REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

GUY ROUZET

Fiabilité d'un équipement sur lequel sont effectuées des opérations de maintenance préventive

Revue de statistique appliquée, tome 29, nº 3 (1981), p. 31-41
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1981__29_3_31_0>

FIABILITE D'UN EQUIPEMENT SUR LEQUEL SONT EFFECTUEES DES OPERATIONS DE MAINTENANCE PREVENTIVE

Guy ROUZET

Directeur de la Qualité de la Société
ENERTEC

On considère un équipement susceptible d'accomplir sa fonction même lorsque certains de ses constituants sont défaillants, c'est-à-dire un équipement possédant au moins une possibilité de redondance, que celle-ci soit matérielle ou logicielle.

En l'absence de maintenance préventive, les modes de fonctionnement en redondance s'épuisent progressivement, au fur et à mesure des défaillances, jusqu'à la défaillance de l'équipement. La fonction fiabilité correspondante est $R_0(t)$ (voir figure 1) et la durée moyenne jusqu'à défaillance se déduit de la densité de probabilité de la durée jusqu'à défaillance $f_0(t)$:

$$f_0(t) = -\frac{dR_0(t)}{dt}$$

par :

$$m_0 = \int_{t=0}^{\infty} t f_0(t) dt$$

Si la maintenance corrective permet de remettre l'équipement dans l'état initial (les composants non remplacés n'ont pas atteint la période où se manifeste l'usure ou le vieillissement) ou si elle consiste en un remplacement de l'équipement complet, la fonction fiabilité est à nouveau $R_0(t)$ à la fin de chaque opération de maintenance corrective (de durée supposée négligeable devant m_0) et la MTBF est constante et égale à m_0.

Si des opérations de maintenance préventive sont, en outre, effectuées à des intervalles de temps relativement petits par rapport à m_0, les défaillances d'éléments en redondance, ou au moins certaines d'entre elles, étant décelées et réparées, les défaillances de l'équipement sont en partie évitées. La fonction fiabilité se trouve alors modifiée ; elle sera désignée dans ce qui suit par $R(t)$.

Lorsque l'intervalle de temps entre opérations de maintenance préventive est constant, de valeur Δ, la MTBF, c'est-à-dire la durée moyenne entre défaillances de l'équipement (entre opérations de maintenance corrective) est encore constante ; sa valeur m dépend de Δ. (L'inverse de m, soit $f = 1/m$, qui est la fréquence moyenne des défaillances de l'équipement, peut aussi être utilisé comme caractéristique de fiabilité).

Le but de la présente étude est d'apporter quelques précisions sur ces notions, et de présenter des résultats quantitatifs dans quelques cas pris comme exemples.

Mots-clés : **Fiabilité, Equipements, Redondance, Maintenance.**

1. BASES DE L'ETUDE DE LA FIABILITE

1.1. Fonction $R(t)$

La probabilité que l'équipement ne soit pas défaillant avant la première opération de maintenance préventive, en t_1, est $R_0(t_1)$.

Si la maintenance préventive permet de connaître l'état de chacun des éléments en redondance, et de réparer ceux qui sont défaillants, et si le taux de défaillance de chacun des composants est constant (absence de processus de dégradation), la fiabilité conditionnelle de l'équipement à partir de t_1 est :

$$P_1(t - t_1) = R_0(t - t_1)$$

et la fiabilité vue de l'origine, c'est-à-dire la probabilité que l'équipement ne soit pas défaillant avant t ($t_1 < t \leqslant t_2$) est :

$$\begin{aligned} R_1(t) &= R_1(t_1) \cdot P_1(t - t_1) \\ &= R_0(t_1) \cdot R_0(t - t_1) \end{aligned}$$

En généralisant à toutes les opérations de maintenance préventive, on a ainsi (avec $t_0 = 0$) :

$$R_i(t) = R_i(t_i) \cdot P_i(t - t_i) \qquad (1)$$

avec :

$$P_i(t - t_i) = R_0(t - t_i) \qquad (2)$$

d'où :

$$R_i(t) = R_0(t_1) \cdot R_0(t_2 - t_1) \ldots R_0(t_i - t_{i-1}) \cdot R_0(t - t_i) \qquad (3)$$

La figure 1 illustre ce cas.

