

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

MAURICE DUMAS

Sur la logique bayésienne

Revue de statistique appliquée, tome 28, n° 1 (1980), p. 81-90

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1980__28_1_81_0

© Société française de statistique, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA LOGIQUE BAYÉSIENNE

Maurice DUMAS

RESUME

L'auteur ajoute une remarque à celles d'un article où A. VESSEREAU, comparant entre elles les logiques classique et bayésienne, ne cache pas que sa préférence va, sauf cas particulier, à la logique classique.

Il montre que d'une façon générale, pour être acceptable, une loi a priori intervenant dans un raisonnement de logique bayésienne, doit satisfaire à des conditions qu'il précise, prenant pour cela en considération des paramètres de lois usuelles (loi binomiale et loi de Laplace-Gauss) ; en particulier, en cas de connaissance nulle, la loi a priori doit être une loi "virtuelle". en entendant par là qu'au contraire des lois réelles, la somme des densités de probabilité de cette loi dans tout son intervalle de variation, ne peut être réduite à l'unité.

Il fait remonter à E. LHOSTE (1923) l'apparition de ces lois virtuelles, qu'il a lui-même considérablement développées.

1 – INTRODUCTION

1.1. — La logique bayésienne s'oppose à la logique classique, à laquelle ressortissent les intervalles de confiance, normalisés internationalement.

On peut être tenté de reprocher, comme VESSEREAU [24], à la logique bayésienne le caractère subjectif qu'elle a lorsque la loi a priori intervenant dans le calcul a ce même caractère, et d'admettre que, de son côté, la logique classique est exemple de toute critique. Notre opinion sur ces points est nuancée, comme nous le montrons par un exemple en 2.2

1.2. — Le fait est que très souvent la loi de probabilité a priori que l'on est conduit à adopter, a effectivement ce caractère subjectif qui lui est reproché ; cette loi constitue alors une sorte d'hypothèse dans le cadre de laquelle le calcul est poursuivi : il est bon que cette hypothèse soit explicitement énoncée ; il convient naturellement de veiller, lorsqu'on la choisit, à ce qu'elle puisse être jugée "raisonnable". Différents points de vue à considérer à ce sujet sont évoqués dans le cours de la note. On est ainsi conduit assez naturellement à retenir des lois de probabilité a

Mots-clés : Logique bayésienne — Connaissance nulle a priori — Lois de probabilité virtuelles (ou impropres) — Lois de LHOSTE.

priori ayant un caractère particulier, à savoir : la somme de leur densité dans tout leur intervalle de variation est, non pas égale à l'unité, comme dans toute loi réelle, mais infiniment grande.

De telles lois sont, ici, dites "virtuelles", parceque c'est là l'expression que nous avons utilisée dans tous nos écrits à la suite de la suggestion du Professeur M. FRECHET, faite dans les premiers temps où nous avons attiré son attention sur de telles lois, et bien que l'expression "loi impropre" soit actuellement retenue par bien des auteurs.

1.3. — A l'occasion de travaux ayant un caractère très concret — la signification des épreuves sur échantillon pratiquées dans l'industrie — nous avons été amené à développer, et à publier depuis 1937, ce qui pouvait être attendu de certaines lois virtuelles. A l'époque, ces lois étaient le plus souvent ignorées ou jugées défavorablement, sinon rejetées. Il en va autrement aujourd'hui, étant donné que des lois virtuelles s'imposent pour satisfaire à certaines conditions assez abstraites, récemment développées ; nous citons à titre d'exemple les travaux de J.P. FLORENS [13].

Par opposition, il nous a paru utile de faire état relativement aux lois virtuelles, de considérations très concrètes, que nous avons dégagées au cours de ceux de nos travaux qui ont été orientés sur la logique bayésienne.

C'est là le but des numéros qui suivent, où deux cas particuliers sont examinés relatifs respectivement à la loi binomiale et à la loi de Laplace-Gauss. Bien des considérations développées ont une portée qui dépasse celle de la loi à l'occasion de laquelle elles sont présentées. En outre, la bibliographie commentée du n° 4 présente en quelques mots, des travaux relativement anciens en rapport avec les lois virtuelles.

