REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

S. LASSARRE

À propos des tests statistiques, sur variables poissonniennes, utilisés dans le domaine de la sécurité routière

Revue de statistique appliquée, tome 25, n° 3 (1977), p. 55-74

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1977__25_3_55_0>

A PROPOS DES TESTS STATISTIQUES, SUR VARIABLES POISSONNIENNES, UTILISÉS DANS LE DOMAINE DE LA SÉCURITÉ ROUTIÈRE

S. LASSARRE
Chargé d'Etudes à l'ONSER
(Organisme National de la Sécurité Routière)

SOMMAIRE

Mots-Clés : **Test de χ^2. Test du maximum de vraisemblance. Variable aléatoire poissonnienne. Comparaison de tests. Tableaux 2 x 2.**

I. POSITION DU PROBLEME

Pour mesurer l'efficacité d'une mesure, comme par exemple le rainurage des chaussées en béton, ou la pose de délinéateurs, sur la sécurité, un plan d'expérience est construit en déterminant deux périodes d'observation : Avant/Après et deux zones : la zone témoin et la zone expérimentale.

Les résultats se présentent sous la forme d'un tableau croisé 2 x 2 : Avant/Après, Témoin/Expérimental où sont inscrits les nombres d'accidents ayant eu lieu pendant la période et sur la zone dites.

Le nombre d'accidents sur une période en un lieu donné suit une loi de Poisson. En utilisant cette hypothèse et les propriétés qui en découlent, trois tests peuvent être utilisés :

– le test du χ^2 de Pearson-Fisher ;

– le test de Tanner proche du test du χ^2 .

– le test du maximum de vraisemblance.

Dans les études en sécurité routière, la préférence va au test de Tanner qui porte sur l'expérimental, le témoin fournissant l'estimation de l'évolution normale entre les deux périodes Avant/Après. La statistique de Tanner supposée suivre à la limite un χ^2 à 1 degré de liberté permet de conclure. Des simulations faites à partir de quadruplets poissonniens ont montré que cette statistique ne suit pas un χ^2 comme distribution limite.

Ce résultat nous a conduit à examiner les diverses formes du χ^2 comme test d'adéquation. Le chapitre II fournit un rappel de la théorie connue et aussi une présentation de résultats nouveaux. Le test du χ^2 doit être différent selon qu'il porte sur un échantillon ou plusieurs échantillons, l'estimation étant faite soit sur un échantillon soit sur plusieurs.

Le chapitre III est une application directe des résultats précédents au problème d'évaluation de la significativité de l'évolution des accidents. Trois statistiques et leur distribution limite, donc trois tests sont étudiés par la voie théorique et par simulation numérique.

Une comparaison de la puissance des tests à partir des résultats des simulations permet de faire des recommandations sur l'emploi de ces tests.

II. LE χ^2 COMME TEST D'ADEQUATION

Notations

Soit deux variables aléatoires indépendantes prenant leur valeur dans le même espace : X de distribution F et Y de distribution H ainsi que deux échantillons indépendants les $(x_i , i = 1, \dots , n)$ et les $(y_i , i = 1, \dots , n)$.

Soit une distribution G_α définie par la liste de ses paramètres $\alpha = (\alpha_1, \dots , \alpha_s)$.

Soit $S_1, \dots , S_r$ $(s < r)$ une partition de l'espace dans lequel les x_i et y_i prennent leur valeur.

Soit $P_i(\alpha)$ la probabilité qu'une observation tombe dans la classe S_i lorsque la distribution est G_α.

Les $P_i(\alpha)$ doivent remplir les conditions de Cramer [2].

Soit n_i et m_i les nombres aléatoires de réalisation des X et des Y qui tombent dans S_i.

	S_1	-----------	S_i	-----------	S_r	Total
X	n_1	-----------	n_i	-----------	n	N
Y	m_1	-----------	m_i	-----------	m	M

1) Le χ^2 comme test d'ajustement

Soit à tester l'hypothèse H'_0 : $F = G_\alpha$.