Si, en outre, les opérations de maintenance préventive sont effectuées avec un intervalle de temps constant Δ, à partir de $t = 0$, donc si $t_i = i\Delta$, la relation (3) devient :

$$R_i(t) = [R_0(\Delta)]^i \cdot R_0(t - i\Delta) \qquad (4)$$

Si la maintenance préventive ne permet de réparer que certains des éléments de la redondance lorsqu'ils sont défaillants (par exemple, parce qu'elle ne permet de déceler les défaillances que pour certains des éléments), la relation (2) n'est plus valable. De plus, la fiabilité conditionnelle $P_i(t - t_i)$ est différente selon les états possibles (j) des éléments en redondance à la fin de l'opération de maintenance préventive effectuée en t_i, de sorte que la relation (1) se présente sous la forme :

$$R_i(t) = \sum_j R_{i,j}(t_i) \cdot P_{i,j}(t - t_i) \qquad (5)$$

On en trouvera une illustration dans le second cas présenté au paragraphe 2.

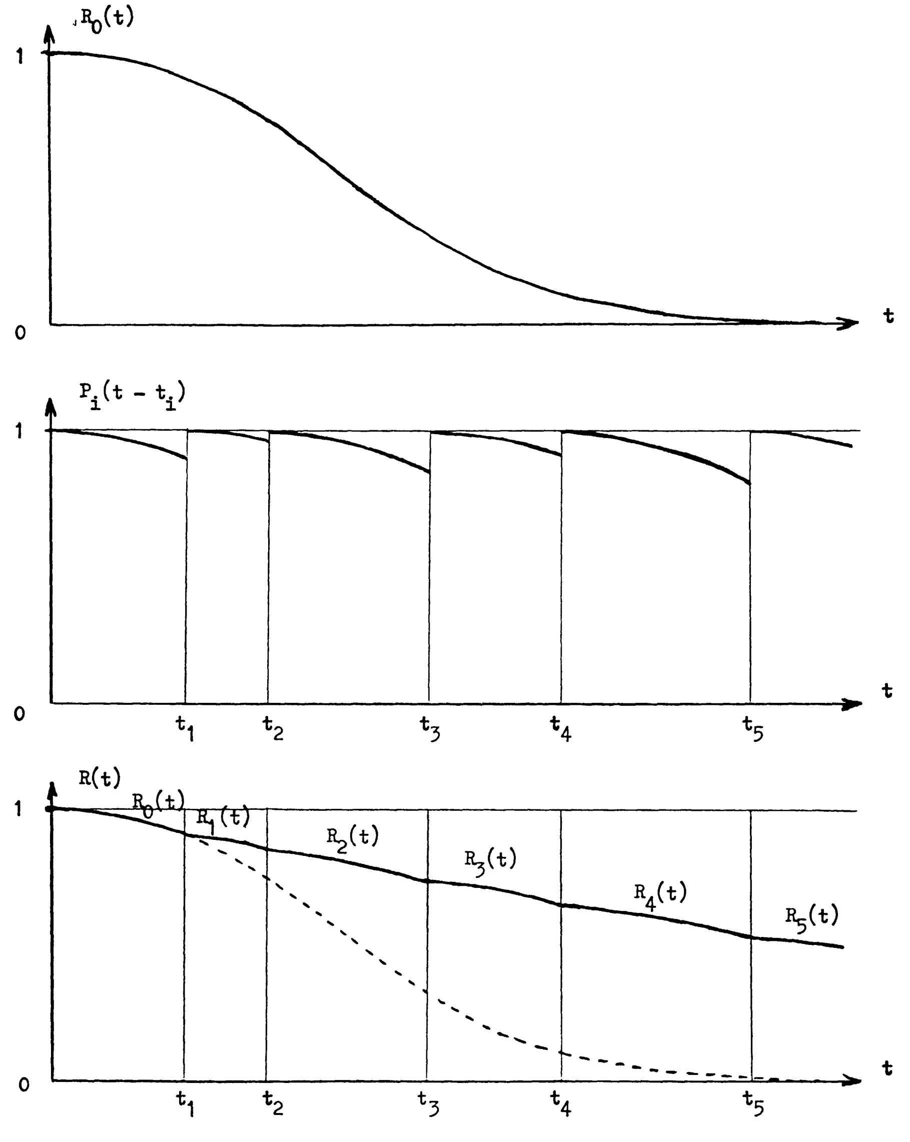

Figure 1. – La maintenance préventive permet de connaître l'état de chacun des éléments en redondance, et de réparer ceux qui sont défaillants. Le taux de défaillance de chacun des composants est constant.

