions connues sont de la forme

$$z_t = \sum_{j=1}^k Y_{jt} + N_t = \sum_{j=1}^k \frac{\omega_j(B)}{\delta_j(B)} \xi_{jt} + \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} a_t \quad (2.11)$$

où la sortie finale z_t est représentée comme la somme des sorties $Y_j (1 \leq j \leq k)$ transformées respectivement des variables exogènes entrées ξ_j par les filtres de fonctions de transfert respectivement $\omega_j(z)/\delta_j(z)$

$$Y_{jt} = \frac{\omega_j(B)}{\delta_j(B)} \xi_{jt} \quad , \quad 1 \leq j \leq k \quad (2.12)$$

où $\omega_j(B)$ et $\delta_j(B)$ sont des polynômes de degrés s_j et r_j respectivement. Les racines du polynôme $\omega_j(z)=0$ (respectivement $\delta_j(z)=0$) sont supposées être à l'extérieur du disque unité \mathbb{D} (respectivement $\overline{\mathbb{D}}$). Le bruit N_t différence entre z_t et $\sum Y_{jt}$ est représenté par un processus récuratif ARMA

$$\varphi(B) N_t = \theta(B) a_t \quad (2.13)$$

où le polynôme moyenne mobile $\theta(z)$ a ses racines à l'extérieur du disque fermé $\overline{\mathbb{D}}$ (condition d'inversibilité et où le polynôme autorégressif $\varphi(z)$ se factorise en général sous la forme

$$\varphi(z) = (1 - B)^d (1 - B^s)^D \phi(z) ;$$

s, d, D entiers positifs ou nuls où les racines du polynôme $\phi(z)$ sont à l'extérieur du disque fermé $\overline{\mathbb{D}}$. Enfin, on fait l'hypothèse

- (i) $\{a_t\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, distribuées suivant une loi normale $N(0, \sigma^2)$
- (ii) chacune des variables exogènes (ou indicateurs) entrées ξ_{jt} est indépendante du bruit N_t .

Dans l'analyse d'intervention, les variables exogènes ou indicateurs $\xi_j (1 \leq j \leq k)$ prennent les valeurs 1 et 0 pour représenter l'occurrence ou la non occurrence d'interventions connues.

La classe des modèles d'intervention (2.12) considérés par BOX et TIAO est donc constituée des filtres dissipatifs et réalisables telle que la réponse impulsionnelle associée à chacun de ces filtres est une fraction rationnelle en $e^{-i\lambda}$. On peut remarquer aussi que le bruit N_t éventuellement transformé par le filtre $(1 - B)^d$ et plus généralement par le filtre $(1 - B)^d (1 - B^s)^D$ (où s est la saisonnalité du processus et D un entier positif ou nul) est la sortie d'un filtre réalisable et dissipatif dont la réponse impulsionnelle est une fraction rationnelle en $e^{-i\lambda}$. Les fonctions de transfert associées respectivement aux interventions et au bruit stochastique stationnarisé appartiennent donc à l'espace de HARDY H^2 . Il est donc possible d'utiliser d'une part les théorèmes de factorisation dans l'espace H^2 et d'autre part l'isomorphisme d'espace de HILBERT entre H^2 et $L^2_+(T)$.

La classe des modèles d'intervention de BOX et TIAO (2.11) peut être illustrée à l'aide de la figure 1 en utilisant la terminologie et les schémas des automaticiens.

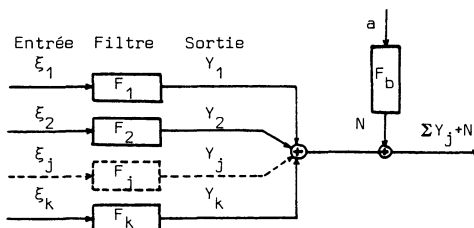


Figure 1. — Structure des filtres.

On utilise principalement dans l'analyse d'intervention deux types de variables exogènes ou indicateurs

– l'indicateur saut

$$\xi_t = S_t^{(T)} = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq T \\ 0 & \text{pour } t < T \end{cases}$$

– l'indicateur de pulsion

$$\xi_t = P_t^{(T)} = \begin{cases} 1 & \text{pour } t = T \\ 0 & \text{pour } t \neq T \end{cases}$$

Différents modèles dynamiques caractérisant les effets d'intervention ont été présentés par ABRAHAM [1], BHATTACHARYYA [3], BOX et TIAO [5] et [31], TIAO, BOX et HAMMING [31], GRUPE [10], HIPEL [13], JENKINS [15], PACK [20], SCHWARZ [29], WICHERN [33].

Par exemple si l'intervention à une période T est représentée par la série $P_t^{(T)}$ avec une réponse décroissante exponentiellement à partir de la période suivante, alors le modèle dynamique sera donné par

$$Y_t = \frac{\omega_0}{1 - \delta B} P_t^{(T)} \quad \text{avec } |\delta| < 1 \quad (2.14)$$

i.e.,



En effet, il suffit de développer la fraction $1/(1 - \delta B)$ de (2.14) en série entière i.e.,

$$\frac{1}{1 - \delta B} = 1 + \delta B + \delta^2 B^2 + \dots + \delta^n B^n + \dots, \quad |\delta| < 1$$

3. PREVISIONS A PARTIR DU MODELE D'INTERVENTION

Dans cette partie on suppose que le processus $\{z_t; t \in Z\}$ est solution du modèle d'intervention (2.11) de BOX et TIAO et on calcule le prédicteur linéaire optimal de l'observation future z_{n+l} (au sens de l'espérance de l'erreur quadratique minimale, critère noté MSE). Enfin, on exhibe le biais de prédiction lorsque l'on ignore la partie déterministe du modèle d'intervention. Ce calcul du biais de prédiction nous permet de discuter de l'adaptabilité des prédictions, issues de modèles ARIMA, aux indicateurs sauts et impulsions.

Pour la clarté de l'exposé nous reportons en annexe la plupart des démonstrations

Théorème

Soit le processus $\{z_t; t \in Z\}$ solution de l'équation stochastique aux différences

$$z_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \xi_t + \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} a_t \quad (3.1)$$

où $\{\xi_t; t \in Z\}$ est une suite non aléatoire de 0 et 1 et $\{a_t; t \in Z\}$ un processus bruit blanc gaussien où les a_t sont indépendants. Il est supposé en outre que $\varphi(B) = (1 - B)^d (1 - B^s)^D \phi(B)$ et les zéros des polynômes $\phi(z)$ et $\theta(z)$ sont à l'extérieur du disque unité fermé \bar{D} .

Alors le prédicteur linéaire optimal (vis-à-vis du critère minimum de l'espérance de l'erreur quadratique de prévision) de l'observation future $z_{n+\nu}$ ($\nu \geq 1$) basée sur les données du passé z_n, z_{n-1}, \dots est l'espérance de $z_{n+\nu}$ conditionnellement aux valeurs observées du processus. Cette espérance conditionnelle notée $\hat{z}_n(\nu)$ se calcule par la relation

$$z_n(\nu) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(\nu)} z_{n+1-j} + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \left[\xi_{n+\nu} - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(\nu)} \xi_{n+1-j} \right] \quad (3.2)$$

$$\text{où} \quad \pi_j^{(\nu)} = \pi_{j+\nu-1} + \sum_{i=1}^{\nu-1} \pi_i \pi_j^{(\nu-i)} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

et $\pi_j^{(1)} = \pi_j$ où la suite $\{\pi_j; j \in \mathbb{N}\}$ représente les coefficients dans le développement en série entière de

$$\pi(B) = [\theta(B)/\varphi(B)]^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-\pi_j) B^j \quad ; \quad -\pi_0 = 1 \quad (3.4)$$

Preuve : voir l'annexe 1.