2. LOI BINOMIALE, DE PARAMETRE p

2.1. — Aucune des propositions qui suivent ne paraît devoir attirer d'objection :

a) Si d'après des connaissances antérieures, on peut partir d'une loi a priori fondée sur celles-ci, le recours à la logique bayésienne s'impose.

b) Si l'on a recours à la logique bayésienne, il faut veiller à adopter une loi a priori jugée acceptable, compte tenu à la fois des connaissances antérieures, même peu précises, que l'on possède, et des considérations générales telles que celles évoquées en 2.3 ci-dessous.

c) La loi d'équiprobabilité représentée par dp s'impose comme loi a priori dans le cas où le tirage a lieu à partir d'une urne dont on sait qu'elle a été choisie au hasard parmi $M + 1$ urnes (M très grand), contenant respectivement 0 Blanche — 1 B. — 2 B. — . . . — M B.

d) Le cas de la connaissance nulle est un cas de la pratique. Par exemple : l'urne est matérialisée par un sac en étoffe opaque et mince ; au toucher, on peut compter les boules, vérifier l'identité de leurs formes mais non pas reconnaître leur caractère Blanc ou Non Blanc.

2.2. – Le cas de la loi binomiale se prête bien à ce qu'un exemple soit donné des insuffisances réciproques des logiques classique et bayésienne. Voici cet exemple.

Client et statisticien sont en présence. Le client reconnaît comme "bon" tout lot contenant une proportion de défectueux inférieure à une certaine limite r . Un lot reçu d'un fournisseur a été soumis à une épreuve qui a fait apparaître n défectueux en N essais. Rien d'autre n'étant pris en considération, le client demande au statisticien de lui dire quelle est la probabilité que ce lot soit un lot "bon".

Réponse : "Je ne puis répondre exactement à votre question, mais je suis prêt à vous indiquer deux approches :

– ou bien, classiquement, je vous donne un "intervalle de confiance" par rapport auquel r sera situé ; à cet intervalle est liée une probabilité, mais elle n'est pas celle qui vous intéresse directement ;

– ou bien, je traite la question dans le cadre de la logique bayésienne, et je vous donne la probabilité que vous me demandez, mais cette probabilité sera quelque peu subjective puisque, dans mes calculs, j'aurai fait intervenir une loi a priori, admise par moi à titre plus ou moins hypothétique.

Ainsi, un choix est à faire entre deux maux : ou bien répondre à côté de la question ; ou bien, admettre une certaine hypothèse – laquelle – il est vrai – peut sans difficulté être énoncée très explicitement. Le moindre de ces maux n'est pas forcément celui qui correspond à la logique bayésienne.

2.3. a – Lors du choix d'une loi a priori pour p , à une information résumée par la connaissance de n Blanches en N tirages, on doit chercher à faire correspondre une famille de lois a priori dont l'expression mathématique contiendrait n et N à titre de paramètres, avec comme cas particuliers :

- cas A : $n = N \neq 0$. C'est le cas où il n'a été tiré que des Blanches.
- (NB : le cas $n = 0$ et $N \neq 0$ se ramène au précédent et n'est pas cité dans la suite)
- cas B : $n = N = 0$: c'est là le cas de la connaissance nulle.

Pour que l'on soit assuré d'une certaine régularité dans les résultats à obtenir, l'expression de la famille de lois doit avoir une signification pour toutes les valeurs possibles des paramètres, même dans le cas particulier B, lequel, de plus, doit apparaître comme un cas limite.

Désirant attirer l'attention sur quelques autres considérations ayant une portée générale, nous le faisons dans la suite à l'occasion de l'examen des deux familles de lois suivantes en vue de déterminer laquelle de ces deux familles doit être préférée à l'autre.

Probabilité élémentaire :

- cas général

$$\frac{(N+1)!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} dp ; \quad \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n-1)!} p^{n-1} (1-p)^{N-n-1} dp$$

- cas A : $(N+1) p^N dp$; $p^{N-1} dp / (1-p)$
- cas B : dp ; $dp / p(1-p)$
(connaissance nulle)

Espérance mathématique de l'arrivée d'une Non Blanche

$$(N-n+1)/(N+2) ; \quad (N-n)/N$$

b – Pour simplifier, nous désignons dans la suite les deux familles venant d'être considérées, par leur expression correspondant au cas de la connaissance nulle, c'est-à-dire respectivement par dp et par $dp/p(1-p)$. Nous avançons à titre de proposition que les considérations qui y sont développées conduisent – dans le cas qui nous occupe, qui est celui où l'information est limitée à la connaissance de n et de N – à rejeter dp et à retenir $dp/p(1-p)$.