1.2. MTBF de l'équipement

On sait que, dans le cas d'une fonction $f(t)$ continue, et sous la condition :

$$\lim_{t \to \infty} [t\, R(t)] = 0$$

la valeur de $m = E(t)$ peut aussi être obtenue par intégration de $R(t)$:

$$m = \int_{t=0}^{\infty} R(t)\, dt$$

La relation (4) ou la relation (5) conduit à écrire ici (avec $f_i = -dR_i/dt$) :

$$m = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=t_i}^{t_{i+1}} t f_i(t)\, dt \tag{6}$$

Comme il est montré en annexe 1, on peut encore écrire aussi, sous la condition $\lim\limits_{i \to \infty} [t_i R_i(t_i)] = 0$:

$$m = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=t_i}^{t_{i+1}} R_i(t)\, dt \tag{7}$$

La MTBF de l'équipement m a donc encore une valeur égale à l'aire définie par la courbe $R(t)$. Lorsque cette courbe a été définie pour tout intervalle (t_i, t_{i+1}), il suffit d'appliquer la relation (7) pour obtenir m.

Remarque

Si la maintenance préventive permet de connaître l'état de chacun des éléments en redondance, et de réparer ceux qui sont défaillants, si le taux de défaillance de chacun des composants est constant, et si l'intervalle de temps entre les opérations de maintenance préventive est constant (Δ), on a, à partir de la relation (4) :

$$m = \sum_{i=0}^{\infty} [R_0(\Delta)]^i \int_{t=i\Delta}^{(i+1)\Delta} R_0(t - i\Delta)\, dt \tag{8}$$

c'est-à-dire :

$$m = \frac{\displaystyle\int_{t=0}^{\Delta} R_0(t)\, dt}{1 - R_0(\Delta)} \tag{9}$$

2. APPLICATION A UN EQUIPEMENT DONT DEUX SOUS-ENSEMBLES ASSURENT UNE REDONDANCE

Les taux de défaillance des composants sont constants ; les intervalles de temps entre opérations de maintenance préventive sont égaux.

Le "schéma fiabilité" de l'équipement est :

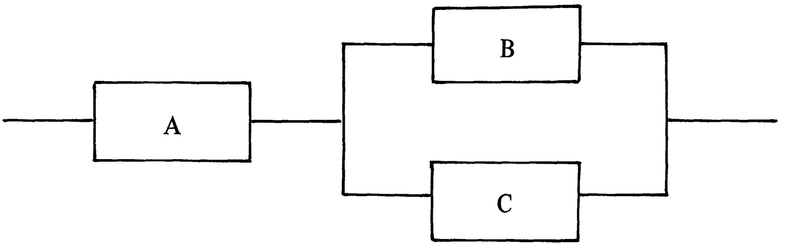

Figure 2

Les taux de défaillance, constants, des sous-ensembles A, B et C sont respectivement λ_A, λ_B, λ_C.

L'intervalle entre deux opérations de maintenance préventive est Δ ($t_i = i\Delta$). Pour $0 \leqslant t \leqslant \Delta$, on a :

$$\boxed{R_0(t) = e^{-\lambda_A t} \, [e^{-\lambda_B t} + e^{-\lambda_C t} - e^{-(\lambda_B + \lambda_C) t}]} \qquad (10)$$

Remarque : En l'absence de toute action de maintenance préventive, on aurait :

$$\boxed{m_0 = \frac{1}{\lambda_A + \lambda_B} + \frac{1}{\lambda_A + \lambda_C} - \frac{1}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C}} \qquad (11)$$

2.1. La maintenance préventive permet de connaître l'état de chacun des sous-ensembles B et C, et, si l'un d'eux est défaillant, de le réparer

Après chaque opération de maintenance préventive, l'équipement est dans un état identique à son état d'origine ; la fiabilité conditionnelle est :

$$P_i(t - i\Delta) = e^{-\lambda_A (t - i\Delta)} \, [e^{-\lambda_B (t - i\Delta)} + e^{-\lambda_C (t - i\Delta)} - e^{-(\lambda_B + \lambda_C)(t - i\Delta)}]$$