*
* * *

Supposons maintenant que l'on fasse une prédiction de la valeur future $z_{n+\nu}$ en ignorant les effets de l'intervention ξ qui s'est produite à T ($n > T$). Dans ce cas, le prédicteur linéaire optimal est donné par (cf. BOX et JENKINS [4]).

$$\tilde{z}_n(\nu) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(\nu)} z_{n+1-j} \quad (3.5)$$

Il est alors possible de calculer le biais de prédiction lorsque l'on ignore cette intervention, à partir des relations (3.2) et (3.5).

$$\delta_n(\nu) = \hat{z}_n(\nu) - \tilde{z}_n(\nu) = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \left[\xi_{n+\nu} - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(\nu)} \xi_{n+1-j} \right] \quad (3.6)$$

On peut donc à partir de ce biais, illustrer l'adaptabilité de la fonction prédiction lorsque le processus z_t évolue suivant un modèle avec intervention du type (2.11).

a) Cas d'une intervention avec l'indicateur saut $S_t^{(T)} = 0$ pour $t < T$ et 1 pour $t \geq T$ et d'une réponse de la forme $\omega(B)/\delta(B) = \omega_0$.

Le biais de prédiction pour l'époque $n + \nu$ avec $\nu \geq 1, n > T$ se calcule par (3.6) et

$$\delta_n(\nu) = \omega_0 [1 - \pi_1^{(\nu)} - \pi_2^{(\nu)} - \dots - \pi_{n+1-T}^{(\nu)}] \quad (3.7)$$

Il est alors intéressant de se demander si le biais converge vers zéro lorsque n augmente indéfiniment pour T fixé.

Lemme 1

Si le processus z_t , en ignorant la partie intervention, évolue suivant un modèle non stationnaire ARIMA

$$\varphi(B) z_t = \theta(B) a_t$$

où les racines de $\theta(z) = 0$ sont à l'extérieur du disque fermé \bar{D} et tel que $\varphi(z) = 0$ admette la racine unité (i.e. $\varphi(B) = (1 - B)^d (1 - B^D)^D \phi(B)$ avec $\max(d, D) > 0$), alors

$$1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(\nu)} = 0 \quad ; \quad \nu \geq 1 \quad (3.8)$$

Preuve

Ce lemme se démontre à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Pour $\nu = 1$, $\pi(B) = \frac{\varphi(B)}{\theta(B)} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j$

puisque $\varphi(z) = 0$ admet la racine unité et sachant que $\theta(z) = 0$ a ses racines à l'extérieur du disque fermé \bar{D} (condition d'inversibilité), cela implique que

$$\pi(1) = 0 = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j$$

Supposons maintenant que la relation (3.8) soit vraie pour $\nu - 1$, alors

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(\nu)} &= 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \left[\pi_{j+\nu-1} + \sum_{i=1}^{\nu-1} \pi_i \pi_j^{(\nu-i)} \right] \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{j+\nu-1} - \sum_{i=1}^{\nu-1} \pi_i \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(\nu-i)} \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{j+\nu-1} - \left(\sum_{i=1}^{\nu-1} \pi_i \right) \end{aligned}$$

En posant $k = j + \nu - 1$, on obtient

$$1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(\nu)} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k = 0 \quad \blacksquare$$

Le calcul du biais de prédiction donné par la relation (3.7) et le lemme 1 montrent que les modèles stochastiques non stationnaires ARIMA s'auto-adaptent à des changements de niveau liés à des interventions du type saut. En d'autres termes, le biais de prédiction quand on ignore l'intervention tend vers zéro lorsque la période à partir de laquelle on fait des prévisions s'éloigne de la date d'intervention.

b) Cas d'une intervention avec l'indicateur impulsion $P_t^{(T)} = 0$ pour $t \neq T$ et 1 pour $t = T$ et d'une réponse de la forme $\omega(B)/\delta(B) = \omega_0$.

Le biais de prédiction se calcule par

$$\delta_n(\nu) = -\omega_0 \pi_{n+1-T}^{(\nu)} \quad \text{avec} \quad n - T \geq 0 \quad (3.9)$$

Le biais convergera donc vers zéro si la suite $\{\pi_{n+1-T}^{(\nu)}\}$ converge vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Compte tenu de la relation de récurrence (3.3) liant les poids $\pi_j^{(\nu)}$, il est clair qu'il est équivalent d'étudier le comportement de la suite des $\{\pi_k, k \in \mathbb{N}\}$. Ces poids sont les coefficients de la série entière

$$\pi(B) = \frac{\varphi(B)}{\theta(B)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\pi_k) B^k \quad ; \quad -\pi_0 = 1 \quad (3.10)$$

Si le modèle ARIMA est inversible i.e., les racines $\{a_i\}$ du polynôme $\theta(z) = 0$ sont à l'extérieur du disque \bar{D} , alors la série entière $\pi(z)$ est convergente dans le disque $\bar{D}(0, \rho)$ avec $1 < \rho < \min |a_i|$. La vitesse de convergence de la suite $\{\pi_k\}$ vers zéro est donc liée à la proximité de la racine de plus petit module à la frontière T du disque unité D .

Nous allons maintenant énoncer et démontrer en annexe un lemme qui permettra d'étudier la vitesse de convergence vers zéro de la suite $\{\pi_k, k \in \mathbb{N}\}$.

Lemme 2

Soient P et Q deux polynômes en z à coefficients complexes sans facteurs communs où les racines de $Q(z) = 0$ sont à l'extérieur du disque unité $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1\}$. Alors

$$\frac{P}{Q}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{pour} \quad z \in \bar{D} \quad (3.11)$$

et il existe deux constantes réelles A et B strictement positives telles que

$$|c_k| \leq A e^{-Bk} \quad , \quad \forall k \geq 0$$

On peut donc en appliquant le lemme précédent à la fraction rationnelle $\varphi(z)/\theta(z)$ définie en (3.10) conclure que si les zéros a_1, a_2, \dots, a_q de $\theta(z)$ sont à l'extérieur du disque fermé \bar{D} alors les poids $\{\pi_k\}$ tendent vers zéro et

$$|\pi_k| \leq A e^{-Bk} \quad \text{avec} \quad A > 0 \quad , \quad B = \frac{1}{2} \text{Log } |a| > 0$$

où $|a| = \min |a_i|$; $i = 1, 2, \dots, q$.

Sous ces conditions de biais de prédiction $\delta_n(\nu)$ donné par la relation (3.7) converge vers zéro lorsque le temps présent n s'éloigne de la date T d'intervention. La convergence vers zéro (de type décroissance exponentielle) est d'autant plus rapide que le minimum des valeurs absolues des zéros du polynôme $\theta(z)$ est éloigné de 1.

4. EXEMPLES D'APPLICATION

La méthode développée par BOX et JENKINS et l'analyse des interventions de BOX et TIAO ont été utilisées pour analyser le trafic aérien national passagers et mesurer les effets dynamiques des deux principales grèves des contrôleurs aériens qui se sont déroulées en Février, Mars 1973 et Novembre, Décembre 1979.

L'estimation des différents modèles a été faite en utilisant l'historique du trafic mensuel de Janvier 1969 à Mars 1980 (cf. Annexe 2). Une partie de l'évolution de ce trafic est représentée à la figure 1.