Les propositions du numéro 2.4 suggèrent une signification pouvant être donnée à la loi caractérisée par $dp/p(1-p)$, laquelle est la loi virtuelle proposée par LHOSTE [19] en 1923 : voir le n° 3.3.

Personnellement, nous avons largement développé cette même loi – ce que LHOSTE n'avait aucunement fait : voir de [5] à [11].

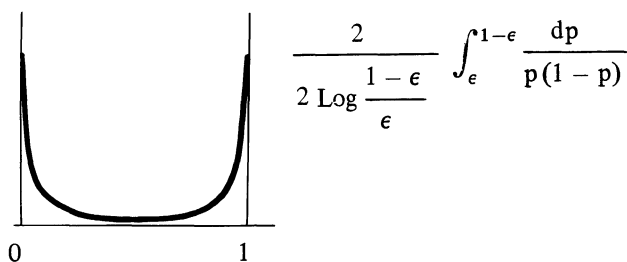
c – Choisir comme loi a priori, quand on ne connaît rien, une loi réelle, revient à admettre que tout se passe comme si l'on connaissait quelque chose de très précis. Ainsi, dans le cas qui nous occupe, admettre la loi dp reviendrait à admettre le schéma c du n° 2.1. Voilà qui nous choque profondément.

Aucune objection semblable ne saurait être faite à une loi virtuelle, telle $dp/p(1-p)$. Cela vient à l'appui de la proposition avancée en b.

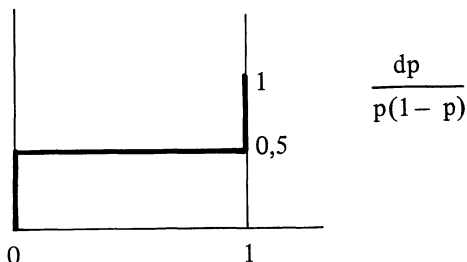
d – La loi dp n'apparaît pas comme loi limite ; d'après a ci-dessus, elle est donc à rejeter.

La loi $dp/p(1-p)$ est la forme limite d'une famille de lois réelles, à un paramètre, ϵ , lorsque ce dernier tend vers 0 : voir figure.

Courbe des densités de la loi réelle dont la fonction de répartition est :



Courbe de répartition de la loi (virtuelle), limite de la loi réelle pour $\epsilon \rightarrow 0$.



La loi $dp/p(1-p)$ est, à sa manière, une loi d'équiprobabilité, puisque, pour p_1 différent de 0 et de 1, la densité de probabilité de p_1 est nulle quel que soit p_1 . D'autre part, à chacune des limites 0 et 1 correspond une même probabilité, égale à 0,5. Ainsi, d'après cette loi, la présomption à faire avant le premier tirage, serait la même que celle à faire au jeu de pile ou face. Il nous semble que cette représentation concrète correspond assez bien, et même tout à fait bien, à la réalité.

e – Cas particulier $n = N \neq 0$, c'est à dire cas où l'on ne possède pas d'autre information que la sortie de N Blanches en N tirages. Soit à faire une présomption sur l'arrivée d'une Non Blanche au tirage suivant.

Les lois a priori dites plus haut indiquent respectivement comme espérance mathématique de l'arrivée d'une Non Blanche les valeurs $1/(N+2)$ pour la loi dp , et 0 pour la loi $dp/p(1-p)$.

Nous considérons que la valeur $1/(N+2)$ est inacceptable. En effet, dans les conditions dites, il y a certainement à "craindre" qu'une Non Blanche apparaisse au tirage suivant, mais il n'est manifestement pas possible de déterminer une probabilité correspondant à ce qu'il en soit ainsi ; on doit estimer que cette probabilité est *plus faible* que celle qui serait attribuée à l'arrivée d'une Non Blanche d'après un résultat qui aurait été $N-1$ Blanches et 1 Non Blanche ; ou encore qu'elle *au plus égale* à celle qui aurait été attribuée de même si le résultat connu avait été N Blanches et 1 Non Blanche ; mais on n'est certainement pas autorisé à retenir que cette probabilité est *égale* à "telle" valeur.