La probabilité que la défaillance de l'équipement n'ait pas lieu avant $t = i\Delta$ étant :

$$R_i(i\Delta) = [e^{-\lambda_A \Delta} \, [e^{-\lambda_B \Delta} + e^{-\lambda_C \Delta} - e^{-(\lambda_B + \lambda_C)\Delta}]]^i$$

$R_i(t)$ s'écrit, conformément à la relation (1), ainsi d'ailleurs qu'à la relation (4) dont les conditions sont réunies :

$$\boxed{\begin{aligned} R_i(t) = e^{-\lambda_A t} \, & [e^{-\lambda_B \Delta} + e^{-\lambda_C \Delta} - e^{-(\lambda_B + \lambda_C)\Delta}]^i \\ & [e^{-\lambda_B (t - i\Delta)} + e^{-\lambda_C (t - i\Delta)} - e^{-(\lambda_B + \lambda_C)(t - i\Delta)}] \end{aligned}}$$

Comme :

$$\lim_{i \to \infty} [t_i R_i(t_i)] = \lim_{i \to \infty} [i\Delta \circ e^{-i\lambda_A \Delta} \, [e^{-\lambda_B \Delta} + e^{-\lambda_C \Delta} - e^{-(\lambda_B + \lambda_C)\Delta}]^i] = 0$$

le calcul de m selon la relation (7) conduit à :

$$m = \frac{\dfrac{1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)\Delta}}{\lambda_A + \lambda_B} + \dfrac{1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_C)\Delta}}{\lambda_A + \lambda_C} - \dfrac{1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C)\Delta}}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C}}{1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)\Delta} - e^{-(\lambda_A + \lambda_C)\Delta} + e^{-(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C)\Delta}}$$

Cette expression, qui correspond à la relation (9), prend les formes limites suivantes, par ailleurs évidentes :

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{\Delta \to \infty} [m] = m_0 \quad \text{(définie par (11))} \\ \lim\limits_{\Delta \to 0} [m] = 1/\lambda_A \end{array}\right.$$

$$\lambda_A \to \infty \Rightarrow m \to 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_B = 0 \Rightarrow m = 1/\lambda_A \\ \lambda_B \to \infty \Rightarrow m \to 1/(\lambda_A + \lambda_C) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_C = 0 \Rightarrow m = 1/\lambda_A \\ \lambda_C \to \infty \Rightarrow m \to 1/(\lambda_A + \lambda_B) \end{array}\right.$$

2.2. La maintenance préventive ne permet pas de connaître l'état du sous-ensemble B, mais seulement celui du sous-ensemble C ; si ce dernier est défaillant, il est réparé

Après chaque opération de maintenance préventive, l'équipement peut se trouver dans l'un des deux états suivants (sans que l'on sache lequel des deux correspond à la réalité) :

$j = 1$: le sous-ensemble B n'est pas défaillant (il ne l'a donc jamais été depuis $t = 0$) ; l'équipement est donc dans un état identique à son état d'origine ; la fiabilité conditionnelle est :

$$P_{i,1}(t - i\Delta) = e^{-\lambda_A (t - i\Delta)} \left[e^{-\lambda_B (t - i\Delta)} + e^{-\lambda_C (t - i\Delta)} - e^{-(\lambda_B + \lambda_C)(t - i\Delta)}\right]$$

$j = 2$: le sous-ensemble B est défaillant (le sous-ensemble C n'a donc eu aucune défaillance depuis l'opération de maintenance préventive précédant la défaillance de B) ; la fiabilité conditionnelle est donc celle de l'ensemble de A et C "en série", c'est-à-dire :

$$P_{i,2}(t - i\Delta) = e^{-\lambda_A (t - i\Delta)} \cdot e^{-\lambda_C (t - i\Delta)}$$