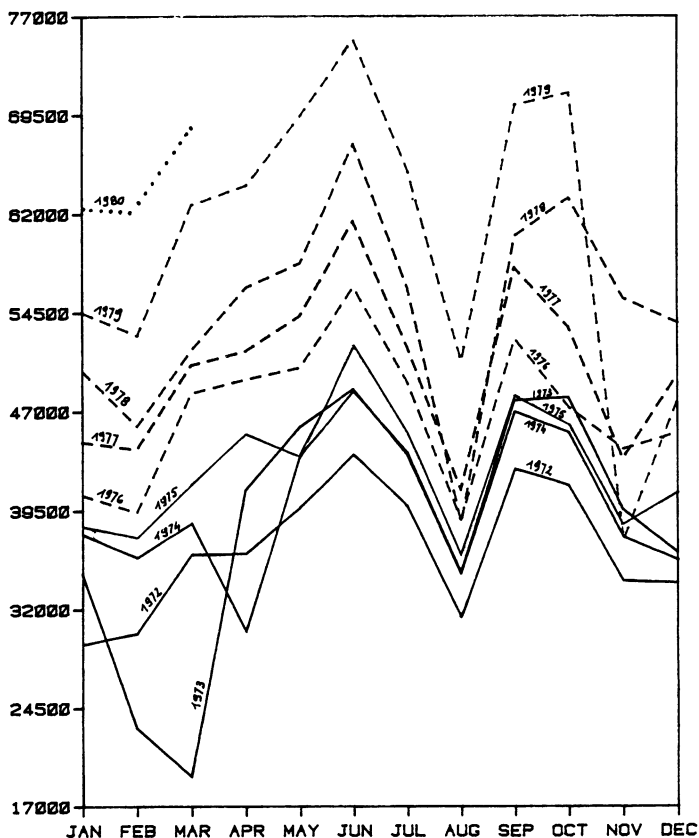


Figure 1. — Trafic passagers national.

a) Construction du modèle incorporant l'effet de grève en Février et Mars 1973

La modélisation a porté sur la tranche d'historique du trafic commençant en Janvier 1969 et se terminant en Septembre 1979.

Une analyse préalable par la méthode classique de BOX et JENKINS a permis de retenir deux modèles (en fait ces deux modèles ont été estimés sur un historique tronqué pour les six dernières observations et des prévisions ont été générées sur la période éliminée. Les critères de sélection des modèles ont été de deux types : les critères classiques de BOX et JENKINS sur la période d'estimation et les critères MAPE⁽¹⁾ et RMSE⁽²⁾ sur la période de prévisions simulées). Les caractéristiques des deux modèles retenus M_1 et M_2 sont résumées dans la table 1.

Pour tenir compte de la baisse dramatique du niveau du trafic lors de la grève des contrôleurs aériens français en Février et Mars 1973 (cf. fig. 1) il a été inclus dans chacun des modèles (M_1) et (M_2) une fonction d'intervention comportant deux interventions.

Les deux interventions correspondant à la grève de Février et Mars 1973 respectivement ont été modélisées à l'aide de l'indicateur pulsion en supposant que chacune des grèves produisait une réponse instantanée définie par une baisse du trafic de la valeur ω_1 et ω_2 pour Février et Mars respectivement. En outre une réponse dynamique dans le temps de type exponentiel a été incorporée dans la modélisation afin de prendre en compte une récupération éventuelle du trafic à partir d'Avril. Cette dernière hypothèse sera à tester en regardant la significativité des coefficients de la fonction réponse dynamique du filtre.

Compte tenu de ce qui précède la fonction d'intervention déterministe se modélise sous la forme

$$Y_t = f(\omega, \delta, P, t) = \omega_1 P_t^{(Fev)} + \left(\omega_2 + \frac{\omega_3 B}{1 - \delta B} \right) P_t^{(Ma)} \quad (4.1)$$

où

$$P_t^{(Fev)} = \begin{cases} 1 & \text{si } t = \text{Février 1973} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad P_t^{(Ma)} = \begin{cases} 1 & \text{si } t = \text{Mars 1973} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le modèle (4.1) peut encore s'écrire sous la forme équivalente

$$Y_t = \omega_1 P_t^{(Fev)} + \omega_2 P_t^{(Ma)} + \frac{\omega_3}{1 - \delta B} P_t^{(Av)} \quad (4.2)$$

avec

$$P_t^{(Av)} = \begin{cases} 1 & \text{si } t = \text{Avril 1973} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les hypothèses qui ont permis de construire le modèle (4.1) ou (4.2) peuvent être résumées dans la figure 2.

(1) MAPE = $\frac{1}{h} \sum_{\ell=1}^h 100 |e_n(\ell)| / z_{n+\ell}$; $e_n(\ell)$: erreur de prévision à $n + \ell$

(2) RMSE = $\sum_{\ell=1}^h \{e_n^2(\ell)/h\}^{1/2}$

TABLE 1
Modèles ajustés sur la période : Janvier 1969 à Septembre 1979

Modèle	Estimation des paramètres et écart type estimé SE des paramètres	Ecart type estimé $\hat{\sigma}_a$ du bruit a_t	Index de determi- nation	MAPE %	Statistique Q de Box et Pierre
$(M_1) (1-\phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3) (1-\Phi B^{12}) \omega_t = a_t$ $\omega_t = (1-B) (1-B^{12}) z_t$	$\hat{\phi}_1 = -0,306$ SE ($\hat{\phi}_1$) = 0,093	$\hat{\sigma}_a = 3663$	0,885	6,34 %	Q(24) = 27,14 ddl = 20
	$\hat{\phi}_1 = -0,360$ SE ($\hat{\phi}_2$) = 0,089	ddl = 97			
	$\hat{\phi}_3 = -0,240$ SE ($\hat{\phi}_3$) = 0,090				
	$\hat{\Phi} = -0,696$ SE ($\hat{\Phi}$) = 0,068				
$(M_2) (1-\phi_2 B^2) (1-\Phi B^{12}) \omega_t = (1-\Theta B) a_t$ $\omega_t = (1-B) (1-B^{12})$	$\hat{\phi}_2 = -0,352$ SE ($\hat{\phi}_2$) = 0,096	$\hat{\sigma}_a = 3927$	0,867	6,76 %	Q(24) = 17,64 ddl = 21
	$\hat{\phi} = -0,693$ SE ($\hat{\Phi}$) = 0,073	ddl = 99			
	$\hat{\theta} = 0,317$ SE ($\hat{\theta}$) = 0,098				

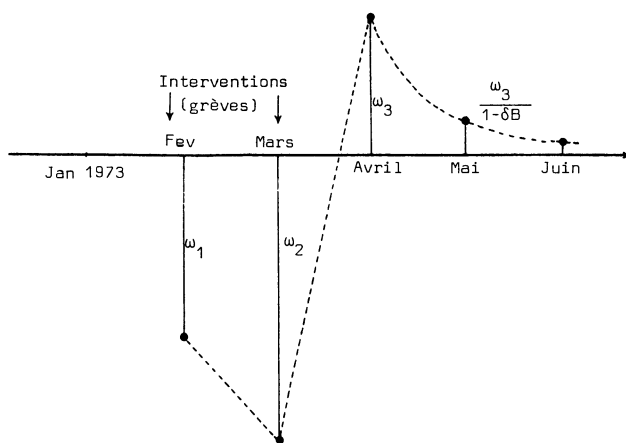


Figure 2. – Fonction d'intervention.