En conséquence, la loi dp ne peut être conservée pour exprimer la connaissance nulle – bien qu'elle ait été retenue dans ce cas par de nombreux auteurs : le fait est qu'elle a conduit ces auteurs à des résultats que nous désapprouvons entièrement.

De son côté, la loi $dp/p(1-p)$ conduit à attribuer la probabilité nulle à l'arrivée d'une Non Blanche ; elle incite donc l'expérimentateur à agir comme s'il avait la *certitude* de l'arrivée d'une Blanche. Voilà qui peut paraître bien absolu, mais qui est tempéré par l'obligation qui s'impose toujours à l'expérimentateur de juger avec son bon sens, avant d'agir, dans quelle mesure il doit tenir compte de la valeur numérique qu'un calcul attribue à une probabilité. En l'occurrence, il ne viendra certainement à l'idée d'aucun expérimentateur, surtout si N n'est pas grand, d'attribuer une bien grande confiance à la certitude sur laquelle le calcul attire son attention : il se dira, comme plus haut, que la probabilité qui l'intéresse n'est sans doute pas nulle, mais que, d'après le seul résultat N en N , elle est au plus égale à la valeur qui lui aurait été attribuée si le résultat avait été N en $N+1$, c'est-à-dire, à la valeur $1/(N+1)$.

Finalement, la loi $dp/p(1-p)$ amène l'expérimentateur à prendre sa décision d'après les valeurs 0 et $1/(N+1)$, attribuées comme limites à la probabilité qui l'intéresse ; voilà qui ne soulève aucune critique. Bien entendu, si l'expérimentateur voit de façon pratique, la possibilité d'acquérir un complément d'information avant de devoir prendre sa décision, il sera bien avisé de rechercher un tel complément.

L'analyse qui précède vient, elle aussi, à l'appui de la proposition avancée en b.

2.4. — **PROPOSITIONS.** Si N tirages, dont n Blanches, (n différent de 0 et de N) ont été effectués de façon exhaustive à partir d'une urne contenant initialement U boules dont un nombre inconnu u de Blanches, la probabilité devant être attribuée au fait que dans la suite une série de M tirages fera apparaître m Blanches, est égale à

$$\frac{M!}{m!(M-m)!} \cdot \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n-1)!} \cdot \frac{(m+n-1)!(M-m+N-n-1)!}{(M+N-1)!}$$

à la fois dans l'un et l'autre des deux cas suivants :

— *Proposition I* : la probabilité relative à un tirage est prise égale à la fréquence résultant des tirages précédents ;

— *Proposition II* : La loi a priori caractérisée par $1/u(U-u)$ est retenue.

Démonstration de la proposition I. (n° 163 de [7], d'après BACHELIER [1]). Dans le cas particulier où apparaissent, dans l'ordre, m Blanches puis M-m Non Blanches, la probabilité d'une telle succession est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{n}{N} \cdot \frac{n+1}{N+1} \cdot \dots \cdot \frac{n+m-1}{N+m-1} \cdot \frac{N-n}{N+m} \cdot \dots \cdot \frac{N-n+M-m-1}{N+M-1} &= \\ &= \frac{(N-1)!}{(N+M-1)!} \cdot \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{(N+M-n-m-1)!}{(N-n-1)!} \end{aligned}$$

Cette probabilité étant indépendante de l'ordre des tirages, elle est à multiplier par le nombre des combinaisons de M objets m à m pour obtenir la probabilité cherchée ; d'où l'expression de l'énoncé.

Démonstration de la proposition II (n° 138 de [7]). D'après le théorème de BAYES la probabilité cherchée s'obtient en effectuant le produit de deux probabilités, à savoir celle, tenant compte de l'hypothèse $1/u(U-u)$, que le fait d'avoir constaté n et N fait attribuer à la "cause" u, et d'autre part celle que la "cause" u engendre m et M. Ce produit est à sommer pour toutes les valeurs de u, de $u = n+1$ à $u = U - N - M + n + 1$. Une formule indiquée par BOUZITAT [4] conduit à l'expression de l'énoncé.