Comme il est montré en annexe 2, les probabilités associées à ces deux états possibles sont :

$$j = 1 : \quad R_{i,1}(i\Delta) = e^{-i\lambda_A \Delta} \cdot e^{-i\lambda_B \Delta}$$

$$j = 2 : \quad R_{i,2}(i\Delta) = e^{-i\lambda_A \Delta} (1 - e^{-\lambda_B \Delta}) e^{-\lambda_C \Delta} \frac{e^{-i\lambda_B \Delta} - e^{-i\lambda_C \Delta}}{e^{-\lambda_B \Delta} - e^{-\lambda_C \Delta}}$$

La relation (5) donne alors :

$$\boxed{R_i(t) = e^{-\lambda_A t} \left| \begin{array}{l} e^{-i\lambda_B\Delta}\,[e^{-\lambda_B(t-i\Delta)} + e^{-\lambda_C(t-i\Delta)} - e^{-(\lambda_B+\lambda_C)(t-i\Delta)}] \\ + \left[(1-e^{-\lambda_B\Delta})e^{-\lambda_C\Delta}\,\dfrac{e^{-i\lambda_B\Delta} - e^{-i\lambda_C\Delta}}{e^{-\lambda_B\Delta} - e^{-\lambda_C\Delta}}\right] e^{-\lambda_C(t-i\Delta)} \end{array}\right.}$$

Un calcul un peu long, mais sans difficulté, conduit alors, compte tenu de:

$$\lim_{i\to\infty} [t_i R_i(t_i)] = 0$$

à :

$$\boxed{m = \frac{1}{\lambda_A + \lambda_B} + \frac{1 - e^{-(\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C)\Delta}}{1 - e^{-(\lambda_A+\lambda_B)\Delta}}\left[\frac{1}{\lambda_A + \lambda_C} - \frac{1}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C}\right]}$$

Cette expression prend les formes limites suivantes :

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{\Delta\to\infty} [m] = m_0 \\ \lim\limits_{\Delta\to 0} [m] = \dfrac{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C}{(\lambda_A + \lambda_B)(\lambda_A + \lambda_C)} \end{array}\right.$$

$$\lambda_A \to \infty \Rightarrow m \to 0$$

$$\left[\begin{array}{lll} \lambda_B = 0 & \Rightarrow m = 1/\lambda_A \\ \lambda_B \to \infty & \Rightarrow m \to 1/(\lambda_A + \lambda_C) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{lll} \lambda_C = 0 & \Rightarrow m = 1/\lambda_A \\ \lambda_C \to \infty & \Rightarrow m \to 1/(\lambda_A + \lambda_B) \end{array}\right.$$

3. ILLUSTRATION DE LA VARIATION DE m EN FONCTION DE Δ

Les expressions de m dans les deux cas considérés dans les paragraphes 2.1 et 2.2 sont, pour λ_A, λ_B et λ_C donnés, des fonctions de Δ.

Pour illustrer l'influence de la maintenance préventive sur la MTBF de l'équipement (ou sur la fréquence moyenne des défaillances de l'équipement), on peut prendre les deux exemples numériques suivants, dans lesquels U désigne une durée (prise comme unité de temps) :

3.1. $\boxed{\lambda_A = \lambda_B = \lambda_C = \dfrac{1}{U}}$ $\quad m_0 = 0{,}67\,U \quad f_0 = 1{,}50/U$

	Données du § 2.1 La maintenance préventive porte sur B et C		Données du § 2.2 La maintenance préventive porte sur C seulement	
Δ	m	f	m	f
$\to 0$	$\to 1{,}00\ U$	$\to 1{,}00/U$	$\to 0{,}75\ U$	$\to 1{,}33/U$
$0{,}01\ U$	$0{,}99\ U$	$1{,}01/U$	$0{,}75\ U$	$1{,}34/U$
$0{,}05\ U$	$0{,}95\ U$	$1{,}05/U$	$0{,}74\ U$	$1{,}34/U$
$0{,}1\ U$	$0{,}92\ U$	$1{,}09/U$	$0{,}74\ U$	$1{,}35/U$
$0{,}2\ U$	$0{,}86\ U$	$1{,}16/U$	$0{,}73\ U$	$1{,}37/U$
$0{,}4\ U$	$0{,}79\ U$	$1{,}27/U$	$0{,}71\ U$	$1{,}41/U$
$0{,}6\ U$	$0{,}75\ U$	$1{,}34/U$	$0{,}70\ U$	$1{,}43/U$
$0{,}8\ U$	$0{,}72\ U$	$1{,}39/U$	$0{,}69\ U$	$1{,}45/U$
$1\ U$	$0{,}70\ U$	$1{,}42/U$	$0{,}68\ U$	$1{,}46/U$
$\to \infty$	$\to 0{,}67\ U$	$\to 1{,}50/U$	$\to 0{,}67\ U$	$\to 1{,}50/U$

L'incidence de la maintenance préventive est faible.