Les modèles d'intervention dans lesquels le bruit N_t évolue suivant un modèle ARIMA de type M_1 ou M_2 et notés respectivement $M_1 I^{73}$ et $M_2 I^{73}$ ont été estimés sur la période s'étendant de Janvier 1969 à Septembre 1979. Les paramètres estimés⁽¹⁾ du modèle $M_1 I^{73}$ et $M_2 I^{73}$ figurent dans la table 2. Pour le modèle $M_1 I$ on constate à partir des écarts types estimés SE des estimateurs qu'il est possible d'accepter (au seuil 95 %) la non nullité des paramètres $\underline{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \Phi)$ du modèle d'évolution du bruit N_t (cf. la table 1). En ce qui concerne les paramètres du modèle d'intervention $f_1(\omega, \delta, \underline{p}, t)$ on constate que la perte de trafic pour Février et Mars 73 est estimée respectivement à $\hat{\omega}_1 = -7676(10^1)$ et $\hat{\omega}_2 = -12970(10^1)$ passagers. Une première estimation de la *perte globale* sur les deux mois de grève est donc évaluée à 206 460 passagers.

Par contre bien que le coefficient estimé δ soit significativement différent de zéro, le coefficient ω_3 estimé à $2020(10^1)$ est significativement nul (l'écart type estimé vaut $2810(10^1)$). Dans ces conditions on ne peut pas affirmer (*statistiquement*) qu'il y a un phénomène de récupération qui joue après la grève.

La même constatation peut être déduite des valeurs estimées du modèle $M_2 I$ où le bruit N_t suit un processus du type M_2 . Sous cette hypothèse, la perte $\hat{\omega}_1$ (respect. $\hat{\omega}_2$) pour Février 73 (respect. Mars 73) vaut 8619.10^1 (respect. 12136.10^1) soit pour les deux mois de grève une *perte totale* estimée à 207550 passagers.

Les coefficients estimés $\hat{\omega}_3$ pour le modèle $M_1 I$ et $\hat{\omega}_3, \delta$ pour le modèle $M_2 I$ étant significativement égaux à zéro (au seuil $\alpha = 5\%$) il convient de réestimer les modèles compte tenu de ces nouvelles hypothèses. Les estimations définitives des deux modèles sont présentés dans la table 3.

(1) Estimation par l'algorithme des moindres carrés non linéaire de GRUPE [10].

TABLE 2

Modèles ajustés sur la période Janvier 1969 à Septembre 1979
avec interventions pour la grève en Février et Mars 1973

Modèle	Estimation des paramètres et écart type estimé SE des estimateurs	Ecart type estimé $\hat{\sigma}_a$ du bruit a_t	Index de détermi- nation	Statistique
$M_1 I^{73} \quad z_t = \omega_1 P_t^{(Fev)} + \omega_2 P_t^{(Ma)} + \frac{\omega_3}{1-\delta B} P_t^{(Av)}$ $+ \{\theta_1(B)/\varphi_1(B)\} a_t$ où $\frac{\theta_1(B)}{\varphi_1(B)} = 1/\{(1-\phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3)(1-\hat{\phi} B^{12})(1-B)(1-B^{12})\}$	$\hat{\phi}_1 = -0,394 \quad SE(\hat{\phi}_1) = 0,092$ $\hat{\phi}_2 = -0,307 \quad SE(\hat{\phi}_2) = 0,093$ $\hat{\phi}_3 = -0,288 \quad SE(\hat{\phi}_3) = 0,087$ $\hat{\phi} = -0,576 \quad SE(\hat{\phi}) = 0,085$ $\hat{\omega}_1 = -7676 \quad SE(\hat{\omega}_1) = 2579$ $\hat{\omega}_2 = -12970 \quad SE(\hat{\omega}_2) = 3058$ $\hat{\omega}_3 = 2020 \quad SE(\hat{\omega}_3) = 2810$ $\hat{\delta} = 0,895 \quad SE(\hat{\delta}) = 0,409$	$\hat{\sigma}_a = 3205$ $ddl = 93$	0,915	$Q(36) = 24,87$ $ddl = 28$ $\tilde{Q}(12) = 9,20^{(1)}$ $ddl = 4$ $\tilde{Q}(24) = 14,23$ $ddl = 16$ $\tilde{Q}(36) = 32,61$ $ddl = 28$
$M_2 I^{73} \quad z_t = \omega_1 P_t^{(Fev)} + \omega_2 P_t^{(Ma)} + \frac{\omega_3}{1-\delta B} P_t^{(Av)}$ $+ \{\theta_2(B)/\varphi_2(B)\} a_t$ où $\frac{\theta_2(B)}{\varphi_2(B)} = (1-\theta B)/\{(1-\phi_2 B^2)(1-\Phi B^{12})(1-B)(1-B^{12})\}$	$\hat{\phi}_2 = -0,273 \quad SE(\hat{\phi}_2) = 0,101$ $\hat{\phi} = -0,589 \quad SE(\hat{\phi}) = 0,091$ $\hat{\omega}_1 = -8619 \quad SE(\hat{\omega}_1) = 2904$ $\hat{\omega}_2 = -12136 \quad SE(\hat{\omega}_2) = 3477$ $\hat{\omega}_3 = 1720 \quad SE(\hat{\omega}_3) = 3117$ $\hat{\delta} = 0,899 \quad SE(\hat{\delta}) = 0,523$ $\hat{\theta} = 0,369 \quad SE(\hat{\theta}) = 0,098$	$\hat{\sigma}_a = 3587$ $ddl = 95$	0,893	$Q(36) = 27,78$ $ddl = 29$ $\tilde{Q}(12) = 8,54$ $ddl = 5$ $\tilde{Q}(24) = 16,50$ $ddl = 17$ $\tilde{Q}(36) = 36,61$ $ddl = 29$

(1) Statistique de LJUNG-BOX $\tilde{Q}(K) = n(n+2) \sum_1^K (n-k)^{-1} \hat{f}_k^2(\hat{a})$.

TABLE 3
Modèles sélectionnés avec interventions

Modèle	Estimation des paramètres et écart-type estimé SE des estimateurs	Ecart-type estimé $\hat{\sigma}_a$ du bruit a_t	Index de détermination	Statistique
$M_1 I^{73}$	$\hat{\phi}_1 = -0,387$ SE($\hat{\phi}_1$) = 0,091 $\hat{\phi}_2 = -0,304$ SE($\hat{\phi}_2$) = 0,092 $\hat{\phi}_3 = -0,283$ SE($\hat{\phi}_3$) = 0,087 $\hat{\Phi} = -0,574$ SE($\hat{\Phi}$) = 0,081 $\hat{\omega}_1 = -8333$ SE($\hat{\omega}_1$) = 2352 $\hat{\omega}_2 = -14158$ SE($\hat{\omega}_2$) = 2463	$\hat{\sigma}_a = 3173$	0,919	$\tilde{Q}(12) = 6,93$ ddl = 6 $\tilde{Q}(24) = 13,41$ ddl = 18 $\tilde{Q}(36) = 30,15$ ddl = 30 $Q(36) = 23,04$ ddl = 30
$M_2 I^{73}$	$\hat{\phi}_2 = -0,273$ SE($\hat{\phi}_2$) = 0,099 $\hat{\Phi} = -0,273$ SE($\hat{\Phi}$) = 0,087 $\hat{\omega}_1 = -9115$ SE($\hat{\omega}_1$) = 2665 $\hat{\omega}_2 = -13157$ SE($\hat{\omega}_2$) = 2803 $\hat{\theta} = 0,363$ SE($\hat{\theta}$) = 0,096	$\hat{\sigma}_a = 3544$	0,898	$\tilde{Q}(12) = 7,28$ ddl = 7 $\tilde{Q}(24) = 14,95$ ddl = 19 $\tilde{Q}(36) = 34,67$ ddl = 31 $Q(36) = 26,25$ ddl = 31

Les pertes globales pour les mois de Février et Mars sont évaluées à 224 910 et 222 720 passagers pour les modèles $M_1 I^{73}$ et $M_2 I^{73}$ respectivement.

