

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

G. MARTINEAU

J. FAUCHON

## **Utilisation de l'approximation Gamma et de l'approximation Bêta en prédimensionnement**

*Revue de statistique appliquée*, tome 25, n° 4 (1977), p. 45-78

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1977\\_\\_25\\_4\\_45\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1977__25_4_45_0)

© Société française de statistique, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# UTILISATION DE L'APPROXIMATION GAMMA ET DE L'APPROXIMATION BETA EN PRÉDIMENSIONNEMENT

G. MARTINEAU et J. FAUCHON

Centre d'Actualisation Scientifique et Technique et Centre de Mathématiques  
I.N.S.A. - 69621 Villeurbanne CEDEX

## TABLE DES MATIERES

	Pages
I – Introduction . . . . .	46
II – Approximation par des lois Gamma des lois de combinaisons de variables aléatoires normales . . . . .	47
II.1. Combinaisons étudiées . . . . .	47
II.2. Recherche des lois exactes des combinaisons . . . . .	47
II.3. Approximation Normale . . . . .	49
II.4. Approximation Gamma . . . . .	53
II.5. Domaine de validité des approximations . . . . .	53
III – Méthodes de conception par la fiabilité . . . . .	56
III.1. Introduction . . . . .	56
III.2. Présentation des calculs . . . . .	57
III.3. Méthode de calcul reposant sur l'hypothèse de normalité de la contrainte . . . . .	58
III.4. Méthode de dimensionnement proposé : utilisation des lois Gamma et Béta de seconde espèce . . . . .	59
III.5. Critères de choix entre les deux méthodes . . . . .	64
IV – Exemple d'utilisation des méthodes de prédimensionnement . . . . .	64
IV.1. Position du problème . . . . .	64
IV.2. Dimensionnement de la poutre . . . . .	66
V. – Conclusion . . . . .	70
ANNEXE A . . . . .	71

	Pages
ANNEXE B . . . . .	72
ANNEXE C . . . . .	73
ANNEXE D . . . . .	76

## I. INTRODUCTION

La présente étude a pour objet de proposer une méthode de conception par la fiabilité d'un élément de machine.

\\ Dans une première partie (chapitre II) on considère les combinaisons somme, produit, quotient, élévation à la puissance . . . de variables aléatoires. En général, les calculs de Mécanique des Solides, abordés à partir de considérations probabilistes, font intervenir initialement, des variables aléatoires Normales. La plupart des combinaisons envisagées ci-dessus conduisent alors à des variables aléatoires suivant des lois inconnues. Celles-ci, dans les méthodes actuelles de dimensionnement, sont approchées par des lois Normales.

Toutefois, le domaine de validité de cette approximation n'est pas défini de manière précise. Grâce à l'utilisation de tests statistiques, nous précisons, pour un risque d'erreur donné, les domaines de validité d'un certain nombre de ces approximations. Simultanément est défini le domaine de validité correspondant à l'approximation de type Gamma laquelle, au cours de développements, apparaîtra comme une intéressante alternative à l'approximation Normale.

La partie suivante (chapitre III) traite précisément de l'approximation Gamma dans la conception par la fiabilité d'un élément de machine. La méthodologie qui en résulte est appliquée au cas concret d'une lame soumise à des sollicitations alternées de flexion. Les résultats ainsi obtenus sont comparés à ceux issus de la procédure usuelle de dimensionnement basée sur l'hypothèse de normalité.

Des simulations de la fiabilité R sont ensuite envisagées. Elles permettent entre autre de préciser les domaines d'application de l'une et l'autre procédure.

## II – APPROXIMATION PAR DES LOIS GAMMA DES LOIS DE COMBINAISONS DE VARIABLES ALEATOIRES NORMALES

### II.1. – Combinaisons étudiées :

Partant de l'hypothèse développée au paragraphe I, à savoir que les variables rencontrées dans les calculs de résistance des matériaux sont le plus souvent des variables aléatoires Normales, les formules de calcul des contraintes font alors intervenir des combinaisons de variables aléatoires Normales.

Afin de pouvoir déterminer la loi suivie par une variable aléatoire résultant de la combinaison de variables aléatoires Normales indépendantes, nous envisageons les situations les plus couramment rencontrées. Il s'agit essentiellement des variables aléatoires :

$$X = Z_1 \cdot Z_2$$

$$X = \frac{Z_1}{Z_2}$$

$$X = Z^{1/2}$$

$$X = Z^2$$

$$X = Z^3$$

Dans toutes ces combinaisons  $Z$ ,  $Z_1$  et  $Z_2$  sont des variables aléatoires Normales indépendantes.

### II.2. – Recherche des lois exactes des combinaisons

A partir des différentes combinaisons précédemment énumérées, nous cherchons la loi suivie par la variable aléatoire  $X$ .

#### II.2.1. – Loi de $X = Z_1 \cdot Z_2$

M.G. Kendall et A. Stuart {1} ont déterminé la densité de probabilité de la variable aléatoire  $X = Z_1 \cdot Z_2$  lorsque  $Z_1$  et  $Z_2$  suivent des lois Normales centrées. Ce résultat est sans intérêt en ce qui nous concerne.

Dans le cas où  $Z_1$  et  $Z_2$  suivent des lois normales non centrées, la méconnaissance de la fonction densité de probabilité de  $X$  est compensée par la détermination de sa fonction caractéristique. Celle-ci récemment développée {2} permet en effet de connaître les cumulants et les coefficients de Fisher (asymétrie et aplatissement) d'où toute possibilité de tests d'adéquation.

Les expressions de l'espérance et de la variance sont consignées dans le tableau I.

#### II.2.2. – Loi de $X = Z_1/Z_2$

Dans le cas du quotient de deux variables aléatoires Normales indépendantes, la densité de probabilité de la variable  $X$  n'est pas connue. On sait que le quotient

de deux variables aléatoires Normales indépendantes centrées réduites donne par contre une loi de Cauchy mais ce cas est aussi sans intérêt dans notre étude. Il est par contre possible de connaître les valeurs numériques de la fonction de répartition de  $L(X)$  grâce à un changement de variable approprié {2}. A la connaissance des auteurs, aucun calcul exact des cumulants n'est possible : on a donc recours à des approximations que nous développerons dans les paragraphes ultérieurs.

### II.2.3. – Loi de $X = Z^{1/2}$

La recherche de lois de combinaisons de variables aléatoires Normales nous a conduit à déterminer la loi exacte suivie par la variable aléatoire :

$$X = d + \left( \sum_{\alpha=1}^n Z_{\alpha}^2 \right)^{1/\beta}$$

où les  $Z_{\alpha}$  sont des variables aléatoires indépendantes de lois Normales  $N(m_{\alpha}, \sigma)$ .

La loi de  $X$  est alors une loi de Weibull généralisée à cinq paramètres  $W(\beta, \eta, \lambda, p, d)$  dont l'étude figure à l'annexe C.

Remarquons qu'en posant :

$$d = 0$$

$$n = 1$$

$$\beta = 4$$

nous obtenons la variable aléatoire  $X = |Z|^{1/2}$ .

Ainsi la loi de  $X = |Z|^{1/2}$  où  $Z$  est de loi Normalé  $N(m, \sigma)$  est une loi  $W(4 ; (2\sigma^2)^{1/4} ; 1/2 ; m^2/2\sigma^2 ; 0)$ .

En pratique si  $m$  devient grand devant  $\sigma$ , la probabilité pour que  $Z$  admette des réalisations négatives tend vers zéro.

Concrètement :

$$\frac{m}{\sigma} > 2,06 \quad \text{entraîne} \quad \text{Prob}(Z < 0) < 0,01$$

$$\frac{m}{\sigma} > 3 \quad \text{entraîne} \quad \text{Prob}(Z < 0) < 0,001$$

Dans ces conditions (toujours satisfaites en fiabilité mécanique) nous pouvons écrire :

$$X = |Z|^{1/2} \simeq Z^{1/2}$$

Les caractéristiques de cette loi (espérance, variance) sont données par les formules asymptotiques des cumulants de la loi de Weibull généralisée {2} et Annexe {C}. L'espérance et la variance de  $X = Z^{1/2}$  peuvent d'ailleurs être retrouvées à partir du théorème de Koenig et de l'expression exacte de la variance au carré d'une variable aléatoire Normale. On obtient les résultats du tableau I.

#### II.2.4. Loi de $X = Z^2$

Un raisonnement analogue à celui du paragraphe II.2.3. conduit à déterminer la loi suivie par la variable aléatoire  $X = |Z|^2$ . Il s'agit d'une loi de Weibull généralisée  $\mathbf{W} (1 ; 2\sigma^2 ; 1/2 ; m^2/2\sigma^2 ; 0)$ . Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus,  $|Z|^2 \simeq Z^2$ .

On remarque que la loi de  $X$  est, d'après sa définition, un  $\chi^2$  décentré à un degré de liberté, c'est-à-dire une loi Gamma décentrée  $\Gamma (a , p , \lambda)$

$$\text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 1/2\sigma^2 \\ p = 1/2 \\ \lambda = m^2/2\sigma^2 \end{array} \right.$$

L'espérance et la variance de la variable aléatoire  $X$  sont données dans le tableau I.

#### II.2.5. Loi de $X = Z^3$

$Z$  étant de loi normale  $\mathbf{N} (m , \sigma)$  et  $m/\sigma$  étant suffisamment grand comme défini au paragraphe II.2.3, la loi suivie par  $X = |Z|^3 \simeq Z^3$  est la loi  $\mathbf{W} (2/3 ; \sigma^3 \sqrt{8} ; 1/2 ; m^2/2\sigma^2 ; 0)$ .

Les formules asymptotiques des cumulants de cette loi conduisent aux expressions de l'espérance et de la variance consignées dans le tableau I.