3.2. $\boxed{\lambda_A = 0 \qquad \lambda_B = \lambda_C = \frac{1}{U}}$ $\qquad m_0 = 1{,}50\ U \qquad f_0 = 0{,}67/U$

	Données du § 2.1 La maintenance préventive porte sur B et C		Données du § 2.2 La maintenance préventive porte sur C seulement	
Δ	m	f	m	f
$\to 0$	$\to \infty$	$\to 0$	$\to 2{,}00\ U$	$\to 0{,}50/U$
$0{,}01\ U$	$101{,}00\ U$	$0{,}010/U$	$2{,}00\ U$	$0{,}50/U$
$0{,}05\ U$	$21{,}00\ U$	$0{,}048/U$	$1{,}98\ U$	$0{,}51/U$
$0{,}1\ U$	$11{,}01\ U$	$0{,}091/U$	$1{,}95\ U$	$0{,}51/U$
$0{,}2\ U$	$6{,}02\ U$	$0{,}17/U$	$1{,}91\ U$	$0{,}52/U$
$0{,}4\ U$	$3{,}53\ U$	$0{,}28/U$	$1{,}84\ U$	$0{,}54/U$
$0{,}6\ U$	$2{,}72\ U$	$0{,}37/U$	$1{,}77\ U$	$0{,}56/U$
$0{,}8\ U$	$2{,}32\ U$	$0{,}43/U$	$1{,}72\ U$	$0{,}58/U$
$1\ U$	$2{,}08\ U$	$0{,}48/U$	$1{,}68\ U$	$0{,}59/U$
$\to \infty$	$\to 1{,}50\ U$	$\to 0{,}67/U$	$1{,}50\ U$	$\to 0{,}67/U$

L'incidence de la maintenance préventive est faible lorsque celle-ci porte sur le sous-ensemble C seulement. Au contraire, m (donc f) est sensiblement modifié lorsque la maintenance préventive porte sur B et C, avec un intervalle Δ inférieur au dixième de m_0.

ANNEXE 1

La relation entre la densité de probabilité de la durée jusqu'à défaillance T :

$$Pr\ [t < T < t + dt] = f(t)\, dt$$

et la fonction fiabilité :

$$Pr\ [T \geqslant t] = R(t)\, dt$$

est :

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}$$

Chacun des termes de la somme (6) peut s'écrire, en intégrant par parties :

$$\int_{t=t_i}^{t_{i+1}} t f_i(t)\, dt = [-\, t R_i(t)]_{t=t_i}^{t_{i+1}} + \int_{t=t_i}^{t_{i+1}} R_i(t)\, dt$$

Ainsi :

$$\int_{t=0}^{t_1} t f_0(t)\, dt = -\, t_1 R_0(t_1) + \int_{t=0}^{t_1} R_0(t)\, dt$$

$$\int_{t=t_1}^{t_2} t f_1(t)\, dt = t_1 R_1(t_1) - t_2 R_1(t_2) + \int_{t=t_1}^{t_2} R_1(t)\, dt$$

$$\int_{t=t_2}^{t_3} t f_2(t)\, dt = t_2 R_2(t_2) - t_3 R_2(t_3) + \int_{t=t_2}^{t_3} R_2(t)\, dt$$

etc.

Comme :

$$R_1(t_1) = R_0(t_1)$$

$$R_2(t_2) = R_1(t_2)$$

$$\ldots$$

$$R_i(t_i) = R_{i-1}(t_i)$$

on a :

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{t=t_i}^{t_{i+1}} t f_i(t)\, dt = -\, t_{k+1} R_{k+1}(t_{k+1}) + \sum_{i=0}^{k} \int_{t=t_i}^{t_{i+1}} R_i(t)\, dt$$

Sous la condition :

$$\boxed{\lim_{i \to \infty} [t_i R_i(t_i)] = 0}$$

on a :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=t_i}^{t_{i+1}} t f_i(t)\, dt = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=t_i}^{t_{i+1}} R_i(t)\, dt}$$