Les graphiques superposés du trafic observé et estimé avec et sans interventions pour la période Février-Juillet 1973 sont représentés dans la figure 3.

b) Construction du modèle incorporant l'effet de grève en Novembre et Décembre 1979

Une démarche similaire à celle proposée dans l'exemple a) a été utilisée pour modéliser les effets de grèves des contrôleurs aériens survenues en Novembre et Décembre 1979. Pour justifier sur le plan statistique l'introduction de fonction d'intervention dans le modèle stochastique, il a été mis en œuvre le test de BOX et TIAO [6]. Ce test permet de détecter un changement éventuel du modèle sur la période allant de Novembre 1979 à Mars 1980 (Mars étant la dernière observation disponible).

Ce test permet de tester si globalement les différences entre observations et prévisions simulées sont significativement différentes de zéro sur la période de changement suspectée.

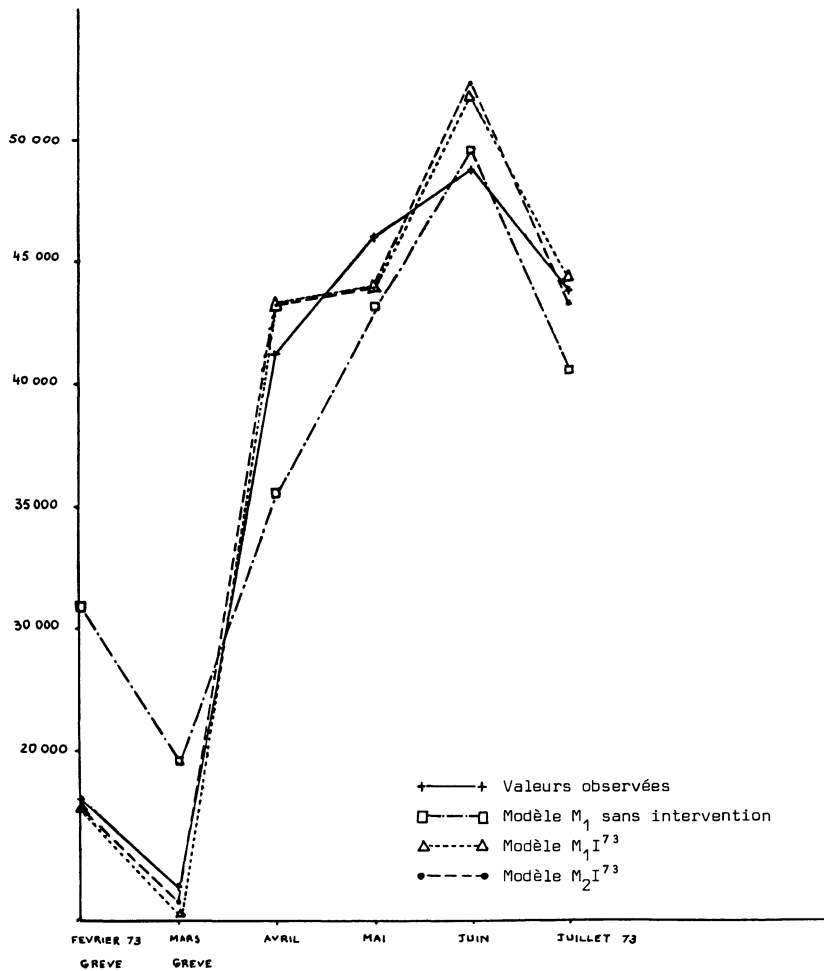


Figure 3. — Comparaison entre les valeurs observées et les valeurs estimées par les modèles M_1 , M_{1I} et M_{2I} .

Si l'on suppose que z_t évolue suivant un processus ARIMA $\varphi(B)z_t = \theta(B)a_t$ alors on peut montrer que l'erreur de prévision faite en $n + \nu$ ($\nu \geq 1$) pour des prévisions générées à partir de l'époque présente n est donnée par (cf. BOX et JENKINS [4] page 128)

$$e_n(\nu) = z_{n+\nu} - \hat{z}_n(\nu) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \Psi_j a_{n+\nu-j} \quad ; \quad \Psi_0 = 1 \quad (4.3)$$

où la séquence des poids $1, \Psi_1, \dots, \Psi_{\nu-1}$ est obtenue en prenant les ν premiers coefficients dans le développement en série entière de $\Psi(B) = \theta(B)\varphi^{-1}(B)$ et où $\{a_t\}$ est un processus bruit blanc gaussien i.e.,

$$E(a_t) = 0 \quad ; \quad E(a_t a_s) = \delta_{ts} \sigma^2 \quad ; \quad a_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (4.4)$$

En notant par \underline{e}_n^m le vecteur de composantes $e_n(1), \dots, e_n(m)$, \underline{a}_n^m le vecteur de composantes a_{n+1}, \dots, a_{n+m} et par $\underline{\Psi}_m$ la matrice triangulaire basse de dimension (m, m) :

$$\underline{\Psi}_m = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ \Psi_2 & 1 & & & & & \\ \Psi_2 & \Psi_1 & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \Psi_m & \Psi_{m-1} & \dots & 1 & & & \\ & & & & & & [0] \end{bmatrix}$$

on a la relation évidente

$$\underline{e}_n^m = \underline{\Psi}_m \underline{a}_n^m \quad (4.5)$$

En remarquant que la matrice de covariance du vecteur \underline{e}_n^m vaut $\sigma^2 \underline{\Psi}_m \underline{\Psi}_m'$ sous les conditions (4.4), il s'ensuit que sous l'hypothèse nulle : le modèle estimé jusqu'à l'époque n est approprié sur l'époque $n+1, \dots, n+m$ ($m \geq 1$), la statistique

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\sigma^2} (\underline{e}_n^m)' (\underline{\Psi}_m \underline{\Psi}_m')^{-1} \underline{e}_n^m = \frac{1}{\sigma^2} (\underline{e}_n^m)' (\underline{\Psi}_m')^{-1} \underline{\Psi}_m^{-1} \underline{e}_n^m = \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (\underline{a}_n^m)' \underline{a}_n^m = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{\nu=1}^m a_{n+\nu}^2 \quad (4.6) \end{aligned}$$

est distribuée suivant un χ^2 à m degrés de liberté. La statistique Q n'est rien d'autre que la somme des carrés des erreurs de prévision, de pas un, standardisées. L'erreur de prévision de pas un étant définie par

$$a_{n+\nu} = z_{n+\nu} - \hat{z}_{n+\nu-1}(1)$$

L'utilisation du test de BOX et TIAO nécessite d'estimer préalablement la variance σ^2 du bruit. La statistique \hat{Q} obtenue en remplaçant σ^2 par son estimateur $\hat{\sigma}^2$ suit alors approximativement une loi du χ_m^2 lorsque n est suffisamment grand (cf. BOX et TIAO [6] page 197). La statistique \hat{Q} peut ainsi être calculée connaissant les poids Ψ_1, \dots, Ψ_m et $\hat{\sigma}^2$ et être comparée au fractile $\chi_m^2(p)$.

La valeur estimée de Q sur la période allant de Novembre 1979 à Mars 1980 pour le modèle M_1^{79} retenu (estimé jusqu'en Octobre 1979) étant de 45,27, il convient de rejeter l'hypothèse nulle de stabilité du modèle M_1^{79} au seuil $\alpha = 0,05$ ($\chi_5^2(0,95) = 11,1$). Il est donc parfaitement justifié d'utiliser un modèle avec interventions.