### II.3. – Approximation normale

#### II.3.1. – Principe

Dans les méthodes usuelles de dimensionnement, on a recours à l'Algèbre des lois liées à la loi Normale {2} {3} {4} {5} {6} {7}. La loi suivie par la variable aléatoire  $X$  est alors systématiquement approchée par une loi Normale sous réserve que les coefficients de variation des variables aléatoires Normales  $Z$  composantes soient faibles (cf. paragraphe II.5).

La loi Normale  $\mathbf{N} (\bar{X} , s_X)$  est établie grâce à des formules en général approchées qui permettent le calcul de la moyenne  $X$  et de l'écart-type  $s_X$ . Les résultats relatifs aux combinaisons précédemment envisagées apparaissent dans le tableau II. Notons que dans les cas de  $X = Z_1 \cdot Z_2$ , de  $X = Z^{1/2}$  et de  $X = Z^2$ , on retrouve pour la moyenne et l'écart-type de la variable aléatoire  $X$ , les résultats exacts du tableau I, mais la distribution de  $X$  est approchée.

TABLEAU I

X =	L (Z <sub>1</sub> )	L (Z <sub>2</sub> )	L (X)	E (X) : espérance	V (X) : variance
Z <sub>1</sub> · Z <sub>2</sub>	N (m <sub>1</sub> , σ <sub>1</sub> )	N (m <sub>2</sub> , σ <sub>2</sub> )	?	m <sub>1</sub> · m <sub>2</sub>	m <sub>1</sub> <sup>2</sup> σ <sub>2</sub> <sup>2</sup> + m <sub>2</sub> <sup>2</sup> σ <sub>1</sub> <sup>2</sup> + σ <sub>1</sub> <sup>2</sup> σ <sub>2</sub> <sup>2</sup>
Z <sub>1</sub> /Z <sub>2</sub>	N (m <sub>1</sub> , σ <sub>1</sub> )	N (m <sub>2</sub> , σ <sub>2</sub> )	?	?	?
Z <sup>1/2</sup>	N (m, σ)		W (4 ; (2σ <sup>2</sup> ) <sup>1/4</sup> ; 1/2 ; m <sup>2</sup> /2σ <sup>2</sup> ; 0)*	m <sup>1/2</sup> / 4 √(1 - $\frac{y^2}{2}$ ) <sup>**</sup>	m (1 - √(1 - $\frac{v^2}{2}$ )) <sup>**</sup>
Z <sup>2</sup>	N (m, σ)		{ W (1 ; 2σ <sup>2</sup> ; 1/2 ; m <sup>2</sup> /2σ <sup>2</sup> ; 0)* Γ (1/2σ <sup>2</sup> ; 1/2 ; m <sup>2</sup> /2σ <sup>2</sup> )	m <sup>2</sup> + σ <sup>2</sup>	2σ <sup>2</sup> (2m <sup>2</sup> + σ <sup>2</sup> )
Z <sup>3</sup>	N (m, σ)		W (2/3 ; σ <sup>3</sup> √8 ; 1/2 ; m <sup>2</sup> /2σ <sup>2</sup> ; 0)*	m <sup>3</sup> (1 + 3 v <sup>2</sup> ) <sup>**</sup>	9m <sup>4</sup> σ <sup>2</sup> (1 + 4 v <sup>2</sup> ) <sup>**</sup>

\* voir restrictions aux paragraphes II.2.3, II.2.4 ou II.2.5

\*\* v = σ/m coefficient de variation

II.3.2. Résultats

TABLEAU II  
Approximation normale

X =	L (Z <sub>1</sub> )	L (Z <sub>2</sub> )	L (X) = N (X̄ ; s <sub>X</sub> )
Z <sub>1</sub> · Z <sub>2</sub>	N (m <sub>1</sub> , σ <sub>1</sub> )	N (m <sub>2</sub> , σ <sub>2</sub> )	$L(X) \approx N \left( m_1 m_2 ; \sqrt{m_1^2 \sigma_2^2 + m_2^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2} \right)$
Z <sub>1</sub> /Z <sub>2</sub>	N (m <sub>1</sub> , σ <sub>1</sub> )	N (m <sub>2</sub> , σ <sub>2</sub> )	$L(X) \approx N \left( \frac{m_1}{m_2} ; \frac{1}{m_2} \left[ \frac{m_1^2 \sigma_2^2 + m_2^2 \sigma_1^2}{m_2^2 + \sigma_2^2} \right]^{1/2} \right)$
Z <sup>1/2</sup>	N (m , σ)		$L(X) \approx N \left( m^{1/2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{2}} ; m^{1/2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{2}} \right]^{1/2} \right)$
Z <sup>2</sup>	N (m ; σ)		$L(X) \approx N (m^2 + \sigma^2 ; \sqrt{2\sigma^2 (\sigma^2 + 2m^2)})$
Z <sup>3</sup>	N (m , σ)		$L(X) \approx N (m^3 ; 3 m^2 \sigma)$



TABLEAU III  
Approximation Gamma

X =	L (Z <sub>1</sub> )	L (Z <sub>2</sub> )	L (X)	E (X) : espérance	V (X) : variance
$\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z}$	N (m <sub>1</sub> , σ <sub>1</sub> )	N (m <sub>2</sub> , σ <sub>2</sub> )	?	m <sub>1</sub> · m <sub>2</sub>	m <sub>1</sub> <sup>2</sup> σ <sub>2</sub> <sup>2</sup> + m <sub>2</sub> <sup>2</sup> σ <sub>1</sub> <sup>2</sup> + σ <sub>1</sub> <sup>2</sup> σ <sub>2</sub> <sup>2</sup>
Z <sub>1</sub> /Z <sub>2</sub>	N (m <sub>1</sub> , σ <sub>1</sub> )	N (m <sub>2</sub> , σ <sub>2</sub> )	?	$\frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{1}{1 - v_{Z_2}^2}$	$\left(\frac{m_1}{m_2}\right) \cdot \frac{v_{Z_1}^2 + v_{Z_2}^2 - v_{Z_1}^2 v_{Z_2}^{2**}}{(1 - v_{Z_2}^2)^2 (1 - 2v_{Z_2}^2)}$
Z <sup>1/2</sup>	N (m, σ)		W (4 ; (2σ <sup>2</sup> ) <sup>1/4</sup> ; 1/2 ; m <sup>2</sup> /2σ <sup>2</sup> ; 0)*	$m^{1/2} \sqrt[4]{\frac{v^2}{1 - v^2}}$	$m \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{2}}\right)$
Z <sup>2</sup>	N (m, σ)		$\left\{ \begin{array}{l} W (1 ; 2\sigma^2 ; 1/2 ; m^2/2\sigma^2 ; 0)* \\ \Gamma (1/2\sigma^2 ; 1/2 ; m^2/2\sigma^2) \end{array} \right.$	m <sup>2</sup> + σ <sup>2</sup>	2σ <sup>2</sup> (2m <sup>2</sup> + σ <sup>2</sup> )
Z <sup>3</sup>	N (m, σ)		W (2/3 ; σ <sup>3</sup> √8 ; 1/2 ; m <sup>2</sup> /2σ <sup>2</sup> ; 0)*	m <sup>3</sup> (1 + 3v <sup>2</sup> )**	9m <sup>4</sup> σ <sup>2</sup> (1 + 4v <sup>2</sup> )**

\* voir restrictions aux paragraphes II.2.3, II.2.4 ou II.2.5

\*\* v = σ/m coefficient de variation

## II.4. – Approximation Gamma

### II.4.1. – Principe

Le principe consiste à approcher les lois de combinaisons de variables aléatoires normales par des lois Gamma admettant mêmes espérances et mêmes variances.

Les résultats du tableau I permettent alors de déterminer les paramètres  $a, p$  des lois  $\Gamma(a, p)$ .

En effet :

$$\left. \begin{array}{l} E(X) = \frac{p}{a} \\ V(X) = \frac{p}{a^2} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{E(X)}{V(X)} \\ p = a \cdot E(X) \end{array} \right.$$

Seul le cas de  $X = Z_1/Z_2$  pour lequel nous n'avons donné aucun résultat exact ne peut être déterminé à partir des résultats du tableau I. Cependant il est possible de déterminer les paramètres d'une loi Gamma en assimilant les lois normales des variables aléatoires  $Z_1$  et  $Z_2$  à des lois Gamma dont on connaît la tendance asymptotique vers la loi Normale {2}. Le quotient de deux lois Gamma quelconques est une loi Béta de second espèce (cf annexe) dont nous connaissons la moyenne et la variance et c'est cette loi que nous assimilons à une loi Gamma de même moyenne et même variance.

Tous calculs faits, les résultats apparaissent dans le tableau III.

## II.5. – Domaine de validité des approximations

### II.5.1. – Principe de l'étude {2}

Connaissant les lois suivies par les variables aléatoires  $Z$  nous pouvons obtenir expérimentalement la loi des combinaisons grâce à la méthode de simulation de Monte-Carlo dont la procédure est décrite dans l'annexe D. Il est alors possible de comparer la fonction de répartition expérimentale (simulée) à une fonction de répartition théorique Normale ou Gamma, en construisant une bande de confiance de largeur donnée dans les tables du test de LILLIEFORS pour l'hypothèse de normalité et de KOLMOGOROV-SMIRNOV pour l'hypothèse de loi Gamma.

On détermine ainsi avec un risque d'erreur choisi, les limites de validité des approximations étudiées.

Dans notre étude le risque d'erreur  $\alpha$  est égal à 10 % (valeur laissant espérer un test efficace avec un risque  $\beta$  associé pas trop important).

Les tableaux IV, V, VI donnent les valeurs des coefficients de variation à ne pas dépasser pour respecter l'hypothèse de Normalité ou de loi Gamma.