Il s'agit de tester l'hypothèse d'ajustement d'une distribution expérimentale, celle de X à une distribution théorique (par exemple une loi normale de paramètres μ et σ).

a) Le vecteur-paramètre α est connu.

Les probabilités $P_i(\alpha)$ sont alors calculées.

Considérons la statistique suggérée par Pearson.

$$\chi_N^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - NP_i(\alpha))^2}{NP_i(\alpha)}$$

La distribution asymptotique de cette statistique est un χ^2 à r – 1 degrés de liberté. Voir Cramer [2]

b) Le vecteur-paramètre α est à estimer

• Cramer [2] démontre que lorsque l'estimation est faite à partir des effectifs des classes S_i en suivant la méthode du minimum du χ^2, la distribution asymptotique de χ_N^2 est un χ^2 à r – s – 1 degrés de liberté :

avec $$\chi_N = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - NP_i(\hat{\alpha}))^2}{NP_i(\hat{\alpha})}$$

$\hat{\alpha}$ estimation de α.

• Chernoff et Lehmann [5] prouvent que si l'estimation est faite à partir des données brutes de l'échantillon (les x_i) en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance, la distribution asymptotique de la statistique χ_N^2 est plus grande qu'un χ^2 à r – s – 1 degrés de liberté.

2) Le χ^2 comme test d'homogénéité

L'hypothèse à tester devient $H_0 : F = H$ qui traduit l'homogénéité de deux lois empiriques. Mais cette homogénéité doit faire référence à une loi théorique sous-jacente. Dans la pratique du test d'homogénéité, la loi sous-jacente est la loi multinomiale de paramètres, les probabilités pour chaque classe : $P_1, \ldots, P_r$, mais elle peut être de forme spécifique : Poisson ou normale. Le test d'homogénéité est donc un double test d'ajustement à une loi multinomiale.

L hypothèse à tester est alors $H_0 : F = H = G_\alpha$.

La statistique à calculer est :

$$\chi^2_{N,M} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - NP_i(\hat{\alpha}))^2}{NP_i(\hat{\alpha})} + \frac{(m_i - MP_i(\hat{\alpha}))^2}{MP_i(\hat{\alpha})}$$

où $\hat{\alpha}$ est une estimation de α.

Si le vecteur-paramètre α est connu, alors $\chi^2_{N,M}$ suit un χ^2 à $2(r-1)$ degrés de liberté.

Dans la plupart des cas, le vecteur-paramètre α doit être estimé.

a) Estimation et test sur les deux échantillons

Si l'estimation de α porte sur les effectifs des deux échantillons regroupés (les $n_i + m_i$) alors $\chi^2_{N,M}$ suit un χ^2 à $2(r-1) - s$ degrés de liberté.

Dans le cas du test d'homogénéité, $s = r - 1$ (il suffit d'estimer $r - 1$ probabilités), alors le χ^2 a $r - 1$ degré de liberté.

b) Estimation de la distribution théorique sur les deux échantillons et test sur un échantillon

Murthy et Gafarian [6] prouvent que lorsque les estimations sont faites à partir des effectifs des échantillons regroupés (les $n_i + m_i$), le test statistique $A^2_{N,M}$ sur un seul échantillon (celui des x_i) a une distribution asymptotique plus petite qu'un χ^2 à $2(r-1) - s$ degrés de liberté.

$$A^2_{N,M} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - NP_i(\hat{\alpha}^{(N,M)})^2}{NP_i(\hat{\alpha}^{(N,M)})}$$

La distribution de $A^2_{N,M}$ est de la forme :

$$\xi_1^2 + \cdots + \xi^2_{r-s-1} + (1-\rho) \quad (\eta_1^2 + \cdots + \eta_s^2)$$

où les ξ et les η sont des v.a. normales N (0,1) et indépendantes avec $\rho = \dfrac{N}{N+M}$, lorsque α est estimé par la méthode du minimum du χ^2. Elle prend une forme voisine lorsque α est estimé selon la méthode du maximum de vraisemblance, avec $\hat{\alpha}^{(N,M)}$ estimation de α à partir des échantillons des X et des Y.

c) Estimation de la distribution théorique sur un échantillon et test sur un autre échantillon

Chase [7] a développé cet exemple où le test opère sur un échantillon à partir d'une estimation faite sur un échantillon indépendant (cas fréquent en Sciences Humaines).