Remarque. Ainsi, voici un cas où deux raisonnements ressortissant respectivement l'un (Prop. I) au domaine des probabilités directes, l'autre (Prop. II) à la logique bayésienne, aboutissent à un seul et même résultat. La loi $1/u(U-u)$ se montre donc équivalente dans ce cas, à la convention, bien séduisante, de se laisser guider, coup par coup, par les fréquences résultant des tirages précédents. Manifestement, les conclusions, favorables à la loi caractérisée par $1/u(U-u)$, que l'on retient de la coïncidence indiquée, s'étendent à la loi $dp/p(1-p)$.

3. LOI DE LAPLACE-GAUSS, DE PARAMETRES μ ET σ (ou h)

3.1. — G. MORLAT [21] a traité un cas particulier de logique bayésienne relatif à la loi de L.G., en comparant les "intervalles de confiance classique et bayésien"

lorsque l'écart-type est connu. Une conclusion est que ces deux "intervalles de confiance" fournissent, non pas des solutions différentes au même problème, mais des solutions à des problèmes différents. Cette conclusion est manifestement à rapprocher de l'alternative du numéro 2.2., sur les deux maux en présence : ou bien, ne pas répondre exactement à la question posée, ou y répondre exactement, moyennant une hypothèse, d'ailleurs facile à énoncer.

3.2. — La loi de L-G. met en cause deux paramètres, à savoir la moyenne μ et un indice de dispersion qui est généralement l'écart-type σ , mais qui peut être aussi le module de précision h , avec $\sigma h \sqrt{2} = 1$. D'après le 2.3.c, on doit s'attendre à ce que la logique bayésienne fasse intervenir des lois a priori virtuelles. De fait, bien des auteurs ont raisonné sur des lois $d\mu$, $d\sigma$ et dh , qui sont des lois virtuelles en raison des intervalles de variation infiniment grands des paramètres en cause. En ce qui concerne la loi $d\mu$, on peut remarquer qu'elle est la loi limite de la loi d'équiprobabilité, et aussi, comme le signale G. MORLAT, d'une loi de L-G. dont l'écart-type tendrait vers l'infini. Mais d'autres lois sont proposées.

3.3. — LHOSTE [19] considère les deux paramètres A et B, positifs ou nuls, tels que $A \cdot B = 1$. A un intervalle (a_1, a_2) de A correspond un intervalle (b_1, b_2) de B. A une certaine indétermination de A dans son intervalle doit nécessairement correspondre la même indétermination de B dans le sien. LHOSTE indique comment cela le conduit aux lois a priori équivalentes dA/A et dB/B . Il en conclut que, dans le cas de la loi de L-G. les lois a priori $d\sigma/\sigma$ et dh/h sont équivalentes et que, pour éviter des contradictions, il convient par suite de les adopter en cas de connaissance nulle.

Remarque — De façon analogue, LHOSTE retient pour μ la loi $d\mu$. D'autre part, relativement au paramètre p de la loi binomiale, il suffit de poser $A = p/(1 - p)$ et $B = (1 - p)/p$; la loi a priori à retenir apparaît alors comme étant $dp/p(1 - p)$.

Les lois a priori $d\sigma/\sigma$, dh/h et $dp/p(1 - p)$, sont, pour nous, les lois de LHOSTE.

3.4. — Pour avoir l'expression d'une loi a posteriori, fonction du σ de la loi de L-G., on peut *soit* partir de l'expression de cette loi en fonction de σ , puis appliquer la loi a priori de σ que l'on retient, *soit* partir de l'expression de la loi de L-G. en fonction de h , appliquer la loi a priori de h que l'on retient, puis, dans l'expression obtenue, effectuer le changement de variable de h en σ .

Si, comme lois a priori, on adopte $d\sigma$ et dh , une contradiction apparaît.

KOLMOGOROFF, dans [17] a vu la contradiction mais ne l'a pas levée. Préalablement, LHOSTE avait vu la contradiction, et avait fait observer que ses lois la supprimaient : l'équivalence de $d\sigma/\sigma$ et de dh/h se manifestait en l'occurrence.

3.5. — Dans notre [5] de 1937, nous avons développé ce qui pouvait être attendu de la loi a priori dh/h et même de la loi à deux dimensions $d\mu dh/h$. Nous avons été conduit à ces lois par le fait qu'elles établissaient des concordances, que nous jugeons harmonieuses, entre résultats de probabilités directes et inverses.

