REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

MAX PINHAS

Investissement et taux d'intérêt : un modèle stochastique d'analyse conjoncturelle

Revue de statistique appliquée, tome 27, nº 1 (1979), p. 81-85
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1979__27_1_81_0>

INVESTISSEMENT ET TAUX D'INTÉRÊT : UN MODÈLE STOCHASTIQUE D'ANALYSE CONJONCTURELLE

Max PINHAS

L'objectif visé par la présente étude consiste à prévoir dans quelle mesure la valeur du taux d'intérêt pratiqué sur le marché des capitaux influence la décision d'investir d'un agent économique.

Nous avons inscrit notre modèle dans le contexte suivant :

* le décideur a la faculté de répartir son avoir initial a en λ a montant consacré à l'unique activité productrice à sa disposition, et $(1 - \lambda)$a prêt consenti au taux (continu) i ; $\lambda \epsilon [0, 1]$. Ces deux opérations ont pour horizon commun h ;

* la valeur (en francs constants) de l'unité d'investissement évolue pendant la période [0, h] selon un schéma différentiel stochastique fondé sur deux paramètres ρ et σ^2, connus du décideur au moment de son choix ; p a la signification d'un taux moyen de rentabilité et σ^2 traduit le degré d'incertitude attaché à la perspective aléatoire ;

* le comportement de l'agent économique est de type bernoullien et de plus sa fonction d'utilité exprime une aversion relative constante $(1 - p)$ à l'égard du risque.

Outre la simplicité des résultats obtenus et l'évidence de leur interprétation économique nous pensons que militent en faveur de ce modèle d'autres arguments :

* l'estimation des paramètres est aisée,

* à cause du degré de liberté $(1 - p)$ l'hypothèse de comportement peut convenir à une gamme assez vaste d'agents (de nature micro ou macro-économique),

* la souplesse de la formulation mathématique autorise certaines extensions (par exemple, la prise en compte de l'inflation).

1. L'EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE D'EVOLUTION

Nous supposons acceptable de décrire l'évolution de la valeur de l'investissement sur [0, h] au moyen de l'équation :

$$dX = \rho X \, dt + \sigma X \, dW$$

ρ, σ constantes positives,

W mouvement brownien standard,

$$X(0) = X_0 > 0.$$

Mots-clés : **Modèle stochastique, évolution.**

6

Nous notons en particulier que dans cette représentation le poids du terme aléatoire est directement lié à la valeur de X.

Définissons Y et α par $Y = \text{Log}\, X$ et $\alpha = \rho - \frac{\sigma^2}{2}$.

D'après la formule de Ito (1) :

$dY = \alpha\, dt + \sigma\, dW$. Par conséquent $Y = Y_0 + \alpha t + \sigma W(t)$ et donc

$$X = X_0 \exp \{\alpha t + \sigma W(t)\}$$

2 L'ESTIMATION DES PARAMETRES DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE

Désignons de manière provisoire (c'est-à-dire seulement dans ce paragraphe) par [0, h] un intervalle de temps pendant lequel l'évolution de X a été observée. Nous pouvons alors lui associer les estimateurs suivants :

a) Le paramètre α

La v.a. $\frac{1}{h} \text{Log} \frac{X(h)}{X_0}$ admet pour moyenne et variance respectiement α et $\frac{\sigma^2}{h}$.
C'est donc un estimateur sans biais de α qui converge en moyenne quadratique lorsque $h \to +\infty$.

b) Le paramètre σ^2

Considérons d'abord la v.a. $R = \sigma \max W(t)$, pour $t \in [0, h]$ et conditionnée par $W(0) = W(h) = 0$. On montre (2) que la densité de probabilité de R est :