Chase traite le cas particulier où G_α est une distribution multinomiale avec $s = r - 1$. Le vecteur-paramètre $\alpha = (P_1, \ldots, P_{r-1})$ est formé des probabilités d'appartenance à un groupe. C'est le cadre du test d'homogénéité entre les X et les Y :

$$\chi^2_{N,M} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - NP_i^*)^2}{NP_i^*} + \frac{(m_i - MP_i^*)^2}{MP_i^*}$$

avec $$P_i^* = \frac{n_i + m_i}{N + M} \quad i = 1, \ldots, r$$

L'estimation et la statistique porte sur X et Y ensemble.

Chase propose la statistique :

$$C^2_{N,M} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - NP_i(\hat{\alpha})^{(M)})^2}{NP_i(\hat{\alpha}^{(M)})}$$

où : $$P_i(\hat{\alpha}^{(M)}) = \frac{m_i}{M} \quad i = 1, \ldots, r$$

L'estimation porte sur Y, le test sur X.

En utilisant les égalités :

$$(n_i - NP_i^*)^2 = (m_i - MP_i^*)^2 = \frac{M^2 \left(n_i - \frac{Nm_i}{M}\right)^2}{(M + N)^2}$$

il s'en suit que :

$$C^2_{N,M} = \sum_{i=1}^{r} \left[\frac{(n_i - NP_i^*)}{NP_i^*} + \frac{(m_i - MP_i^*)^2}{MP_i^*}\right]\left(1 + \frac{n_i}{m_i}\right)$$

Entre crochets, se retrouvent les éléments constituants de la somme $\chi^2_{N,M}$.

Si les dimensions des échantillons tendent vers l'infini avec $N/M \to \tau$ alors $1 + \frac{n_i}{m_i} \to 1 + \tau$ en probabilité pour $i = 1, \ldots r$.

En utilisant ce résultat et la connaissance de la loi limite de $\chi^2_{N,M}$, la distribution asymptotique de $C^2_{N,M}$ est celle de $(1 + \tau)\, \chi^2_{r-1}$

Conséquences pratiques

Si $\tau \to 0$, cela revient à estimer les paramètres avec un échantillon beaucoup plus grand que celui à tester. A la limite nous connaissons le vecteur paramètre α car l'échantillon des Y_i est infini.

La distribution limite de $C^2_{N,M}$ est celle d'un test d'ajustement d'une dis tribution d'un échantillon à une distribution complètement connue.

Si $\tau \to \infty$, on estime α avec un échantillon beaucoup plus petit que celui à tester. De petites variations dans l'estimation de α, entraînent de grandes variations de $C^2_{N,M}$.

Lorsque τ prend une valeur moyenne la distribution de $C^2_{N,M}$ est plus grande que celle obtenue lorsque la distribution G_α est complètement connue (un χ^2 à $r - 1$ degré de liberté).

Chase donne deux théorèmes calqués sur ceux de Murthy et Gafarian.

Théorème 1 :

Si $\hat{\alpha}^{(M)}$ est l'estimateur de α par la méthode du χ^2 réduit, alors la distribution asymptotique de $C^2_{N,M}$ quand N, M $\to \infty$ avec $N/M \to \tau$ est celle de :

$$\xi_1^2 + \cdots + \xi^2_{r-s-1} + (1+\tau)(\eta^2_{r-s} + \cdots + \eta^2_{r-1})$$

où les ξ et les η sont indépendants et distribués normalement de moyenne 0 et de variance 1.