La mise en œuvre des tests est faite comme indiqué figure 1 par construction de la bande de confiance et de la fonction de répartition conjecturée.

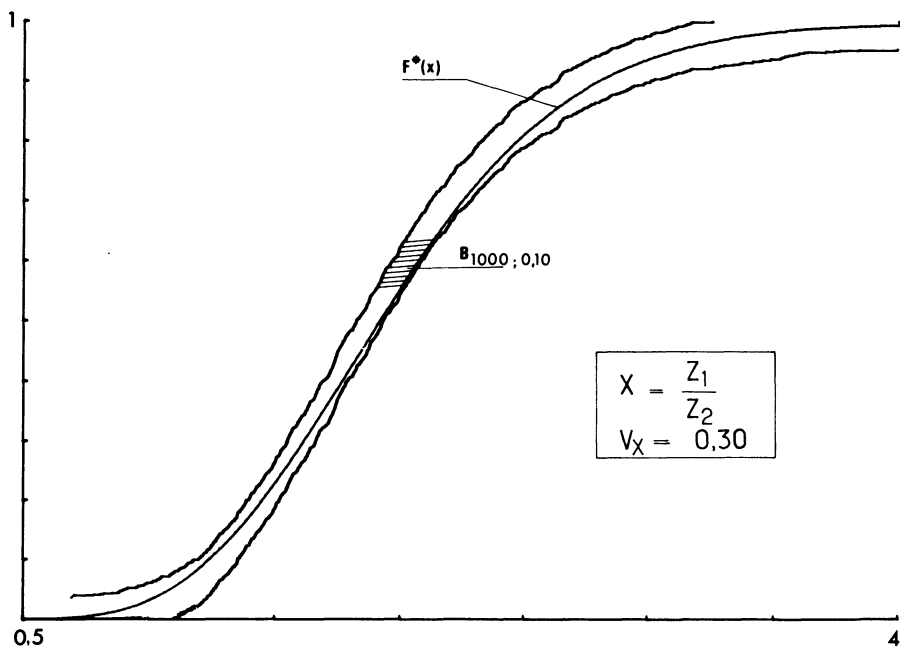


Figure 1 – Test de Kolmogorov-Smirnov.  $F^*(x) \rightarrow$  loi  $B^2(h, p, q)$

$B_{1000; 0,10} \rightarrow X$  simulé

### II.5.2. Résultats

1) Produit  $X = Z_1 \cdot Z_2$

Avec  $L(Z_1) = N(m_1, \sigma_1)$  et  $v_{Z_1} = \frac{\sigma_1}{m_1}$

$L(Z_2) = N(m_2, \sigma_2)$  et  $v_{Z_2} = \frac{\sigma_2}{m_2}$

TABLEAU IV

APPROXIMATION GAMMA		APPROXIMATION NORMALE	
Valeur de $v_{Z_1}$ ou $v_{Z_2}$	Valeur limite associée de $v_{Z_1}$ ou $v_{Z_2}$	Valeur de $v_{Z_1}$ ou $v_{Z_2}$	Valeur limite associée de $v_{Z_1}$ ou $v_{Z_2}$
0,25	0,16	0,10	0,11
0,20	0,21	0,12	0,09
0,15	0,25	0,13	0,07
0,10	0,28	0,14	0,05
0,05	0,29		

De plus nous devons respecter :

$v_{Z_1}$  ou  $v_{Z_2} < 0,30$  dans l'approximation Gamma

$v_{Z_1}$  ou  $v_{Z_2} < 0,15$  dans l'approximation Normale

2) *Quotient*  $X = Z_1/Z_2$

Avec  $L(Z_1) = N(m_1, \sigma_1)$  et  $v_{Z_1} = \frac{\sigma_1}{m_1}$

$L(Z_2) = N(m_2, \sigma_2)$  et  $v_{Z_2} = \frac{\sigma_2}{m_2}$

TABLEAU V

APPROXIMATION GAMMA		APPROXIMATION NORMALE	
Valeur de $v_{Z_1}$ ou $v_{Z_2}$	Valeur limite associée de $v_{Z_1}$ ou $v_{Z_2}$	Valeur de $v_{Z_1}$ ou $v_{Z_2}$	Valeur limite associée de $v_{Z_1}$ ou $v_{Z_2}$
0,29	0,05	0,14	0,05
0,28	0,10	0,11	0,10
0,25	0,15	0,08	0,12
0,21	0,20	0,07	0,13
0,13	0,25	0,04	0,14

De plus :

$v_{Z_1} < 0,30$  }  
 $v_{Z_2} < 0,27$  } approximation Gamma

$v_{Z_1} < 0,15$  }  
 $v_{Z_2} < 0,14$  } approximation Normale

3) *Autres combinaisons*

Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

TABLEAU VI

X	L (Z)	$v_z$	CONDITIONS	
			Approximation Gamma	Approximation normale
$X = Z^{1/2}$	$N (m , \sigma)$	$\frac{\sigma}{m}$	$v_z < 0,20$	$v_z < 0,27$
$X = Z^2$	$N (m , \sigma)$	$\frac{\sigma}{m}$	$v_z < 0,40$	$v_z < 0,075$
$X = Z^3$	$N (m , \sigma)$	$\frac{\sigma}{m}$	$v_z < 0,50$	$v_z < 0,050$

### II.5.3. – Conclusions

De la lecture des différents tableaux, il ressort que l'approximation Gamma couvre un plus grand domaine de validité que l'approximation normale, hormis le cas de  $X = Z^{1/2}$ . Ceci s'explique par le fait que pour  $q < 1$ , les distributions de  $X = Z^q$  sont étalées à gauche.

Ces résultats, d'intérêt pratique évident, contiennent la règle énoncée par KECECIOGLU {3} {14} : "Les formules approchées de l'Algèbre des lois liées à la loi normale ne sont applicables que si les coefficients de variation n'atteignent pas simultanément la valeur 0,10".

## III – METHODES DE CONCEPTION PAR LA FIABILITE

### III 1. – Introduction :

Dans les calculs de fiabilité, deux cas peuvent se présenter :

- l'élément de machine est construit et nous voulons déterminer sa fiabilité.
- l'élément de machine est à construire et nous voulons déterminer ses dimensions afin d'obtenir une fiabilité donnée.

Le premier cas, traité par la théorie de la résistance et de la contrainte {2} {3} {4} {5} {6} {7}, ne sera pas abordé ici.

Le deuxième cas fait appel aux méthodes de conception par la fiabilité. Celles-ci permettent, à partir de la connaissance du matériau utilisé, des charges appliquées et des tolérances de fabrication, de dimensionner les pièces en vue de réaliser un objectif de fiabilité donné. Après avoir rappelé une méthode usuelle fondée sur l'hypothèse de normalité de la résistance et de la contrainte, nous proposons une méthode reposant sur une hypothèse de lois Gamma.

Les domaines d'application des deux méthodes sont donnés et confirmés dans le cas d'une lame en flexion alternée : les résultats trouvés sont vérifiés par la méthode de simulation de MONTE-CARLO.

### III.2. – Présentation des calculs :

#### III.2.1. – Formule de la contrainte

Dans tous les cas de sollicitations statiques et dans certains cas de sollicitations simples de fatigue, la contrainte, en théorie des poutres, peut être mise sous la forme générale : {2}

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1)$$

P caractérise les efforts (force, moment, moment idéal . . .)

A caractérise la géométrie de la section droite (surface, module de résistance en flexion . . .)

$\sigma$  caractérise la contrainte (contrainte normale, tangentielle, équivalente . . .)

#### III.2.2. – Considérations sur les tolérances de fabrication

Suivant la nature des éléments de machine à concevoir, il est possible d'avoir une idée de la précision à la fois souhaitable et réalisable. Ceci conduit à fixer une valeur pour le coefficient de variation d'une dimension donnée.

Considérons en effet la base  $b$  d'une lame de flexion parallélépipédique. Supposons qu'il soit possible de réaliser

$$b = \bar{b} \pm k \cdot \bar{b} \quad (2)$$

où  $\bar{b}$  est la valeur moyenne de la base  $b$  et  $k$  un nombre certain.

Les résultats du contrôle de qualité {8} montrent que la base  $b$  peut être considérée comme une variable aléatoire normale. Sous cette hypothèse, 99,75 % des valeurs de  $b$  sont comprises entre  $\bar{b} - 3s_b$  et  $\bar{b} + 3s_b$  ( $s_b$  est l'écart-type de la variable aléatoire  $b$ ).

D'où, depuis (1) :

$$b = \bar{b} \pm k\bar{b} = \bar{b} \pm 3s_b \quad (3)$$

Le coefficient de variation  $v_b$  de la variable aléatoire  $b$  est défini par :

$$v_b = \frac{s_b}{\bar{b}} \quad (4)$$

et sa valeur est donnée d'après (3) par :

$$v_b = \frac{k}{3} \quad (5)$$

Quel que soit le problème envisagé, on montre qu'il est possible de déterminer  $v_A$ , coefficient de variation de la variable aléatoire  $A$  définie au paragraphe II.2.1., à partir des coefficients de variation des côtés de la section droite obtenus par exemple comme exposé ci-dessus pour  $b$ .

### III.3. – Méthode de calcul reposant sur l'hypothèse de normalité de la contrainte

#### 1) Données :

- \*  $(\bar{\Sigma}, s)$  résistance (a)
- \*  $(\bar{P}, s_p)$  chargement (b)
- \*  $v_A$  coefficient de variation de la variable aléatoire A (c)
- \* R objectif de fiabilité à réaliser

a) Nous convenons d'appeler  $\Sigma$  la résistance du matériau. En statique,  $\Sigma$  représente soit la limite d'élasticité, soit la résistance à la rupture, soit la contrainte vraie de rupture. Dans le cas de sollicitations de fatigue,  $\Sigma$  correspond à la limite de fatigue. La résistance est considérée comme une variable aléatoire dont on donne la valeur moyenne  $\bar{\Sigma}$  et l'écart-type  $s_\Sigma$ .

b) P est la variable aléatoire introduite au paragraphe précédent dont la moyenne  $\bar{P}$  et l'écart-type  $s_p$  sont déterminés.

c)  $v_A$  est le coefficient de variation de la variable aléatoire A de moyenne  $\bar{A}$  et d'écart-type  $s_A$ .