*
* *
*

Les analyses statistiques ont permis de retenir le modèle avec interventions suivant

$$(M_1 I^{79}) \quad z_t = f(\omega, P, t) + N_t \quad (4.7)$$

où

$$N_t = \text{ARIMA}_{s=12}(3, 1, 0; 1, 1, 0)$$

$$f(\omega, P, t) = \omega_1 P_t^{(\text{Nov})} + \omega_2 P_t^{(\text{Dec})}$$

TABLE 4
 Modèle ajusté sur la période Janvier 1969 à Mars 1980
 avec fonctions d'intervention en Novembre et Décembre 1979

Modèle	Estimation et écart type SE	Ecart type estimé $\hat{\sigma}_a$	Index de détermination	Statistique
$M_1 I^{79} z_t = \omega_1 P_t^{(Nov)} + \omega_2 P_t^{(Dec)} + \{\theta_1(B)/\varphi_1(B)\} a_t$	$\hat{\phi}_1 = -0,307$ SE($\hat{\phi}_1$) = 0,092 $\hat{\phi}_2 = -0,365$ SE($\hat{\phi}_2$) = 0,088 $\hat{\phi}_3 = -0,244$ SE($\hat{\phi}_3$) = 0,089 $\hat{\Phi} = -0,688$ SE($\hat{\Phi}$) = 0,067 $\hat{\omega}_1 = -23447$ SE($\hat{\omega}_1$) = 3284 $\hat{\omega}_2 = -14835$ SE($\hat{\omega}_2$) = 3342	$\hat{\sigma}_a = 3605$ ddl = 101	0,900	$Q(36) = 35,25$ ddl = 30 $\tilde{Q}(12) = 10,94$ ddl = 6 $\tilde{Q}(24) = 33,99$ ddl = 18 $\tilde{Q}(36) = 42,64$ ddl = 30

où $P_t^{(Nov)}$ (respect. $P_t^{(Dec)}$) est l'indicateur qui prend la valeur 1 si $t = Nov$ (respect. $t = Dec$) et 0 sinon (respect. 0 sinon).

Les estimations des paramètres du modèle retenu sont présentées dans la table 4. Ce modèle indique qu'il n'y a pas de récupération dynamique du trafic passagers (au seuil 5 %). La perte totale sur les deux mois de grève est évaluée à 383 820 passagers.

Considérons le modèle M_1^{80} estimé sur la période allant de Janvier 1969 à Mars 1980 et dont l'équation est donnée par

$$(1 + 0,296 B + 0,392 B^2 + 0,225 B^3) (1 + 0,721 B^{12})$$

$$[0,094] \quad [0,089] \quad [0,096] \quad [0,081]$$

$$(1 - B) (1 - B^{12}) z_t = \hat{a}_t$$

[4405]

Compte tenu du théorème et du lemme 2, le biais de prédiction $\delta_n(\nu)$ lorsque l'on ignore la partie intervention, converge vers zéro quand le temps présent s'éloigne de la période T d'intervention. Cela signifie que le modèle M_1^{80} dont le polynôme moyenne mobile est inversible s'auto-adapte en présence d'interventions de type impulsion et de réponses de la forme $\omega(B)/\delta(B) = \omega_0$.

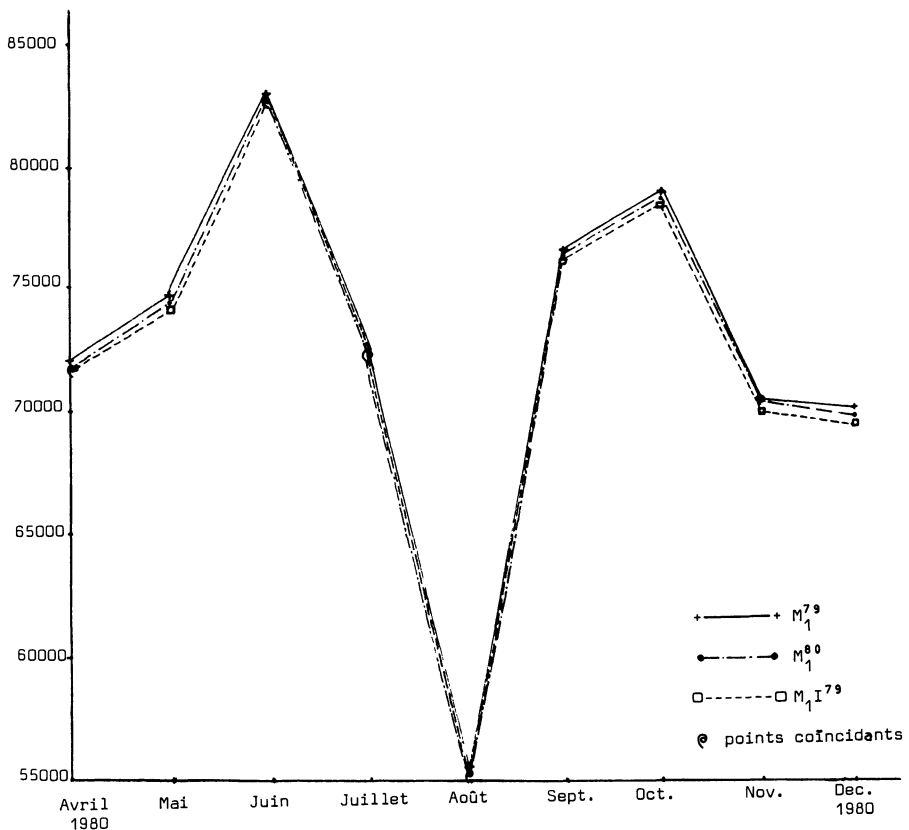


Figure 4. - Evolution des prédictions

D'autre part, nous avons représenté en figure 4 l'évolution des prédictions faites en Mars 1980 pour Avril, Mai, ..., Décembre 1980 à l'aide des modèles : M_1^{79} , M_1^{80} , M_1^{179} estimés respectivement sur les périodes : Janvier 1969 à Octobre 1979, Janvier 1969 à Mars 1980 et Janvier 1969 à Mars 1980. On constate que ces prédictions sont pratiquement confondues (pour plus de précision le lecteur peut se reporter à l'annexe 2 où figurent les valeurs numériques des prédictions).

5. CONCLUSION

Dans cet article nous avons tout d'abord présenté les modèles d'interventions de BOX et TIAO comme des filtres linéaires réalisables et dissipatifs. Nous avons montré que les fonctions de transfert associées à cette classe de filtres appartiennent à l'espace de Hardy H^2 identifié à un sous espace de $L^2(-\pi, \pi)$ par un isomorphisme d'espace de HILBERT. Nous avons alors indiqué l'intérêt d'une telle identification compte tenu des théorèmes de factorisation dans H^2 . Ces résultats peuvent d'ailleurs être étendus au cas où les variables entrées ξ_i sont des variables aléatoires. Cette extension permet alors de couvrir le cas des modèles avec fonction de transfert de BOX et JENKINS et les modèles vectoriels ARIMA lorsqu'il y a des effets de rétroactions.

Nous avons ensuite, grâce à un théorème, calculé le biais de prédiction différence entre la prévision générée par un modèle incorporant le filtre lié à l'intervention connue et celle issue d'un modèle ignorant l'intervention. Ce calcul du biais de prédiction nous a permis de montrer d'une part que les processus non stationnaires dont le polynôme autorégressif admet la racine unité s'auto-adaptant à des interventions de type saut, et d'autre part que les processus ARIMA dont le polynôme moyenne mobile est inversible s'auto-adaptant à des interventions de type impulsion. Les résultats trouvés ont été illustrés à partir de deux exemples.