Peu après, les travaux de LHOSTE étant venus à notre connaissance, nous avons conservé ce choix pour notre [7], dans lequel on trouve en outre notamment :

- des développements de l'autre loi de LHOSTE, la loi $dp/p(1-p)$;
- au n° 345, la loi $d\mu_2/\mu_2$, où μ_2 est le moment d'ordre 2 de la loi de L-G. ; cette loi est équivalente à $d\sigma/\sigma$ et naturellement aussi à dh/h ;
- au n° 423, la loi da/a , lorsque a est le paramètre de la loi de Poisson ;
- au n° 213 et à bien d'autres, l'observation que des lois a priori à deux dimensions peuvent conduire à reconnaître quels sont, étant donné le problème étudié, les groupements de paramètres qui sont, entre eux, indépendants en probabilité ;
- au n° 341 et suivants, diverses considérations toutes en faveur des lois a priori adoptées.

Dans deux notes [6], nous avons, grâce aux lois de LHOSTE, établi un raccord entre la logique bayésienne et les probabilités fiduciaires de FISHER.

On trouve ci-après, en Bibliographie commentée, différentes lois a priori que des auteurs ont préconisées à peu près à l'époque de nos travaux.

Remerciements : Nous sommes très reconnaissant aux Professeurs G. MORLAT et C. PARTRAT qui, sur une première rédaction de la présente note, nous ont fait parvenir des observations très constructives, dont nous avons eu plaisir à tenir compte.

4. BIBLIOGRAPHIE COMMENTEE

Nous avons retenu de faire figurer dans la présente Bibliographie, outre les ouvrages cités dans le texte, quelques ouvrages contemporains, traitant aussi de probabilités a priori. Pour chaque ouvrage, des commentaires rapides donnent une idée de ce qui peut y être trouvé, concernant les lois a priori.

- [1] BACHELIER L. (1912). – *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars. Cité en 2.4.
- [2] BLACKETT (1925). – *Pro. Roy. Soc.*, 107 A, p. 349. – L'auteur met en avant des lois virtuelles ; ses écrits, que nous n'avons pas pu consulter, sont cités par HALDANE [15], qui en discute les résultats.
- [3] BOREL E. (1949). – Remarques faisant suite à la note [8]. L'auteur prend parti contre toute loi virtuelle.
- [4] BOUZITAT J. (1947). – Notes sur un problème de sondage. Office nat. d'études et de recherches aéronautiques. L'auteur y donne une formule, utilisée en 2.4.
- [5] DUMAS M. (1937). – Notes sur les séries de mesures appartenant à une loi de Gauss. *Mémorial de l'artillerie française*. Tome 16, fasc. 3, 72 p. Cité en 3.5.