#### 2) Hypothèses sur les distributions :

La résistance  $\Sigma$  et la contrainte  $\sigma$  sont considérées comme des variables aléatoires de lois normales.

$$\mathbf{N}(\bar{\Sigma}, s_\Sigma) \quad \text{et} \quad \mathbf{N}(\bar{\sigma}, s_\sigma)$$

Les dimensions des pièces et les forces appliquées sont également des variables aléatoires normales.

L'approximation normale des combinaisons de variables aléatoires normales est systématiquement utilisée. Il en résulte que les variables aléatoires P et A, définies au paragraphe III.2.1, sont considérées comme des variables aléatoires de lois respectives  $\mathbf{N}(\bar{P}, s_p)$  et  $\mathbf{N}(\bar{A}, s_A)$  dans la mesure où les coefficients de variations de ces variables demeurent faibles.

#### 3) Détermination de $\bar{A}$ et $s_A$ :

La fiabilité R ou probabilité de survie à un instant donné dans les conditions de fonctionnement données, est ici la probabilité qu'à la résistance  $\Sigma$  d'être supérieure à la contrainte  $\sigma$  soit :

$$R = \Pr(\Sigma > \sigma) \quad (6)$$

Dans le cas où les distributions de contrainte et de résistance sont toutes les deux normales, on montre que la fiabilité est donnée par :

$$R = \int_{z_0}^{\infty} f(z) dz \quad (7)$$

avec

$$z_0 = - \frac{\bar{\Sigma} - \bar{\sigma}}{\sqrt{s_{\Sigma}^2 + s_{\sigma}^2}} \quad (8)$$

et  $f(z)$  densité de probabilité de la loi normale centrée réduite.

Dans les calculs de conception par la fiabilité, l'objectif de fiabilité  $R$  est choisi à l'avance ; il lui correspond une valeur  $z_0$  obtenue par lecture dans les tables de la fonction de répartition de  $\mathbf{N}(0, 1)$ .

Rappelons d'autre part que la contrainte  $\sigma$  est de la forme :

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1)$$

L'utilisation de l'algèbre des lois liées à la loi normale conduit à l'obtention de la moyenne  $\bar{\sigma}$  et de l'écart-type  $s_{\sigma}$  de cette variable. Après calculs et arrangement on obtient la valeur moyenne  $\bar{A}$  :

$$\bar{A} = \frac{\bar{P}}{\bar{\Sigma} \left[ \frac{1 - z_0^2 v_{\Sigma}^2}{1 + \sqrt{1 - [1 - z_0^2 v_{\Sigma}^2] \left[ 1 - z_0^2 \cdot \frac{v_A^2 + v_P^2}{1 + v_A^2} \right]}} \right]} \quad (9)$$

L'écart-type de  $s_A$  est obtenu à partir de la connaissance de  $v_A$  et de  $\bar{A}$  :

$$s_A = v_A \cdot \bar{A} \quad (10)$$

La passage aux dimensions de la section droite se fait alors comme indiqué dans l'exemple d'application.

#### III.4. — Méthode de dimensionnement proposée : utilisation des lois Gamma et Béta de seconde espèce {2}

##### 1) Données :

Les données sont identiques à celles de la méthode précédente, c'est à dire :

- \*  $(\bar{\Sigma}, s_{\Sigma})$  résistance
- \*  $(\bar{P}, s_P)$  chargement
- \*  $v_A$  coefficient de variation de la variable aléatoire  $A$
- \*  $R$  objectif de fiabilité à réaliser

##### 2) Hypothèses et transformation des données :

L'hypothèse de normalité de la résistance et de la contrainte est remplacée par une hypothèse de loi Gamma. Cette démarche repose sur la constatation qu'un grand nombre de lois représentant les distributions réelles de contrainte et de résistance peuvent être approchées avec plus de précision par des lois Gamma que par des lois normales {2} {9} {10}.



L'hypothèse de normalité sera par contre conservée pour des dimensions : cette hypothèse est couramment admise en contrôle qualité.

Si une variable aléatoire X suit une loi Gamma  $\Gamma(a^*, p^*)$ , la moyenne  $E(X)$  et la variance  $V(X)$  ont pour expressions :

$$\begin{cases} E(X) = \frac{p^*}{a^*} \\ V(X) = \frac{p^*}{a^{*2}} \end{cases} \quad (11)$$

Ainsi est-il possible de déterminer les paramètres des lois Gamma à partir des données du paragraphe III.4.1.

\* La résistance  $\Sigma$  est de loi  $\Gamma(a, p)$

A partir des données  $(\bar{\Sigma}, s_{\Sigma})$  nous formons :

$$a = \frac{\bar{\Sigma}}{s_{\Sigma}^2} = \frac{1}{v_{\Sigma}^2 \cdot \Sigma} \quad (12)$$

$$p = \frac{\bar{\Sigma}^2}{s_{\Sigma}^2} = \frac{1}{v_{\Sigma}^2} \quad (13)$$

\* La variable aléatoire P est de loi  $\Gamma(a', p')$

A partir de  $(\bar{P}, s_P)$  nous avons :

$$a' = \frac{\bar{P}}{s_P^2} = \frac{1}{v_P^2 \cdot \bar{P}} \quad (14)$$

$$p' = \frac{\bar{P}^2}{s_P^2} = \frac{1}{v_P^2} \quad (15)$$

\* La variable aléatoire A est de loi  $\Gamma(b', q')$

Les paramètres de la loi sont :

$$b' = \frac{\bar{A}}{s_A^2} = \frac{1}{v_A^2 \cdot \bar{A}} \quad (16)$$

$$q' = \frac{\bar{A}^2}{s_A^2} = \frac{1}{v_A^2} \quad (17)$$

La seule donnée concernant A est son coefficient de variation  $v_A$ , ce qui permet la détermination immédiate de  $q'$ . La recherche de  $b'$  est équivalente à la recherche de  $\bar{A}$  puisque d'après (16) et (17) nous avons :

$$\bar{A} = \frac{q'}{b'} \quad (18)$$

### 3) Prise en compte d'un objectif de fiabilité

D'après les hypothèses faites au paragraphe précédent, la variable aléatoire  $\sigma$  est le quotient d'une variable aléatoire P de loi  $\Gamma(a', p')$  par une variable aléatoire A de loi  $\Gamma(b', q')$ .  $\sigma$  suit alors une loi bêta de seconde espèce à trois paramètres  $B^2\left(\frac{b'}{a'}, p', q'\right)$ . {2} {10} {12}.

La moyenne  $\bar{\sigma}$  et l'écart-type  $s_\sigma$  de la variable aléatoire  $\sigma$  ont alors pour expressions respectives :

$$\bar{\sigma} = \frac{b'}{a'} \cdot \frac{p'}{q' - 1} \quad (19)$$

$$s_\sigma = \frac{b'}{a'} \sqrt{\frac{p'(p' + q' - 1)}{(q' - 1)^2 (q' - 2)}} \quad (20)$$

$\sigma$  intervenant dans le coefficient de sécurité C par :

$$C = \frac{\Sigma}{\sigma} \quad (21)$$

Il en résulte que ce dernier est une variable aléatoire à partir de laquelle la fiabilité peut-être déterminée. En effet, la relation (6) se transforme en

$$R = \Pr\left(\frac{\Sigma}{\sigma} > 1\right)$$

soit encore avec (21)

$$R = \Pr(C > 1) \quad (22)$$

dont la valeur est obtenue par :

$$R = \int_1^\infty f(c) dc \quad (23)$$

où  $f(c)$  est la densité de probabilité de la variable aléatoire C.

Si la loi suivie par cette dernière est connue, le calcul de R est possible.

La résistance  $\Sigma$  suivant d'après les hypothèses du paragraphe précédent une loi Gamma  $\Gamma(a, p)$ , il est intéressant de considérer que la contrainte  $\sigma$  suit une loi Gamma  $\Gamma(b, q)$ . Dans ces conditions en effet, la variable aléatoire C quotient de deux variables aléatoires Gamma suit une loi Bêta de seconde espèce à trois paramètres.

$$B^2\left(\frac{b}{a}, p, q\right)$$

Ainsi la contrainte  $\sigma$ , de loi  $B^2\left(\frac{b'}{a'}, q', q'\right)$  dans (1) est de loi  $\Gamma(b, q)$  dans (21).

Afin d'établir l'identité des deux distributions, nous écrivons l'égalité des deux premiers moments de chacune d'elles.

A partir de (19), (20) et des expressions :

– de la moyenne de  $\sigma$  de loi  $\Gamma(b, q)$

$$\bar{\sigma} = \frac{q}{b} \quad (24)$$

– de l'écart-type de  $\sigma$  de loi  $\Gamma(b, q)$

$$s_{\sigma} = \frac{\sqrt{q}}{b} \quad (25)$$

il vient les égalités :

$$\frac{b'}{a'} \cdot \frac{p'}{q' - 1} = \frac{q}{b}$$

$$\frac{b'}{a'} \sqrt{\frac{p'(p' + q' - 1)}{(q' - 1)(q' - 2)}} = \frac{\sqrt{q}}{b}$$

D'où nous tirons :

$$q = \frac{p'(q' - 2)}{p' + q' - 1} \quad (26)$$

et

$$b = \frac{a'(q' - 1)(q' - 2)}{b'(p' + q' - 1)} \quad (27)$$

Le paramètre  $q$  est calculable à partir des données puisqu'en remplaçant dans (26)  $p'$  et  $q'$  par leurs expressions respectives (15) et (17), il vient :

$$q = \frac{1 - 2v_A^2}{v_A^2 + v_P^2 - v_A^2 v_P^2} \quad (28)$$

Le paramètre  $b$  demeure inconnu car la valeur de  $b'$  n'est pas déterminée.