Remarque :

En l'absence de toute action de maintenance préventive, on a :

$$R_i(t) = R_0(t)$$

on retrouve alors, avec la condition :

$$\lim_{t \to \infty} [t R_0(t)] = 0$$

la relation classique :

$$\int_{t=0}^{\infty} t f_0(t)\, dt = \int_{t=0}^{\infty} R_0(t)\, dt$$

ANNEXE 2

Au niveau de la redondance, les probabilités attachées aux états possibles des sous-ensembles B et C sont, à la fin des premières opérations de maintenance préventive :

$t = \Delta$

$j = 1$: | B n'est pas défaillant depuis l'origine
| (C n'a pas été défaillant, ou vient d'être réparé)
Probabilité : $e^{-\lambda_B \Delta}$

$j = 2$: | B est défaillant
| C n'a pas été défaillant depuis l'origine
Probabilité : $(1 - e^{-\lambda_B \Delta})\, e^{-\lambda_C \Delta}$

$t = 2\Delta$

$j = 1$: | B n'est pas défaillant depuis l'origine
| (C n'a pas été défaillant, ou a été réparé 1 ou 2 fois)
Probabilité : $e^{-2\lambda_B \Delta}$

$j = 2$: B est défaillant

- Si la défaillance de B a eu lieu entre 0 et Δ, C n'a pas été défaillant depuis l'origine
- Si la défaillance de B a eu lieu entre Δ et 2Δ, C a pu être défaillant entre 0 et Δ et réparé en Δ, mais n'a pas été défaillant depuis Δ

Probabilité : $(1 - e^{-\lambda_B \Delta})\, e^{-2\lambda_C \Delta} + e^{-\lambda_B \Delta}(1 - e^{-\lambda_B \Delta})\, e^{-\lambda_C \Delta}$

La généralisation à $t = i\Delta$, pour $i > 0$, conduit aux expressions suivantes:

$t = i\Delta \qquad (i > 0)$

$j = 1$: B n'est pas défaillant
Probabilité : $e^{-i\lambda_B \Delta}$

$j = 2$: B est défaillant
Probabilité :

$$\begin{aligned}
&(1 - e^{-\lambda_B \Delta})\, e^{-i\lambda_C \Delta} \\
&+ e^{-\lambda_B \Delta}\,(1 - e^{-\lambda_B \Delta})\, e^{-(i-1)\,\lambda_C \Delta} \\
&+ e^{-2\lambda_B \Delta}\,(1 - e^{-\lambda_B \Delta})\, e^{-(i-2)\lambda_C \Delta} \\
&+ \ldots \\
&+ e^{-(i-1)\lambda_B \Delta}\,(1 - e^{-\lambda_B \Delta})\, e^{-\lambda_C \Delta}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$(1 - e^{-\lambda_B \Delta})\, e^{-i\lambda_C \Delta} \sum_{k=0}^{i-1} e^{-k(\lambda_B - \lambda_C)\Delta}$$

c'est-à-dire :

$$(1 - e^{-\lambda_B \Delta})\, e^{-\lambda_C \Delta}\, \frac{e^{-i\lambda_B \Delta} - e^{-i\lambda_C \Delta}}{e^{-\lambda_B \Delta} - e^{-\lambda_C \Delta}}$$

En tenant compte du sous-ensemble A, on a donc :

$$\boxed{\begin{aligned}
j = 1: \quad & R_{i,1}(i\Delta) = e^{-i\lambda_A \Delta} \cdot e^{-i\lambda_B \Delta} \\
j = 2: \quad & R_{i,2}(i\Delta) = e^{-i\lambda_A \Delta}\,(1 - e^{-\lambda_B \Delta})\, e^{-\lambda_C \Delta}\, \frac{e^{-i\lambda_B \Delta} - e^{-i\lambda_C \Delta}}{e^{-\lambda_B \Delta} - e^{-\lambda_C \Delta}}
\end{aligned}}$$

Si l'on applique ces relations pour $i = 0$, on obtient :

$$R_{0,1}(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad R_{0,2}(0) = 0$$

ce qui est correct. Les relations ci-dessus sont donc valables pour toutes les valeurs de i.