ANNEXE 1

Preuve du théorème

Il est bien connu que le prédicteur optimal (au sens MSE) de l'observation future $z_{n+\nu}$ est l'espérance conditionnelle de $z_{n+\nu}$ sachant z_n, z_{n-1}, \dots . Ce prédicteur optimal est une combinaison linéaire des données du passé si le processus a_t est indépendant de $z_s, s < t$ (cf. ANDERSON [2], GRENANDER [9], HANNAN [11]).

Nous allons démontrer la relation (3.2) à l'aide d'un raisonnement par récurrence. On induit la relation pour $\nu = 1$ et 2, on admet la propriété pour $\nu - 1$ et on la démontre pour ν .

Multiplions les deux membres de l'équation (3.1) par $\pi(B)$ et remplaçons le temps t par $n + 1$, il vient

$$\pi(B) z_{n+1} = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \pi(B) \xi_{n+1} + a_{n+1} \quad (A.1)$$

Développons compte tenu de (3.4)

$$z_{n+1} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z_{n-j+1} + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \left[\xi_{n+1} - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \xi_{n-j+1} \right] + a_{n+1}$$

Prenons l'espérance conditionnelle de z_{n+1} sachant $\{z_n, z_{n-1}, \dots\} = Z^{(n)}$ et puisque $E(a_{n+1} | Z^{(n)}) = 0$, on obtient

$$E(z_{n+1} | Z^{(n)}) = \hat{z}_n(1) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z_{n+1-j} + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \left[\xi_{n+1} - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \xi_{n+1-j} \right] \quad (A.2)$$

Pour obtenir le prédicteur linéaire optimal pour $\nu = 2$, on remarque que

$$z_{n+2} = \pi_1 z_{n+1} + \sum_{j=2}^{\infty} \pi_j z_{n+2-j} + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \pi(B) \xi_{n+2} + a_{n+2}$$

soit encore

$$z_{n+2} = \pi_1 \left[\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z_{n+1-j} + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \pi(B) \xi_{n+1} + a_{n+1} \right] + \sum_{j=2}^{\infty} \pi_j z_{n+2-j} + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \pi(B) \xi_{n+2} + a_{n+2}$$

$$z_{n+2} = \sum_{j=1}^{\infty} (\pi_{j+1} + \pi_1 \pi_j) z_{n+1-j} + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \left[\xi_{n+2} - \sum_{j=1}^{\infty} (\pi_{j+1} + \pi_1 \pi_j) \xi_{n+1-j} \right] + \pi_1 a_{n+1} + a_{n+2}$$

Le prédicteur linéaire optimal pour $\nu = 2$ s'obtient en prenant l'espérance conditionnellement à $Z^{(n)}$ et en remarquant que a_{n+1} et a_{n+2} sont indépendants de $Z^{(n)}$, il vient

$$\hat{z}_n(2) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(2)} z_{n+1-j} + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \left[\xi_{n+2} - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(2)} \xi_{n+1-j} \right]$$

ce qui permet d'induire les relations (3.2) et (3.3) du théorème.

Supposons maintenant ces relations vraies jusqu'à $\nu - 1$ et montrons qu'elles sont aussi vérifiées pour ν .

A partir de la relation (A.1) et pour le temps $n + \nu$, on a

$$z_{n+\nu} = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i z_{n+\nu-i} + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \pi(B) \xi_{n+\nu} + a_{n+\nu}$$

Le prédicteur linéaire optimal est donné par

$$\hat{z}_n(\nu) = \sum_{i=1}^{\nu-1} \pi_i \hat{z}_n(\nu-i) + \sum_{k=\nu}^{\infty} \pi_k z_{n+\nu-k} + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \pi(B) \xi_{n+\nu}$$

Remplaçons $\hat{z}_n(\nu-1), \dots, \hat{z}_n(1)$ par leur valeur

$$\hat{z}_n(\nu) = \sum_{i=1}^{\nu-1} \pi_i \left[\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(\nu-i)} \xi_{n+1-j} + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \left\{ \xi_{n+\nu-i} - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(\nu-i)} \xi_{n+1-j} \right\} \right] + \sum_{k=\nu}^{\infty} \pi_k z_{n+\nu-k} + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \pi(B) \xi_{n+\nu}$$

Soit en réarrangeant les termes (car on peut commuter les sommations puisque la série $\sum_0^{\infty} \pi_j$ est sommable, en effet $\varphi(B) = (1-B)^d (1-B^s)^D \phi(B) \max(d, D) > 0$ or $\pi(B) = \varphi(B)/\theta(B)$ donc $\pi(1) = 1 - \sum_1^{\infty} \pi_j = 0$ si $\theta(z) = 0$ n'a pas de zéro sur le cercle unite T).

$$\hat{z}_n(\nu) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \pi_{j+\nu-1} + \sum_{i=1}^{\nu-1} \pi_i \pi_j^{(\nu-i)} \right\} z_{n+1-j} + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \left[\sum_{i=1}^{\nu-1} \pi_i \xi_{n+\nu-i} - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\nu-1} \pi_i \pi_j^{(\nu-i)} \xi_{n+1-j} \right] + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \left[\xi_{n+\nu} - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \xi_{n+\nu-i} \right] \quad (A.3)$$

or

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} \pi_i \xi_{n+\nu-i} - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \xi_{n+\nu-i} = - \sum_{i=\nu}^{\infty} \pi_i \xi_{n+\nu-i} = - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{j+\nu-1} \xi_{n+1-j}$$

La relation (A.3) s'écrit donc

$$\hat{z}_n(\nu) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \pi_{j+\nu-1} + \sum_{i=1}^{\nu-1} \pi_i \pi_j^{(\nu-i)} \right\} z_{n+1-j} + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \times \left[\xi_{n+\nu} - \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \pi_{j+\nu-1} + \sum_{i=1}^{\nu-1} \pi_i \pi_j^{(\nu-i)} \right\} \xi_{n+1-j} \right]$$

Et en utilisant la relation (3.3), on obtient bien la relation (3.2) annoncée.

$$\hat{z}_n(\nu) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(\nu)} z_{n+1-j} + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \left[\xi_{n+\nu} - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(\nu)} \xi_{n+1-j} \right] \quad \blacksquare$$

Preuve du lemme 2

Décomposons la fraction rationnelle P/Q en éléments simples sur \mathbb{C}

$$\frac{P}{Q}(z) = E(z) + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{l_i} \frac{A_{ij}}{(z-a_i)^j} \quad \text{avec} \quad Q(z) = \prod_{i=1}^q (z-a_i)^{l_i} \quad (A.4)$$

où $E(z)$ représente le polynome partie entière de la fraction rationnelle. On

est donc ramené à développer en série entière les termes de la forme $(z-a)^{-p}$ avec $a \neq 0$.