La prise en compte de l'objectif de fiabilité permet de résoudre ce problème.

En effet, le calcul de la fiabilité  $R$  s'effectue comme montré précédemment par la relation (23) où  $f(c)$  est la densité de probabilité du coefficient de sécurité  $C$  de loi  $B^2\left(\frac{b}{a}, p, q\right)$ . La fiabilité  $R$  est donc une fonction de  $\frac{b}{a}$ ,  $p$  et  $q$ .

Dans notre cas, R est une donnée, p est calculé par la formule (13) et q par la formule (28). Nous cherchons alors la valeur  $h_0 = \frac{b}{a}$  correspondante.

Rappelons que la fiabilité R est obtenue à partir de la fonction de répartition F(c) de la loi  $B^2(h, p, q)$  puisque :

$$R = 1 - \int_0^1 f(c) dc \quad (29)$$

ce qui s'écrit encore :

$$R = 1 - F_C(1)$$

Soit finalement, compte tenu de  $F_C$  :

$$R = 1 - \frac{1}{\beta^2(p, q)} \beta_{1/h}^2(p, q) \quad (30)$$

expression dans laquelle interviennent respectivement les fonctions Bêta 2 et Bêta 2 incomplète.

La résolution de l'équation intégrale (30) est effectuée par une technique d'intégration numérique à pas variable. Elle permet, sachant R, d'obtenir la valeur  $h_0$  de l'inconnu h.

La prise en compte de l'objectif de fiabilité peut ainsi se résumer :

$$\left. \begin{array}{l} R \\ p \\ q \end{array} \right\} \longrightarrow h_0 = \frac{b}{a} = \mathcal{F}(R, v_\Sigma^2, v^2, v_A^2)$$

#### 4) Détermination de $\bar{A}$ et $s_A$ :

La connaissance de  $h_0$  permet celle du paramètre  $b'$ . La relation (27) s'écrit en effet :

$$b' = \frac{a'(q' - 1)(q' - 2)}{h_0 a(p' + q' - 1)} \quad (31)$$

D'où la valeur moyenne  $\bar{A}$  définie par :

$$\bar{A} = \frac{q'}{b'} \quad (18)$$

soit avec (31) :

$$\bar{A} = \frac{h_0 \cdot a \cdot q' (p' + q' - 1)}{a' (q' - 1) (q' - 2)} \quad (32)$$

Les paramètres  $a$ ,  $a'$ ,  $p'$  et  $q'$  peuvent être remplacés par leurs valeurs respectives données par les formules (12) (14) (15) et (17) ; après arrangement (32) prend la forme :

$$\bar{A} = \frac{\bar{P}}{\Sigma \left[ \frac{v_{\Sigma}^2 [1 - v_A^2] [1 - 2v_A^2]}{h_0 [v_A^2 + v_P^2 - v_P^2 \cdot v_A^2]} \right]} \quad (33)$$

Cette relation est à comparer à la relation donnée pour la méthode reposant sur la normalité des distributions de contrainte et de résistance.

L'écart-type de la variable aléatoire  $A$  est obtenu par :

$$s_A = v_A \cdot \bar{A}$$

### III.5. — Critères de choix entre les deux méthodes

Les limites d'application de chacune des deux méthodes ont été étudiées grâce à des tests de Kolmogorov-Smirnov {2}.

Avec un risque d'erreur  $\alpha = 10 \%$ , il apparaît que :

– la méthode traditionnelle (hypothèses de normalité) n'est applicable que si

$$\sqrt{\frac{v_P^2 + v_A^2}{1 + v_A^2}} < 0,15 \quad (34)$$

– la méthode proposée (hypothèse de lois Gamma) n'est applicable que si :

$$\sqrt{\frac{v_P^2 + v_A^2 - v_P^2 \cdot v_A^2}{1 - 2v_A^2}} < 0,30 \quad (35)$$

Avant d'entreprendre tout calcul, il conviendra de vérifier la condition (34). Si celle-ci est satisfaite, la méthode traditionnelle, plus simple de mise en œuvre sera utilisée. Sinon et si la condition (35) est remplie, on emploiera la méthode proposée, certes plus complexe mais au domaine d'applications plus vaste.

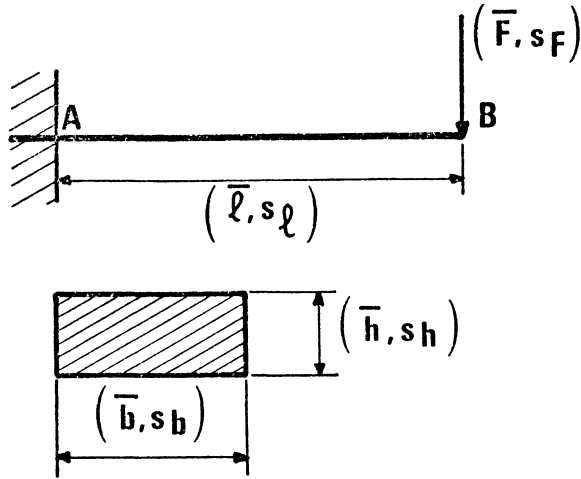
## IV. — EXEMPLE D'UTILISATION DES METHODES DE PREDIMENSIONNEMENT

### IV.1. — Position du problème

Nous considérons une lame de flexion dont les caractéristiques apparaissent sur la figure de la page suivante.

Toutes les dimensions de cette poutre de section rectangulaire sont considérées comme des variables aléatoires distribuées normalement.

La force  $F$  (verticale et agissant à l'extrémité de la poutre encadrée) est sinusoïdale avec une amplitude constante et suit une loi normale  $N(\bar{F}, s_F)$ .



La lame est en acier AISI 4340 (nuance voisine de 35 NCD 16) dont la courbe de Wohler probabilisée est donnée par Haugen [15]. Elle est reproduite figure 2.

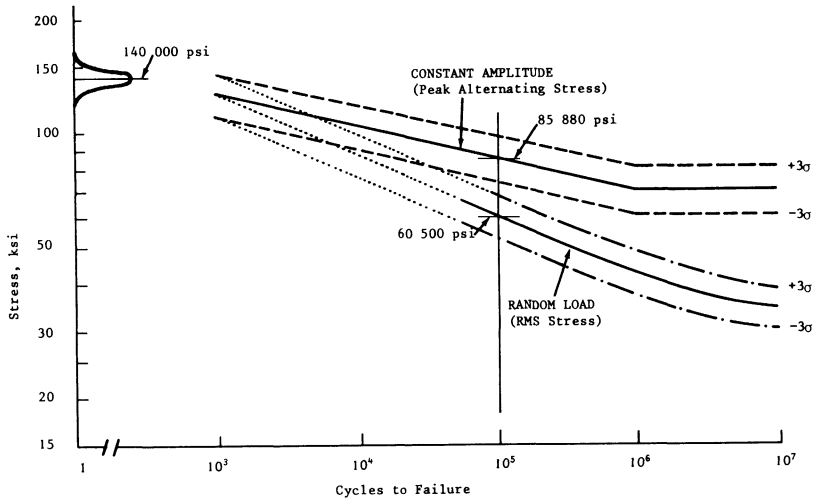


Figure 2. – Statistical S–N surface for SAE 4340 Steel alloy.

Elle est soumise à une contrainte alternée de flexion dont la valeur maximale est

$$\sigma_a = \frac{F \cdot l}{\left(\frac{bh^2}{6}\right)} \quad (36)$$

de forme semblable à (1) en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} P = F \cdot \ell \\ A = \frac{bh^2}{6} \end{array} \right. \quad (37)$$

## IV.2. — Dimensionnement de la poutre

### IV.2.1. — Données :

Les données nécessaires à la mise en œuvre des 2 méthodes ont été précisées au paragraphe III.

#### a) Données directes

La résistance  $\Sigma$  est déterminée grâce à la courbe de Wohler (figure 2). De nombreux essais effectués aux Etats-Unis, notamment à l'Université de Tucson, et en France par Bastenaire [16], ont montré que dans l'essai de fatigue, la distribution de la contrainte amenant la rupture, est normale quel que soit le nombre de cycles. Fixant un objectif de fiabilité et une durée de 100 000 cycles, on déduit l'intervalle de confiance à 0,9975 ce qui conduit, exprimés en  $N/mm^2$ , à  $N(\bar{\Sigma}, s_{\Sigma}) = N(592,6 ; 28,4)$ .

Les autres données directes sont la force  $F$  de loi normale  $N(\bar{F}, s_F)$ , la longueur de la poutre  $\ell$  de loi normale  $N(\bar{\ell}, s_{\ell})$ , la hauteur  $h$  de la section droite de loi  $N(\bar{h}, s_h)$  et le coefficient de variation  $v_b$  de la cote  $b$ . Cette dernière quantité est choisie en considérant les tolérances de fabrication habituelles (cf. III-2.2). Le tableau VII rassemble les données directes relatives à six situations différentes par les dispersions envisagées.