Théorème 2 :

Si $\hat{\alpha}^{(M)}$ est estimé par la méthode du maximum de vraisemblance à partir des données brutes les y_i, alors la distribution asymptotique de $C^2_{N,M}$ lorsque N , M $\to \infty$ avec $N/M \to \tau$ est celle de :

$$\sum_{i=1}^{r-s-1} \xi_i^2 + \sum_{j=1}^{s} (1+\tau\,\mu_j)\,\eta_j^2 \qquad 0 < \mu_j < 1$$

avec ξ et η définis comme précédemment et les μ_j peuvent dépendre de α.

Remarque

Si les μ_i sont égaux à 1, les deux distributions sont égales sinon la première est plus grande que la deuxième. Ceci est dû au fait que dans le 1er cas l'estimation est faite à partir d'une distribution multinomiale de y_i en classes, alors que dans le second cas l'estimation est obtenue directement à partir des y_i bruts et est ainsi plus efficiente.

Les théorèmes 1 et 2 se démontrent en adaptant la démonstration de M et G [6] pour le 1er et celle de L. et C. pour le second [5].

Les démonstrations suivent elles-mêmes les étapes de la démonstration de Cramer [2].

III. APPLICATIONS : TESTS UTILISES POUR ETABLIR LA SIGNIFICATIVITE DE L'EVOLUTION DES ACCIDENTS

A. – Les tests du χ^2

Comment tester la signification de l'évolution d'une mesure concernant la sécurité à partir du tableau croisé 2 x 2 : Avant/Après, Expérimental/Témoins.

	Av.	Ap.	
Témoin	m_1	m_2	M
Expérimental	n_1	n_2	N

m_i est le nombre d'accidents sur le témoin pendant une période

n_i est le nombre d'accidents sur l'expérimental pendant une période

Les n_i et m_i sont des v.a. de Poisson indépendantes. Cette hypothèse est justifiée par le fait que les accidents se produisent indépendemment les uns des autres. Nous utiliserons une propriété remarquable des variables de Poisson :

La loi conditionnelle d'un couple de v.a. (x, y) indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètre λ et μ, à somme constante est une loi binomiale de paramètre $p = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$

dem :
$$f(x, y/x + y = n) = \frac{\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \; \dfrac{\mu^y e^{-\mu}}{y!}}{\dfrac{(\lambda+\mu)^{x+y} e^{-(\lambda+\mu)}}{(x+y)!}}$$

$$= \frac{(x+y)!}{x!\,y!} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^y$$

L'hypothèse à tester est que les distributions sur le témoin et sur l'expérimental sont identiques, donc que les paramètres de chaque loi binomiale p_T pour le témoin, p_E pour l'expérimental sont égaux à un paramètre p à estimer.

Donc :
$$\boxed{H_0 : p_T = p_E = p}$$

1) Test du χ^2 comme test d'homogénéité

Le test fonctionne comme un test d'homogénéité, c'est-à-dire comme un test d'ajustement des deux distributions sur le témoin et l'expérimental à la distribution binomiale estimée sur la base des deux échantillons.

Le paramètre de la loi binomiale est estimé par :
$$p^* = \frac{n_1 + m_1}{N + M}$$

La statistique s'écrit

$$\chi^2_{N,M} = \frac{(n_1 - Np^*)^2}{Np^*} + \frac{(n_2 - Nq^*)^2}{Nq^*} + \frac{(m_1 - Mp^*)^2}{Mp^*} + \frac{(m_2 - Mq^*)^2}{Mq^*}$$

$$\chi^2_{N,M} = \frac{(n_1 - Np^*)^2}{Np^*q^*} + \frac{(m_1 - Mp^*)^2}{Mp^*q^*}$$

$$\chi^2_{N,M} = \frac{(N+M)}{NM} \; \frac{(n_1 m_2 - m_1 n_2)^2}{(n_1 + m_1)(n_2 + m_2)}$$

Lorsque N et M $\rightarrow \infty$, $\chi^2_{N,M}$ suit un χ^2 à 1 degré de liberté. En effet, n = 2 classes : Avant et Après, s = 2 distributions : Témoin/Expérimentale, t = 1 paramètre à estimer p, le nombre de degré de liberté $s(r - 1) - t$ vaut 1.

