REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

MAX PINHAS

Processus de diffusion et espérance arrêtée : application au calcul actuariel

Revue de statistique appliquée, tome 28, nº 1 (1980), p. 77-79

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1980__28_1_77_0>

PROCESSUS DE DIFFUSION ET ESPERANCE ARRETEE : APPLICATION AU CALCUL ACTUARIEL

Max PINHAS

Université des Sciences Sociales, Toulouse

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, $\mathcal{F}(t)$ $t \geqslant 0$ une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, $(W(t), \mathcal{F}(t))$ un mouvement brownien standard et $(X(t), \mathcal{F}(t))$ le processus défini par :

$$dX = (m + \rho X)\,dt + \sigma dW, \quad X(0) = X_0 > 0$$

et m, ρ, σ fonctions déterministes, continues vérifiant pour $t \geqslant 0$:

$$m(t) > 0 \quad , \quad \rho(t) \geqslant 0 \quad , \quad \sigma(t) \geqslant c > 0 .$$

Nous savons [1, 2] que X possède des trajectoires continues (avec la probabilité 1) et qu'il admet pour expression :

$$X(t) = h(t)\left[X_0 + \int_0^t \frac{m}{h}\,ds + \int_0^t \frac{\sigma}{h}\,dW(s)\right] \quad \text{où} \quad h(s) = \exp \int_0^s \rho\,du .$$

Choisissons un horizon T et posons :

$$\theta(\omega) = \inf\{t, X(t,\omega) = 0\} \quad \text{et} \quad \theta(\omega) = +\infty$$

si l'ensemble est vide,

$$A = \{\omega, \theta(\omega) \leqslant T\}.$$

Nous considérons alors la variable aléatoire $\widetilde{X} = X(\theta \wedge T)$.

L'objectif essentiel de cette note est de construire un minorant de l'espérance arrêtée $E\widetilde{X}$. Par ailleurs, à titre d'illustration, nous appliquons cette technique à l'étude d'un comportement actuariel.

1. UN MINORANT DE 1 – P(A)

A tout $\eta > 0$ faisons correspondre le sous-ensemble $\Delta(\eta)$ du plan (α, β) caractérisé par :

$$\begin{cases} \alpha \geqslant 0 \quad , \quad \beta \geqslant 0 \\ \min\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \left[X_0 + \int_0^t \frac{m}{h}\,ds - \frac{\alpha}{2}\,g(t) - \beta\right] \geqslant \eta , \quad \text{où} \quad g(t) = \int_0^t \frac{\sigma^2}{h^2}\,ds . \end{cases}$$

Nous remarquons qu'il existe des valeurs de η pour lesquelles ce sous-ensemble n'est pas vide (par exemple, $\eta \leqslant X_0$). On vérifie d'autre part que $\Delta(\eta)$ est borné et fermé.

Puisque cet ensemble est compact nous introduisons la fonction γ :

$$\begin{cases} \gamma(\eta) = 0 & \text{si} \quad \Delta(\eta) = \phi \\ \gamma(\eta) = \max (1 - e^{-\alpha\beta}) & \text{sinon} \end{cases}$$

Utilisant la technique de minoration préconisée dans une étude antérieure [3], nous pouvons affirmer le résultat suivant :

Théorème. – La probabilité $1 - P(A)$ est minorée par $\sup\limits_{\eta > 0} \gamma(\eta)$.

2. UN MINORANT DE L'ESPERANCE ARRETEE

Comme par définition $\theta \wedge T = \min(\theta, T)$, l'espérance arrêtée est donnée par la formule :

$$E\widetilde{X} = h(T) \left[X_0 + \int_0^T \frac{m}{h} ds \right] (1 - P(A)) + h(T) \int_{CA} \int_0^T \frac{\sigma}{h} dW(s,\omega)\, dP(\omega).$$

Or $\left| \int_{CA} \int_0^T \frac{\sigma}{h} dW(s,\omega)\, dP(\omega) \right| \leqslant \int_\Omega \left| \int_0^T \frac{\sigma}{h} dW(s,\omega) \right| dP(\omega)$ et

$\int_0^T \frac{\sigma}{h} dW(s)$ suit une loi gaussienne, de moyenne nulle et de variance

$$v^2 = \int_0^T \frac{\sigma^2}{h^2} ds .$$

Nous en déduisons le minorant :

$$K = h(T) \left\{ \left[X_0 + \int_0^T \frac{m}{h} ds \right] \sup \gamma(\eta) - v \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right\}$$

3. UNE APPLICATION A LA THEORIE DES ASSURANCES (Mutuelles)

Nous supposons dans ce paragraphe que l'équation :

$$dX = [m(t, X) + \rho(t, X) X]\, dt + \sigma(t)\, dW$$

régit l'évolution du fonds de réserve de la compagnie.