#### b) Données transformées

b-1 concernant  $P$  :

Les résultats de II.2.1. conduisent, depuis  $P = F \cdot \ell$  à :

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \bar{F} \cdot \bar{\ell} \\ s_P &= \sqrt{\bar{F}^2 s_{\ell}^2 + \bar{\ell}^2 s_F^2 + s_F^2 s_{\ell}^2} \end{aligned} \quad (38)$$

b-2 concernant  $v_A$

Sous réserve que le coefficient de variation de  $h$  soit inférieur à 0,075 il est admis que la variable aléatoire  $h^2$  ( $h$  suivant une loi normale) est assimilée à une variable normale. Dans ces conditions,  $A$  apparait comme le rapport de deux variables normales indépendantes. Cela conduit pour ce qui est de  $v_A$ , à la forme :

$$v_A = \frac{\sqrt{v_b^2 (1 + 6v_h^2 + 3v_h^4) + 2v_h^2 (2 + v_h^2)}}{1 + v_h^2} \quad (39)$$

de laquelle sont issus les résultats consignés dans le tableau VIII.

### IV.2.2. — Calcul de $\bar{A}$ et $s_A$ et des côtes de la section droite

En ce qui concerne  $\bar{A}$  et  $s_A$ , leurs valeurs sont obtenues depuis (9) et (10) pour la méthode reposant sur l'hypothèse de normalité, depuis (33) et (10) pour la méthode proposée.

Les résultats sont résumés au tableau IX.

Sachant que  $A = \frac{bh^2}{6}$ , le problème consiste ensuite à déterminer  $\bar{b}$  et  $s_b$ , connaissant  $\bar{h}$ ,  $s_h$ ,  $v_b$  (données directes) et  $\bar{A}$  et  $s_A$ . Sous l'hypothèse de normalité faite en b - 2, il vient depuis II.3.2 :

$$\bar{A} = \frac{\bar{b}(\bar{h}^2 + s_h^2)}{6} \quad (40)$$

d'où 
$$\bar{b} = \frac{6\bar{A}}{h^2 + s_h^2} \quad (41)$$

et connaissant  $v_b$  :

$$s_b = v_b \bar{b} \quad (42)$$

Les résultats obtenus par cette procédure sont consignés au tableau X. Compte tenu des tolérances usuelles, la lame sera réalisée à la cote  $b = \bar{b} \pm 3s_b$ .

On constate que la méthode proposée conduit à des dimensions plus grandes que la méthode classique. Il convient donc de savoir s'il s'agit d'un sur-dimensionnement ou d'une sécurité nécessaire.

#### IV.2.3. - Analyse des résultats

Afin de comparer la validité des 2 méthodes, on vérifie si la fiabilité prévue est réellement atteinte dans l'un et l'autre cas.

Pour ce faire, on calcule depuis les dimensions obtenues pour chaque situation, la fiabilité correspondante et on la compare à celle initialement souhaitée. A cette fin on utilise la méthode de simulation de Monte Carlo (voir annexe D).

Comme  $R = \text{Prob} \left( \frac{\Sigma}{\sigma} > 1 \right) = \text{Prob} (C > 1)$  avec ici

$$C = \frac{\Sigma \cdot b \cdot h^2}{6 \cdot F \cdot \ell}, \quad (43)$$

on simule  $N_T$  réalisations de la variable C, depuis ses variables composantes dont on connaît les caractéristiques et dont les lois sont supposées normales, par hypothèse en ce qui concerne h, F,  $\ell$ , b ; par le fait en ce qui concerne  $\Sigma$ , que dans  $\Gamma(a, p)$ , p est très grand ( $p = 435,4$ ).

N réalisations étant inférieures à 1, il en résulte que la fiabilité simulée  $R_S$  s'exprime par :

$$R_S = \frac{N}{N_T} \quad (44)$$



TABLEAU VII  
Données directes

Cas	$\bar{\Sigma}$ N/mm <sup>2</sup>	$S_{\Sigma}$ N/mm <sup>2</sup>	$\bar{F}$ N	$S_F$ N	$\bar{l}$ mm	$S_l$ mm	$\bar{h}$ mm	$S_h$ mm	$v_h$	$v_b$	R
1	592,6	28,4	8 000	400	190,5	0,475	20	0,167	0,00835	0,0075	0,9938
2	592,6	28,4	8 000	400	190,5	0,475	20	0,030	0,0015	0,0015	0,9938
3	592,6	28,4	8 000	800	190,5	0,475	20	0,167	0,00835	0,0075	0,9987
4	592,6	28,4	8 000	800	190,5	0,6	20	0,167	0,00835	0,010	0,9987
5	592,6	28,4	8 000	800	190,5	0,475	20	0,030	0,0015	0,0015	0,9987
6	592,6	28,4	8 000	800	190,5	0,475	20	0,030	0,0015	0,0015	0,9938

TABLEAU VIII  
Données directes

Cas	$\bar{P}$ mm.N	$s_p$ mm.N	$V_A$
1	1 524 000	76 294,9	0,0183
2	1 524 000	76 294,9	0,0034
3	1 524 000	152 447,8	0,0183
4	1 524 000	152 446,3	0,0194
5 & 6	1 524 000	152 447,8	0,0034

**TABEAU IX**  
Calcul de  $\bar{A}$  et  $s_A$

Cas	METHODE n° 2 Approximation normale			METHODE n° 3 Approximation Gamma		
	$z_0$	$\bar{A}$ mm <sup>3</sup>	$s_A$ mm <sup>3</sup>	$h_0$	$\bar{A}$ mm <sup>3</sup>	$s_A$ mm <sup>3</sup>
1	-2,5	3074,787	56,195	0,975	3103,914	56,727
2	-2,5	3060,060	10,264	1,105	3116,093	10,452
3	-3	3503,960	64,039	0,307	3561,232	65,085
4	-3	3505,587	68,136	0,306	3562,836	69,249
5	-3	3492,833	11,715	0,316	3546,324	11,895
6	-2,5	3328,777	11,165	0,300	3365,485	11,288

**TABEAU X**  
Calcul de  $\bar{b}$  et  $s_b$

Cas	METHODE n° 2 Approximation normale		METHODE n° 3 Approximation Gamma	
	$\bar{b}$ mm	$s_b$ mm	$\bar{b}$ mm	$s_b$ mm
1	46,119	0,359	46,555	0,349
2	45,900	0,0689	46,741	0,0701
3	52,556	0,394	53,415	0,401
4	52,580	0,526	53,439	0,534
5	52,392	0,0786	53,195	0,0798
6	49,932	0,0749	50,482	0,0757

TABLEAU XI  
Vérifications

Cas	Objectif à réaliser	Approximation normale		Approximation Gamma	
		$R_N$	$\frac{\Delta R}{R}$ en %	$R_\Gamma$	$\frac{\Delta R}{R}$ en %
1	0,9938	0,9929	- 0,09	0,9948	+ 0,10
2	0,9938	0,9926	- 0,12	0,9961	+ 0,23
3	0,9987	0,9982	- 0,05	0,9987	+ 0
4	0,9987	0,9983	- 0,04	0,9988	+ 0,01
5	0,9987	0,9981	- 0,06	0,9990	+ 0,03
6	0,9938	0,9939	+ 0,01	0,9952	+ 0,14

Pour chacun des six couples de situations, on a simulé  $N_T = 10000$  réalisations de C. Les résultats apparaissent au tableau XI dans lequel  $R_N$  et  $R_\Gamma$  représentent, respectivement les fiabilités simulées résultant de l'hypothèse de normalité et de l'hypothèse de loi Gamma (ces calculs comme tous ceux des présents travaux ont été effectués par un calculateur Hewlett Packard (HP 10)).

Nous constatons que dans cinq cas sur six, l'approximation normale ne permet pas d'atteindre l'objectif de fiabilité souhaité alors que la méthode proposée permet dans tous les cas, soit d'atteindre l'objectif R, soit d'aller légèrement au-delà.

Les résultats obtenus par l'approximation normale font apparaître indirectement l'intérêt d'une valeur de fiabilité associée à un niveau de confiance donné. Cette approche a été développée dans le cadre des calculs de vérification des caractéristiques de sécurité pour des distributions de contrainte et résistance normales {3} {4} {17}. Ce problème ne semble pas se poser avec l'approximation Gamma puisque, dans les six cas envisagés, nous avons, sans calculs, une certaine marge de sécurité.

## V – CONCLUSION

Au terme de cette étude, on constate qu'un certain nombre de réponses peuvent être apportées aux questions posées par la fiabilité mécanique, sous l'aspect plus précis du prédimensionnement.

Dans la première partie, on étudie deux approximations possibles (approximation Normale et approximation Gamma) des lois suivies par les variables aléatoires résultant de combinaisons de variables aléatoires Normales. Ceci conduit à l'utilisation d'une loi Béta de seconde espèce et à la mise en œuvre d'une loi récemment proposée généralisant la loi de Weibull. Des techniques de simulation permettent d'appliquer des tests d'adéquation (Kolmogorov, Lilliefors) à ces modèles.

ANNEXE A

Rappels et notations

Loi	Domaine de définition	Densité de probabilité $f(x)$	$K_1$	$K_2$
Normale $N(m, \sigma)$	$x \in \mathbb{R}$	$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$	$m$	$\sigma^2$
Gamma $\Gamma(a, p)$	$x, a, p \in \mathbb{R}^+$	$f(x) = \frac{a^p}{\gamma(p)} e^{-ax} x^{p-1}$	$\frac{p}{a}$	$\frac{p}{a^2}$
Bêta 2 $B^2(p, q)$	$x, p, q \in \mathbb{R}^+$	$f(x) = \frac{\gamma(p+q)}{\gamma(p)\gamma(q)} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}$	$\frac{p}{q-1}$	$\frac{p(p+q-1)}{(q-1)^2(q-2)}$
Weibull $W(\beta, \eta, d)$	$x \geq d$ et $\beta, \eta > 0$	$f(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x-d}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-d}{\eta}\right)^\beta}$	$\eta \left[ \frac{d}{\eta} + \gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]$	$\eta^2 \left[ \gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left\{ \gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right\}^2 \right]$
$\gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$		$\gamma(a, p) = \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} dx = \frac{\gamma(p)}{a^p}$	$\beta(p, q) = \frac{\gamma(p) \cdot \gamma(q)}{\gamma(p+q)}$	$\gamma_u(p) = \int_0^u e^{-x} x^{p-1} dx$

Ceci conduit à préciser, pour un risque donné, les domaines de validité des approximations envisagées.