- [6] DUMAS M. (1945). — Sur des lois de probabilité divergentes et la formule de FISHER. *Congrès de l'Ass. fra. pour l'avancement des sciences* et (1947). Sur une loi de probabilité a priori conduisant aux arguments fiduciaires de FISHER. *La revue scientifique*, n° 3 264, 16 p. Cité en 3.5.
- [7] DUMAS M. et MAHEU P. (1948-50). — Les méthodes statistiques et leurs applications dans le domaine des techniques industrielles. Différents fascicules des tomes 22 à 24 du *Mém. de l'art. fran.*, 630 p. Ces fasc. ont été réunis en un vol. par EYROLLES. — L'auteur présente à nouveau les résultats de [5] relatifs à la loi de L.G.; il adopte, d'après LHOSTE [19] la loi $dp/p(1 - p)$ pour la loi binomiale et aborde le cas d'autres lois. Cité en 2.3. b ; 2.4 et 3.5.
- [8] DUMAS M. (1949). — Interprétation de résultats de tirages exhaustifs. *C.R. des séances de l'Ac. des Sciences*. Tome CCXXVIII, séance du 14 mars 1949. Le recours de l'auteur à des lois virtuelles est critiqué par BOREL E. [3].
- [9] DUMAS M. Chapitre VI. Les probabilités a posteriori. du Calcul des probabilités du Formulaire de mathématique. C.N.R.S. (1952), 3 p. — Exposé de quelques résultats obtenus avec des lois virtuelles.
- [10] DUMAS M. (1955). — Les épreuves sur échantillon. *Monographie du C.E. M.A.* — C.N.R.S. éditeur. Préface de M. FRECHET, 170 p. L'auteur expose à nouveau, sans démonstration, des résultats obtenus avec des lois virtuelles.
- [11] DUMAS M. (1965) Quelques à propos sur les probabilités. *Mém. de l'art. fran.*, tome 39. — Différentes propositions de la présente note, s'y trouvent déjà exposées.
- [12] FINETTI B. de (1952). — Gli eventi equivalenti e il caso degenero. Institut des actuaires italiens, Rome, 24 p. — L'auteur étudie la question des événements également probables et cite des lois virtuelles.
- [13] FLORENS J.P. — Mesures a priori et invariance dans une expérience bayésienne. Pub. de *l'Institut de Sta. de l'Uni. de Paris*, Vol. XXIII, 1978. Cité en 1.3.
- [14] FRECHET M. (1956). — Analyse de [10] dans le *Bul. des sciences math.*, 2^e série, tome LXXX. L'auteur, citant RENYI [22] donne son accord aux lois virtuelles proposées.
- [15] HALDANE J.B.S. (1932). — *Pro. Camb. Phil. Soc.* 28-1932, 58 p. : Voir [2].
- [16] JEFFREYS H. (1940). — Note on the Behrens-Fisher formula. *Annals of Eugenics*. L'auteur développe un raisonnement qui le conduit aux lois virtuelles $d\mu d\sigma/\sigma$ et $dp/p(1 - p)$.
- [17] KOLMOGOROFF A. (1942). — Sur l'estimation statistique des paramètres de la loi de Gauss. *Bul. de l'Ac. des S. de l'URSS*, Série Math., tome 6. Cité en 3.4.
- [18] LAURENT A.G. (1951). — La probabilité a priori. *Com. à la Royal Statistical Soc. Conférence de Cambridge*. L'auteur part de conditions d'invariance et aboutit aux lois $dp/p(1 - p); d\mu$ puis $d\sigma/\sigma$, et aussi à la loi à deux dimensions $d\mu d\sigma/\sigma^2$.
- [19] LHOSTE E. (1923). — Le calcul des probabilités appliqués à l'artillerie. *Revue d'artillerie*, tome 91. Berger-Levrault. Cité en 2.3. b et en 3.3.

- [20] PERKS W. (1947). – Some observations on inverse probability including a new indifference rule. *Jour. of the institute of actuaries*, Vol. LXXIII. L'auteur, après avoir cité JEFFREYS H., propose une "règle d'indifférence" qui le conduit à $d\sigma/\sigma$ et à $dp/\sqrt{p(1-p)}$.
- [21] MORLAT G. – Sur la comparaison entre les intervalles de confiance classiques et bayésiens (1978). *Rev. de Stat. app.*, Vol. XXVI, n° 2, 4 p. Cité en 3.1.
- [22] RENYI A. (1955). – On a new axiomatic theory of probability. *Acta mathematica Ac. Sc. Hungaricae*, Tome VI, Fasc. 3-4, 50 p. Cité en [14].
- [23] SAVAGE L.J. (1959). – The foundations of statistical inference. Wiley.
- [24] VESSEREAU A. (1978). – Sur l'intervalle de confiance d'une proportion : logique "classique" et logique "bayésienne". *R de Sta. app.*, Vol. XXVI, n° 2, 28 p. Cité en 1.1.
- [25] WALD A. (1933). – Statistical hypothesis in relation to probabilities a priori. Cambridge, Phi. Soc. Proc. L'auteur trouve la loi $d\mu d\sigma/\sigma$ comme loi limite à adopter lorsque l'on prend en considération la solution qui minimise le risque maximal.
- [26] WASHINGTON (Congrès de . . .) (1947). – Rapport de M. FRECHET sur une enquête internationale sur l'estimation des paramètres. *Bull. de l'I.S.A.*, Tome XXXI, livre III A, p. 363 à 422. Les auteurs répondant à l'enquête devaient prendre explicitement parti pour ou contre le recours au raisonnement bayésien pour l'estimation des paramètres. Deux des seize réponses firent état de ce que logique classique et logique bayésienne avaient trait à des problèmes différents.