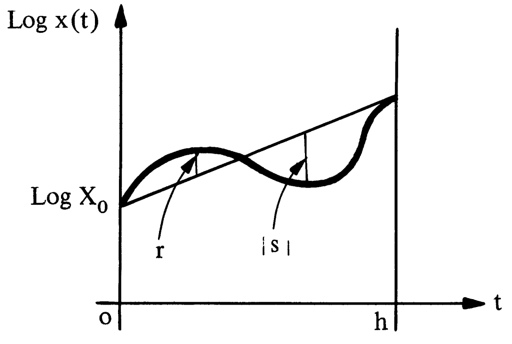
$$\begin{cases} \dfrac{4r}{\sigma^2 h} \exp\left(\dfrac{-2r^2}{\sigma^2 h}\right) & \text{pour} \quad r \geqslant 0 \\ 0 & \text{pour} \quad r < 0 \end{cases}$$

(la v.a. $S = \min \sigma W(t)$, soumise au même conditionnement possède une densité analogue : remplacer r par $-s$, pour $s \leqslant 0$).

Ainsi la maximisation de la vraisemblance par rapport à σ^2 conduit-elle à la v.a. $\frac{2R^2}{h}$. Par souci de symétrie et sans diminuer la qualité de l'estimateur nous lui substituons la v.a. $\frac{1}{h}[R^2 + S^2]$ d'espérance σ^2 et de variance $\leqslant \sigma^4$.

Revenant au processus X nous constatons alors que l'estimateur retenu pour σ^2 s'écrit :

$$\frac{1}{h}\left\{\left[\max\left(\text{Log}\frac{X(t)}{X_0} - \frac{t}{h}\text{Log}\frac{X(h)}{X_0}\right)\right]^2 + \left[\min\left(\text{Log}\frac{X(t)}{X_0} - \frac{t}{h}\text{Log}\frac{X(h)}{X_0}\right)\right]^2\right\}.$$



3 LES FONCTIONS D'UTILITE A AVERSION RELATIVE CONSTANTE

Les fonctions d'utilité u à aversion relative constante et définies pour $z \in R_+^*$, appartiennent comme on sait à l'une des trois catégories :

$$1)\ z^p \quad 0 < p \leqslant 1 \qquad 2)\ \mathrm{Log}\, z \qquad 3)\ -z^p \quad p < 0.$$

Pour plus de commodité la fonction logarithmique sera désormais mentionnée par la valeur nulle du paramètre p. Avec cette convention l'aversion relative $-\frac{u''}{u'} z$ vaut toujours $1 - p$.

4 TAUX DE RENTABILITE EQUIVALENT

A tout choix d'une fonction d'utilité et d'un horizon correspond le taux de rentabilité équivalent γ défini par :

$$E\, u(X(h)) = u(X_0\, e^{\gamma h})$$

Compte tenu de la formule $E\,[\exp s\, W(h)] = \exp\left(s^2\, \frac{h}{2}\right)$, $\forall\, s \in R$, il vient :

$$\gamma = \rho - (1 - p)\, \frac{\sigma^2}{2}\, (p \leqslant 1).$$

Nous constatons que :

* γ est en fait indépendant de h et de X_0,

* ρ s'interprète comme le taux de rentabilité équivalent associé à la fonction $u(z) \equiv z$,

* $\frac{\sigma^2}{2}$ mesure l'affaiblissement du taux quand on substitue l'utilité logarithmique à l'utilité linéaire.

5 LE PARTAGE OPTIMAL

L'agent économique est supposé répartir son avoir initial a en investissement et prêt de façon à maximiser l'espérance mathématique de l'utilité à la date h.

Adoptant les simplifications d'écriture :

$[\ \ ] = \lambda \exp \{\alpha h + \sigma W(h)\} + (1 - \lambda) \exp \{i h\}$

$(\ \ ) = \exp \{\alpha h + \sigma W(h)\} - \exp \{i h\}$,

et nous plaçant dans le cas $0 < p \leqslant 1$, nous découvrons que le décideur aura pour objectif d'atteindre le maximum de

$$\varphi(\lambda) = E [\ \ ]^p \quad \text{pour} \quad \lambda \in [0, 1]$$

Comme les conditions suffisantes de dérivation sous le signe E (3) sont présentement vérifiées, nous pouvons écrire :

$$\varphi'(\lambda) = E\, p [\ \ ]^{p-1} (\ \ )$$

et

$$\varphi''(\lambda) = E\, p (p - 1) [\ \ ]^{p-2} (\ \ )^2 \leqslant 0$$

Par conséquent φ est une fonction concave de λ. D'autre part un calcul immédiat prouve que $\varphi'(0)$ et $\varphi'(1)$ ont même signe respectivement que $\rho - i$ et $\rho - (1 - p)\, \sigma^2 - i$. Finalement trois cas sont à distinguer pour évaluer la valeur optimale $\tilde{\lambda}$:

- $i \leqslant \rho - (1 - p)\, \sigma^2$ $\quad \tilde{\lambda} = 1$
- $i \geqslant \rho$ $\quad \tilde{\lambda} = 0$
- $i \in]\, \rho - (1 - p)\, \sigma^2, \rho\, [$ $\quad \tilde{\lambda} \in]\, 0, 1\, [$ et est solution de $\varphi'(\lambda) = 0$.

Ces mêmes conclusions restent valables pour $p \leqslant 0$.

6 VARIATION DE $\tilde{\lambda}$ EN FONCTION DE $i\, (0 < p < 1)$

Seul le cas $i \in]\, \rho - (1 - p)\, \sigma^2, \rho\, [$ reste indécis :

$$\varphi'(\tilde{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow E [\sim]^{p-1} (\ \ ) = 0$$

Différencions cette dernière équation par rapport à $\tilde{\lambda}$ et i :

$$E \{(p - 1) [\sim]^{p-2} (\ \ )^2\} \, d\tilde{\lambda}$$

$$+ E \{(p - 1) [\sim]^{p-2} (\ \ ) (1 - \tilde{\lambda}) h e^{ih} - [\sim]^{p-1} h e^{ih}\} di = 0$$

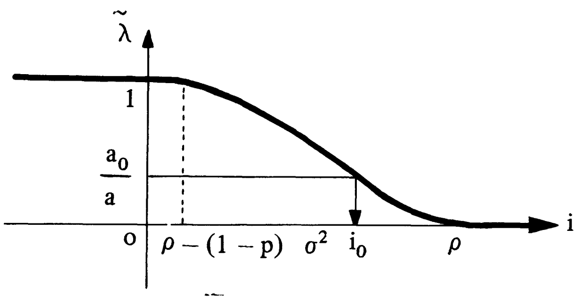
Le coefficient de $d\tilde{\lambda}$ est négatif. Quant à celui de di, après division par $h e^{ih}$ il s'écrit :

$$(p - 1) E \{[\sim]^{p-2} \exp (\alpha h + \sigma W(h))\} - p E \{[\sim]^{p-1}\}$$

Il est donc aussi négatif. Par suite $\tilde{\lambda}$ décroît quand i augmente.

7 TAUX D'INTERET ET INCITATION A INVESTIR

Les calculs précédents montrent que le montant investi s'élève exactement au niveau a_0 pour les valeurs de i solutions de $\tilde{\lambda}(i) = \frac{a_0}{a}$. Dans l'hypothèse où $0 < p < 1$ et $0 < a_0 < a$, nous pouvons affirmer d'après le paragraphe 6 qu'une seule valeur i_0 du taux d'intérêt convient (la monotonicité de $\tilde{\lambda}$ n'a pas été démontrée dans le cas $p \leqslant 0$).



L'approximation linéaire

Souvent dans les applications a_0 représente le niveau *minimum* à atteindre et un ordre de grandeur concernant le plafond i_0 suffit. Alors l'emploi (prudent) de l'interpolation linéaire simplifie considérablement les calculs et l'interprétation économique. Plus précisément la condition $i \leqslant i_0 \cong \rho - \frac{a_0}{a}(1-p)\,\sigma^2$ s'exprime aisément à l'aide de :

* $\frac{a_0}{a}$ incitation à investir * (ρ, σ^2) paramètres conjoncturels
* $(1 - p)$ aversion relative contre le risque.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GIKHMAN-SKOROKHOD. – *Introduction to the theory of random processes.* Saunders.

[2] KARLIN. – *Introduction aux processus aléatoires.* Dunod.

[3] GENET. – *Mesure et intégration.* Vuibert.