Dans la seconde partie, on propose une méthode originale de conception par la fiabilité. Basée sur l'hypothèse que certaines variables composantes suivent des lois Gamma, on démontre qu'elle a un champ d'application plus étendu que la méthode conventionnelle. Compte tenu de sa mise en œuvre moins aisée, il en résulte un critère de choix.

Dans une dernière partie, l'exemple concret du prédimensionnement d'une poutre travaillant en flexion est traité par l'une et l'autre méthode. De l'étude différentielle des résultats il ressort, depuis une vérification consistant (les dimensions ayant été déterminées) à calculer la fiabilité vraie, que la méthode proposée remplit toujours l'objectif R fixé, tandis que pour certaines situations, la méthode conventionnelle est prise en défaut. Les fiabilités calculées directement par simulation confirment ces constatations.

## ANNEXE B

### Loi bêta de seconde espèce $B^2(h, p, q)$

#### 1 – Définition, densité de probabilité, fonction de répartition

Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes, de lois respectives  $\Gamma(a, p)$  et  $\Gamma(b, q)$  et  $X = Y/Z$

Il vient, avec D tel que  $y > 0, z > 0, y/z < z$  :

$$F_X(x) = P(X < x) = \iint_D f_Y(y) f_Z(z) dy dz$$

Le changement de variables  $u = y, v = y/z$  induit le jacobien  $-y/v^2$  et la relation se transforme en :

$$F_X(x) = \int_0^x dv \int_0^\infty f_Y(y) f_Z(y/v) \cdot |-y/v^2| dy ,$$

$$\text{d'où } f_X(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\gamma(a, p)} e^{-ay} y^{p-1} \frac{1}{\gamma(b, q)} e^{-b(y/x)} (y/x)^{q-1} y/x^2 dy$$

soit finalement, après avoir posé  $h = b/a$  :

$$f_X(x) = (h)^q \frac{1}{\beta^2(p, q)} \cdot \frac{x^{p-1}}{(x+h)^{p+q}} \quad (B-1)$$

Sous une forme différente, cette loi de probabilité qui sera notée  $B^2(h, p, q)$  a été étudiée par Block et Rao [18].

Notons que si X suit une loi  $B^2(h, p, q)$ ,  $T = \frac{1}{h} X$  suit une loi  $B^2(1, p, q) \equiv B^2(p, q)$ .

La fonction de répartition de X s'exprime par :

$$F_X(x) = \int_0^x f(u) du = \frac{1}{\beta^2(p, q)} \cdot \beta_{x/h}^2(p, q) \quad (B-2)$$

## 2. – Cumulants. Coefficients de Fisher

Sachant que si  $X = hT$ ,  $m_r(X) = h^r m_r(T)$ , il vient, depuis les caractéristiques de T de loi  $B^2(p, q)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} E\{X\} = \frac{b}{a} \frac{p}{q-1} \\ V\{X\} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{p(p+q-1)}{(q-1)^2(q-2)} \end{array} \right. \quad (B-3)$$

Pour ce qui est de  $G_1$ , on obtient :

$$G_1 = \frac{2(q-2)^{1/2} [(p+q)(2p+q) - (2q+3p-1)]}{p^{1/2} (p+q-1)^{3/2} (q-3)} \quad (B-4)$$

Si p est grand, après avoir posé  $k = \frac{q}{p}$ , (B-4) peut-être approché par

$$G_1 \simeq \frac{2(k+2)}{[p \cdot k \cdot (k+1)]^{1/2}}$$

On démontre que  $G_1 > 0$ , ce qui traduit une distribution toujours étalée à droite.

De même, sous les hypothèses précédentes,

$$G_2 \simeq \frac{6(k^3 + 6k^2 + 10k + 5)}{p \cdot k \cdot (k+1)^2} \quad (B-6)$$

La valeur positive de  $G_2$  signifie que la distribution est plus aplatie que la distribution normale. Ces formules semblent préférables à celles avancées par Johnson [19], qui, pour p et q grands, propose :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1 \simeq \left[ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{4}{p+q} \right]^{1/2} \\ G_2 \simeq \frac{2}{p} + \frac{2}{q} - \frac{6}{p+q} \end{array} \right.$$

## ANNEXE C

### Loi de Weibull généralisée

#### 1. – Loi $W(\beta, \eta, p, \lambda, d)$

On a démontré par ailleurs [2], [20] que si n variables aléatoires  $Y_\alpha$  suivent, de manière indépendante, des lois normales  $N(m_\alpha, \sigma)$  la variable aléatoire.

$$X = \left( \sum_{\alpha=1}^n Y_{\alpha}^2 \right)^{1/\beta} + d \quad (C-1)$$

suit une loi de Weibull généralisée, notée  $W(\beta, \eta, p, \lambda, d)$  dont la fonction densité de probabilité s'exprime,  $\forall x \geq d$  par

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{x-d}{\eta} \right)^{\beta p - 1} \exp \left[ - \left( \frac{x-d}{\eta} \right)^{\beta} \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \left( \frac{x-d}{\eta} \right)^{\beta k}}{k! \gamma(p+k)} \quad (C-2)$$

où  $\beta$  est le paramètre de forme (ou de puissance)

$\eta = (2\sigma^2)^{1/\beta}$  est le paramètre d'échelle

$p = n/2$  est le paramètre de nombre

$\lambda = \frac{1}{2\sigma^3} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha}^2$  est le paramètre de décentrage

$d$  est le paramètre de décalage

Notons que si  $W(\beta, \eta, d)$  symbolise la loi de Weibull usuelle,  $W(\beta, \eta, 1, 0, d) \equiv W(\beta, \eta, d)$ .

Différentes classes de variables aléatoires peuvent être générées par cette loi de probabilité.

Ainsi, pour  $p = 1/2$  et  $d = 0$ , (C-2) est la loi suivie par  $X = (Z^2)^{1/\beta}$ .

Remarquant que si  $m$  est grand devant  $\sigma$ ,  $P(Z < 0) \simeq 0$ , et  $X \simeq Z^{2/\beta}$ .

Pour  $\beta = 2$ ,  $p = n/2$ ,  $d = 0$ ,  $X$  est la loi suivie par le module d'un vecteur dont les  $n$  composantes suivent des lois  $N(m_{\alpha}, \sigma)$ .

## 2. - Détermination des caractéristiques.

Posant  $d = 0$  dans (C-1), ce qui ne modifie pas les moments centrés et les coefficients de Fisher, il vient :

$$m_r = E(X^r) = \int_0^{\infty} x^r \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{x}{\eta} \right)^{\beta p - 1} \exp \left[ - \left\{ \lambda + \left( \frac{x}{\eta} \right)^{\beta} \right\} \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k! \gamma(p+k)} \left( \frac{x}{\eta} \right)^{\beta p} dx,$$

d'où, tous calculs faits

$$m_r = \eta^r e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\gamma(p+k+r/\beta)}{\gamma(p+k)} \quad (C-3)$$

soit encore :

$$m_r = \eta^r e^{-\lambda} \frac{\gamma(p+r/\beta)}{\gamma(p)} \theta(p+r/\beta; p; \lambda) \quad (C-4)$$

où  $\theta(p+r/\beta; p; \lambda)$ , est solution de l'équation différentielle

$$\lambda \frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + (p-\lambda) \frac{d\theta}{d\lambda} - \left( p + \frac{r}{\beta} \right) \lambda = 0$$

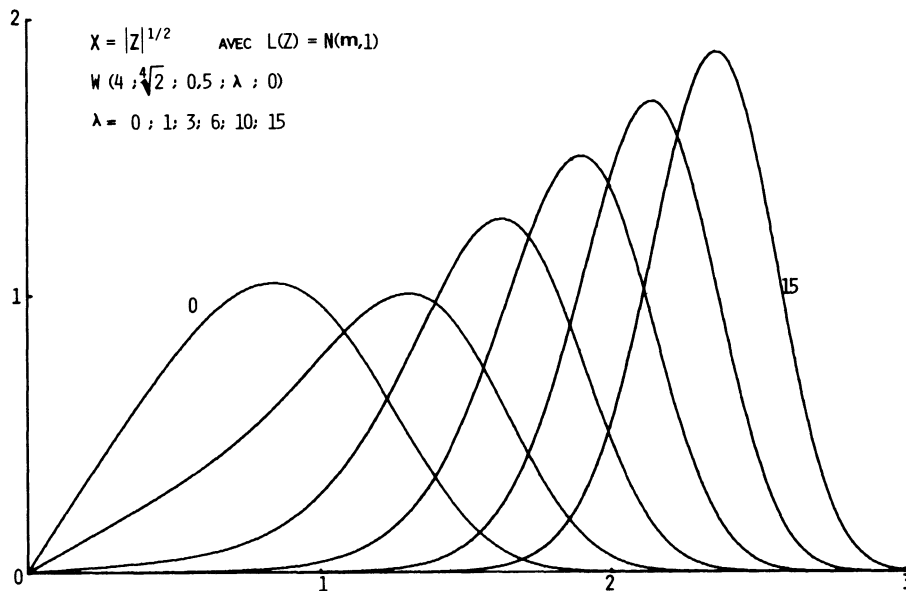


Figure 3.

est la fonction de Kummer. On sait que la série qui lui est associée est convergente quels que soient  $p$  et  $p + \frac{r}{\beta}$  non entiers négatifs