A partir du développement de $(1-z)^{-1}$ et en dérivant p fois on obtient

$$(1-z)^{-p} = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} (k+p-1) \dots (k+1) z^k \quad ; \quad |z| < 1$$

et

$$(z-a)^{-p} = \frac{(-1)^p}{a^p} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{-p} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(k+p-1) \dots (k+1)}{(p-1)! a^{p+k}} z^k \quad , \quad |z| < a$$

Montrons qu'il est possible de majorer la valeur absolue du coefficient s_k de z^k lorsque $|a| > 1$

$$|s_k| \leq \frac{(2k)^p}{(p-1)! |a|^{p+k}} \quad \text{dès que } k > p$$

et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |s_k| |a|^{k/2} = 0$$

la suite $\{|s_k| |a|^{k/2}\}$ reste donc bornée par une constante $K > 0$ et

$$|s_k| \leq Ke^{-ck} \quad \text{avec } c = \frac{1}{2} \text{Log } |a| > 0$$

En considérant tous les termes de la forme $(z-a)^{-p}$ dans (A.4) et en regroupant les coefficients de z^k on obtient

$$|c_k| \leq Ae^{-Bk} \quad , \quad A > 0$$

avec $B = \frac{1}{2} \text{Log } |a| > 0$ ou $|a| = \min |a_i|$; les a_i étant les zéros du polynôme $\theta(z)$ supposés à l'extérieur de \bar{D} . ■

ANNEXE 2

Historique du trafic national (Janvier 1969 à Mars 1980)

17273, 17049, 20920, 23847, 25091, 28538, 26829, 20814, 28229, 25835
 21220, 19734, 21435, 22123, 24650, 28059, 27737, 32116, 28987, 24240
 32214, 29991, 20960, 25965, 22662, 16444, 12857, 31798, 32745, 40933
 33509, 27625, 37303, 33768, 28296, 28972, 29327, 30134, 36207, 36280
 39775, 43756, 39874, 31380, 42645, 41380, 34138, 33982, 34731, 22965
 19290, 41100, 45876, 48731, 43763, 34748, 47852, 48079, 39590, 36319
 37737, 35966, 38601, 30319, 43709, 48568, 43919, 34789, 46982, 45398
 37504, 35745, 38303, 37459, 41543, 45306, 43530, 52008, 45317, 36057
 48190, 45896, 38438, 40831, 40668, 39382, 48432, 49461, 50348, 56461
 49222, 38845, 52462, 47298, 44128, 45354, 44734, 44175, 50576, 51623
 54295, 61466, 51946, 41088, 57911, 53379, 43407, 49756, 50074, 45938
 51722, 56469, 58315, 67313, 56410, 38600, 60339, 63222, 55591, 53705
 54480, 52770, 62717, 64140, 69433, 75235, 65292, 50773, 70265, 71173
 37270, 47918, 62419, 62172, 68760,

(Source Aéroport de Paris)

Prévisions

Période	Prévisions		
	M_1^{79*}	M_1^{80}	$M_1 I^{79}$
Avril 1980	71 912	71 782	71 729
Mai	74 718	74 499	74 170
Juin	82 828	82 746	82 125
Juillet	72 292	72 175	72 125
Août	55 473	55 228	55 270
Septembre	76 473	76 301	76 162
Octobre	78 750	78 652	78 435
Novembre	70 323	70 261	69 993
Décembre	69 859	69 668	69 342

$$(*) M_1^{79} (1 + 0,306 B + 0,363 B^2 + 0,241 B^3) (1 + 0,699 B^{12}) (1 - B) (1 - B^{12}) z_t = \hat{a}_t$$

[0,093]
[0,089]
[0,090]
[0,068]
[3656]

REFERENCES

- [1] B. ABRAHAM. — Intervention in multiple times series, *Proceedings of the American Statistical Association (Statistics section)*, Washington, 1978.
- [2] T.W. ANDERSON. — *The statistical Analysis of Time series*, Wiley: New York, 1971.
- [3] M.N. BATTACHARYYA and A. LAYTON. — Effectiveness of Sealt Belt Legislation on the Queensland Road Toll — An Australian Case Study in Intervention Analysis, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 74, 596-603, 1979.
- [4] G.E.P. BOX and G.M. JENKINS. — *Time Series Analysis Forecasting and Control*, Holden-Day : San Francisco, 1970, 1976.
- [5] G.E.P. BOX and G.C. TIAO. — Intervention analysis with applications to environmental to economic problem, *J. Amer. Statist. Assoc.* 70, 70, 1975.
- [6] G.E.P. BOX and G.C. TIAO. — Comparison of forecast and actuality, *Appl. Statist.*, 25, n° 3, 105, 1976.
- [7] P. DUREN. — *Theory of H_p spaces*, Academic Press : New York, 1970.
- [8] H. DYM and H.P. McKEAN. — *Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem*, Academic Press : New York, 1976.
- [9] U. GRENANDER and M. ROSENBLATT. — *Statistical Analysis of Stationary Time Series*, Wiley : New York, 1957.
- [10] M.R. GRUPE. — Modified Computer Programs, Department of Statistics, University of Wisconsin-Madison, 1977.
- [11] E.J. HANNAN. — *Multiple Time Series*, Wiley : New York, 1970.
- [12] H. HELSON. — *Lectures on Invariant Subspaces*, Academic Press : New York, 1964.
- [13] HIPEL and OTHERS. — Intervention analysis in water resources, *Water Resources Research*, Vol. 11, n° 6, 865.
- [14] K. HOFFMAN. — *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice Hall : New Jersey, 1962.

- [15] G.M. JENKINS. — *Practical Experiences with Modelling and Forecasting Time Series*, Time Series Library, AGJP Publication : Jersey, 1979.
- [16] L.H. KOOPMANS. — *The Spectral Analysis of Time Series*, Academic Press : New York, 1974.
- [17] P. KOOSIS. — *Introduction to H_p Spaces*, Cambridge University Press : Cambridge.
- [18] B. Sz. NAGY and C. FOIAS. — *Analyse Harmonique des Opérateurs de l'Espace de Hilbert*, Masson : Paris, 1967.
- [19] A.V. OPPENHEIM and R.W. SCHAFER. — *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall : New Jersey, 1975.
- [20] D.J. PACK. — Forecasting Time Series Affected by Identifiable Isolated Events and an Explanatory Variable, *Technical Report*, Computer Sciences Division, Oak Ridge National Laboratory : Tennessee, 1980.
- [21] E.A. ROBINSON. — *Random Wavelets and Cybernetic System*, Charles Griffin, Londres, 1962.
- [22] E.A. ROBINSON. — *Multichannel Time Series Analysis with Digital Computer Program*, Holden-Day : San Francisco, 1967.
- [23] E.A. ROBINSON and M.T. SILVIA. — *Digital Signal Processing and Time Series Analysis*, Holden-Day : San Francisco, 1978.
- [24] Y.A. ROZANOV. — *Stationary Random Processes*, Holden-Day : San Francisco, 1967.
- [25] Y.A. ROZANOV. — Théorie des Processus d'Innovation, *Revue du Cethedec*, NS 78-1, 1978.
- [26] G. RUCKEBUSCH. — Sur le problème de la synthèse des filtres, *Note interne n° 26* du Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1978.
- [27] G. RUCKEBUSCH. — Théorie géométrique de la représentation markovienne, *Thèse de doctorat d'état*, Lab. de calcul des probabilités, Université Paris VI, 1980.
- [28] W. RUDIN. — *Analyse Réelle et Complexe*, Masson : Paris, 1978.
- [29] J.H. SCHWARZ. — Analyse des Interventions : une variante et application à l'analyse de la consommation de carburant, *Communication présentée à la journée en Avenir Turbulent*, AFCET, Paris, 1978.
- [30] E.M. STEIN and G. WEISS. — *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press : Princeton, New-Jersey, 1971.
- [31] G.C. TIAO, G.E.P. BOX and W.J. HAMMING. — Analysis of Los Angeles Photochemical Smog Data : a Statistical Overview, *Jour. of the Air Pollution Control Association*, 25, 260, 1975.
- [32] G.C. TIAO and G.E.P. BOX. — An Introduction to Applied Multiple Time Series Analysis, *Technical Report n° 582*, University of Wisconsin : Madison, 1979.
- [33] D.W. WICHERN and R.H. JONES. — Assessing the Impact of Market Disturbances using Intervention Analysis, *Management Science*, Vol. 24, n° 3, 329, 1977.
- [34] N. WIENER and P. MASANI. — The Prediction Theory of Multivariate Stochastic Processes I and II, *Acta Math.*, 98 and 99, 1958, 1959.