* X_0 valeur initiale.
* $\rho \geqslant 0$ taux d'intérêt à court-terme.

* p dt prime perçue pendant $[t, t+dt]$.

* risques élémentaires gaussiens, indépendants, de moyenne $\mu\, dt$, et de variance $\sigma^2\, dt$ (μ et σ fonctions déterministes continues, $\mu(t) > 0$ et $\sigma(t) \geqslant c > 0$).

* $m = p - \mu$ chargement de sécurité instantané.

Envisageons la politique consistant à déterminer le chargement de sécurité par la condition (imposée aussi longtemps que X reste positif) :

$$m + \rho X = \frac{\tau}{2} \sigma^2$$

(où τ est une constante positive) d'où $p = \mu + \frac{\tau}{2} \sigma^2 - \rho X$.

Alors dX devient égal à $\frac{\tau}{2} \sigma^2\, dt + \sigma\, dW$ et le minorant de l'espérance arrêtée vaut :

$$K = \left[X_0 + \frac{\tau}{2} \int_0^T \sigma^2\, ds \right] \sup \gamma(\eta) - \left[\frac{2}{\pi} \int_0^T \sigma^2\, ds \right]^{1/2} .$$

Un calcul élémentaire donne [3] :

$$\sup \gamma(\eta) = \begin{cases} 1 - \exp\left(- \dfrac{\left(X_0 + \frac{\tau}{2} \sigma^2 T\right)^2}{2\sigma^2 T} \right) & \text{si} \quad T \leqslant \dfrac{2X_0}{\tau\sigma^2} \\[2ex] 1 - \exp(-\tau X_0) & \text{si} \quad T \geqslant \dfrac{2X_0}{\tau\sigma^2} . \end{cases}$$

Comme $\sup \gamma(\eta)$ reste constamment supérieur ou égal à $1 - \exp(-\tau X_0)$, un autre minorant (plus simple) de l'espérance arrêtée apparaît :

$$L = \left(X_0 + \frac{\tau}{2} \int_0^T \sigma^2\, ds \right) (1 - e^{-\tau X_0}) - \left(\frac{2}{\pi} \int_0^T \sigma^2\, ds \right)^{1/2} .$$

Indiquons enfin *deux utilisations* immédiates de ce minorant. L est, de façon évidente, une fonction croissante de τ (variable positive), dont le domaine des valeurs contient la demi-droite $\mathbf{R}_+$. Par conséquent :

a) *si X_0 est fixé à l'avance,* en résolvant par rapport à τ l'équation $L = X_0$ et en reportant la valeur de la racine dans l'expression de p, on obtient une évaluation de la prime unitaire qui garantit que le fonds de réserve à l'instant T – compte-tenu de la règle de cessation d'activité en cas de fonds de réserve nul sur $[0, T]$ – se situera, en moyenne, à un niveau supérieur ou égal à son niveau initial.

b) dans le cas où X_0 et τ sont *toutes deux variables de décision,* et où à la condition précédente s'ajoute l'obligation de limiter à ϵ la probabilité de ruine (pour un exercice de durée infinie), les équations $L = X_0$ et $\epsilon = e^{-\tau X_0}$ (cf. [3]) déterminent sans ambiguïté les exigences de cette politique.

[1] LIPTZER-SHYRIAEV. – "Statistique des processus stochastiques".

[2] FRIEDMAN. – "Stochastic differential equations" Academic Press.

[3] PINHAS. – "Probabilité de survie et martingale exponentielle". (Cahier n° 31 de l'U.E.R. de Sciences Economiques, Toulouse 1).