Il est opportun, afin d'obtenir des formes asymptotiques de  $m_r$ , selon le paramètre de décentrage  $\lambda$ , d'appliquer à  $\theta$  la transformation suivante

$$\theta(a, b, x) = \frac{\gamma(b)}{\gamma(a)} e^x x^{a-b} G(1-a; b-a; x), \quad \text{où}$$

$$G(1-a; b-a; x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k k!} \prod_{j=0}^{k-1} (1-a+j)(b-a+j)$$

L'application de cette transformation conduit à :

$$E(X) = K_1 = \eta \lambda^{1/\beta} \left[ 1 + \frac{1}{\lambda\beta} \left( p + \frac{1-\beta}{\beta} \right) \right] + d$$

$$V(X) = K_2 = \eta^2 \lambda^{2/\beta} \left[ \frac{2}{\lambda\beta^2} + \frac{1}{\lambda^2 \beta^3} \left\{ p(4-3\beta) + \frac{2}{\beta}(1-\beta)(3-2\beta) \right\} \right]$$

$$G_1 = \frac{2\beta^{1/2} \left[ 3(1-\beta)\lambda + \frac{1}{\beta} p(18-27\beta+10\beta^2) \right]}{\left[ 2\lambda\beta + p(4-3\beta) + \frac{2}{\beta}(1-\beta)(3-2\beta) \right]^{3/2}}$$

$$G_2 = \frac{8\lambda(16-18\beta+5\beta^2)}{\left[ 2\lambda\beta + p(4-3\beta) + \frac{2}{\beta}(1-\beta)(3-2\beta) \right]^2}$$



Ces formules sont arrêtées aux deux premiers termes par  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $G_1$ , au premier terme pour  $G_2$ .

On montre (figure 3) un réseau de courbes densité de probabilité de la variable aléatoire  $X = |Z|^{1/2}$ , pour différentes valeurs de  $\lambda$ .

## ANNEXE D

### Méthode de simulation de Monte-Carlo

#### 1. – Position du problème

Sachant que la variable aléatoire  $Y$  s'exprime par la relation  $Y = \mathcal{F}(X_i)$  selon les  $k$  variables aléatoires  $X_i$  dont on connaît les lois, la méthode de Monte-Carlo consiste à simuler  $n$  réalisations  $y_j$  de  $Y$  depuis  $n$  réalisation du  $k$ -uple  $(x_i)$ .

Chaque  $x_i$  est calculé depuis un générateur de nombres aléatoires uniformes (N.A.U.) {21}, {22}, soit par des procédures spécifiques dans le cas de certaines lois (algorithme de Box et Muller {23} ou application du théorème central limite pour la loi normale), soit d'une manière générale, par résolution de l'équation intégrale

$$u_i = \int_0^{x_i} f_X(t) dt \quad \text{issue de} \quad x_i = F^{-1}(u_i) \quad (D-1)$$

#### 2. – Procédure pratique

Les N.A.U. sont, dans le présent étude, issus de l'algorithme linéaire

$$u_{i+1} = a u_i + b |C \quad (D-2)$$

ou de l'algorithme puissance :

$$u_{i+1} = p . d . ([u_i + \pi]^5) \quad (D-3)$$

où  $|C$  et  $p . d .$  représentent respectivement la congruence et la partie décimale.

Pour  $n$  donné, on a testé la qualité de l'échantillon  $E_n$  ainsi formé (tests d'adéquation et tests d'égalité des moyennes et des variances) ainsi que l'indépendance des suites  $(x_i)$ .

La figure a montre l'histogramme d'un  $E_{1000}$  de N.A.U. simulé par (D-3), la figure b celui de la distribution de  $Y = |X|^{1/2}$  où  $L(X) = N(\sqrt{2}; 1)$ . On a tracé, en superposition, dans et l'autre cas, la fonction densité de probabilité correspondante. [Rappelons que  $Y = |X|^{1/2}$  suit la loi  $W(4; \sqrt[4]{2}; 1/2; 1; 0)$  présentée à l'annexe C].

On constate, de visu, l'excellente qualité des échantillons ainsi réalisés.

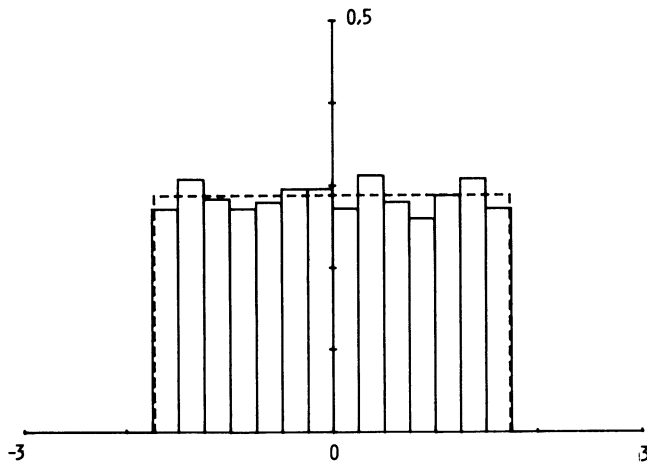


Figure 4-a

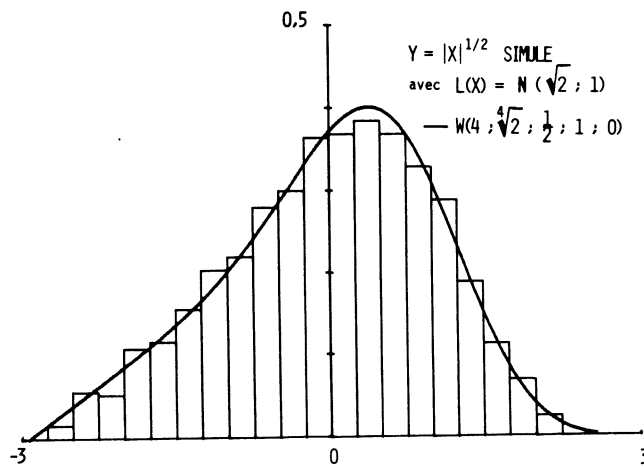


Figure 4-b

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] KENDALL M.G. et STUART A. — The advanced Theory of Statistics Volume I, Charles Griffin, London (1969).
- [2] MARTINEAU G.. — Introduction de l'approximation Gamma dans la conception par la fiabilité d'un élément de machine. Thèse Docteur-Ingénieur — Lyon (1976).
- [3] MARCOVICI C. et LIGERON J.C. — Utilisation des techniques de fiabilité en mécanique. Technique et documentation (1974).
- [4] MARTINEAU G. FAUCHON J. et BAHUAUD J. — Fiabilité en mécanique Tomes I et II. Centre d'Actualisation Scientifique et Technique (1975) INSA de Lyon.

- [5] HAUGEN E.B. – Probabilistic Approaches to Design John Wiley and Sons – New York (1968).
- [6] KECECIOGLU D. – Fiabilité en mécanique. Stage organisé par : ADERA, AFCIQ, AFNOR, Paris, Juin 1975.
- [7] MARTINEAU G., BAHUAUD J. et FAUCHON J. – Approche probabiliste de la sécurité. Séminaire ADERA – Bordeaux (1976).
- [8] VIGIER M.G. – Application pratique des statistiques modernes, Eyrolles (1972).
- [9] MARTINEAU G., FAUCHON J. et BAHUAUD J. – Utilisation en fiabilité mécanique des lois Gamma et Béta de seconde espèce pour la détermination des caractéristiques de sécurité d'éléments de construction. *Sciences et Techniques de l'Armement* – 51, I(1977).
- [10] METALS HANDBOOK. – Vol. 1 : Properties and Selection of Metals American Society for Metals (1961).
- [11] MARTINEAU G., FAUCHON J. et BAHUAUD J. – Approche probabiliste de la sécurité : coefficient de sécurité et fiabilité. 2ème Congrès Français de Mécanique, Toulouse (Septembre 1975).
- [12] YOUNG et GREGORY. – A survey of Numerical Analysis Addison-Wesley.
- [13] BEREZIN et ZHIDKOV. – Computing Methods Pergamon Press.
- [14] KECECIOGLU D. – Reliability Analysis of Mechanical Components and systems First Internat. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology – Berlin, 20-24 Sept. 1971.
- [15] HAUGEN E.B., et WIRSCHING P.H. – Probabilistic Fatigue Design Alternative to MINER's Cumulative Rule The University of Arizona, Tucson (1973).
- [16] BASTENAIRE F. – Aspect du phénomène de fatigue. Description mathématique et traitement statistique. Chapitre 4 de la "Fatigue dans les matériaux" Henri le Boiteux Ediscience (1973).
- [17] KECECIOGLU D. – Mechanical Structural Reliability Analysis and the associated Confidence Level Tenth Ann. Reliab. Engin. and Management Institute University of Tucson – Arizona (November 6-10, 1972).
- [18] BLOCK H.W. et RAO B.R. – A Beta Warning-time Distribution and a Distended Beta Distribution Sankhya – Séries B 135, 1, 79.84 (1973).
- [19] JOHNSON N.L., KOTZ S. – Continuous Univariate Distributions – 2 Houghton Mifflin Company – Boston (1970).
- [20] FAUCHON J. – Sur une loi de probabilité à cinq paramètres permettant, en Fiabilité Mécanique notamment, de nombreuses applications *C.R. Acad. Sc. Paris* – Série A, t. 282, p. 329 (1976).
- [21] MAURIN J. – Simulation déterministe du hasard Masson (1975).
- [22] KNUTH D.E. – Seminumerical Algorithms A. Wesley (1969).
- [23] BOX G.E.P. et MULLER M.E. – A note on the generation of Random Normal Deviates *Ann. Math. Statist.* 29, 610.611 (1958).