Une simulation faite sur 300 quadruplets tirés au hasard de v.a. de Poisson de moyenne (36, 24, 20, 16) montre que l'ajustement de la distribution du $\chi^2_{N,M}$ à un χ^2 à 1 degré de liberté est très bon. (Voir Annexe I – le graphique 1).

Sur le plan pratique, on compare $\chi^2_{N,M}$ à la valeur 3,84 qu'un χ^2 à 1 degré de liberté ne dépasse que dans 5 % des cas. Si $\chi^2_{N,M} < 3{,}84$ on conclue à la non-significativité de l'évolution qui est calculée par la formule $ev = \dfrac{n_2}{n_1 \times \dfrac{m_2}{m_1}}$

Cette quantité représente le rapport du nombre d'accidents après sur l'expérimental par le nombre d'accidents attendus après en définissant le taux d'évolution sur les deux périodes par $C = \dfrac{m_2}{m_1}$

Cette formule de l'évolution suggère d'utiliser un autre test : le test de Tanner où l'estimation porte sur le témoin et la statistique est calculée sur l'expérimental.

2) Test de Tanner

Le modèle de Tanner [4] correspond au cas traité par Chase [7] dans son article.

p est estimé par $\hat{p} = \dfrac{m_1}{M}$ (témoin)

La statistique vaut :

$$C^2_{N,M} = \frac{(n_1 - \hat{p}N)^2}{\hat{p}N} + \frac{(n_2 - \hat{q}N)^2}{\hat{q}N}$$

$$= \frac{(n_1 - \hat{p}N)^2}{N\hat{p}\hat{q}}$$

Pour Tanner, cette statistique a pour distribution limite lorsque $N \rightarrow \infty$ un χ^2 à 1 degré de liberté, comme dans un test d'ajustement. Or, il s'agit d'un test d'homogénéité ou si l'on préfère d'un test d'ajustement d'une distribution donnée sur l'expérimental à une distribution estimée sur le témoin. Dans ce cas, $C^2_{N,M}$ suit lorsque N et M $\rightarrow \infty$ une loi de $(1 + \tau)\chi^2$ avec

$$\tau = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} N/M$$

La distribution de la statistique de Tanner est plus grande que celle d'un χ^2 à 1 degré de liberté. Seulement dans le cas où le témoin est plus grand que l'expérimental, le test peut fonctionner comme un test du χ^2 d'ajustement.

Une simulation a été faite sur 300 quadruplets de v.a. de Poisson de moyenne (36, 24, 20, 16). L'ajustement de la distribution de $C^2_{N,M}$ à la distribution de 1,67 χ^2 est très bonne. (Voir Annexe I, le graphique II).

Le seuil de significativité à 95 % vaut 6,43 et non plus 3,86. En appliquant ce test avec le seuil de 3,86, on a plus de chance de conclure faussement à la significativité de l'évolution.

3) Test selon le modèle de Murthy et Gafarian

Le paramètre de la loi binomiale est estimé sur le témoin + l'expérimental par :

$$\hat{p} = \frac{n_1 + m_1}{N + M}$$

La statistique est calculée sur l'expérimental seul :

$$B^2_{N,M} = \frac{(n_1 - \hat{p}N)^2}{\hat{p}N} + \frac{(n_2 - \hat{q}N)^2}{\hat{q}N}$$

$$B^2_{N,M} = \frac{M}{N + M}\,\chi^2_{N,M}$$

Si lorsque $N, M \to \infty$, $N/M \to \tau$ alors $B^2_{N,M}$ a pour distribution limite celle de $\frac{1}{1 + \tau}\,\chi^2$. La distribution est donc plus petite que celle d'un χ^2.

4) Conclusion

Ces trois tests sont équivalents car ils permettent de tester la même hypothèse : les distributions sur le témoin et sur l'expérimental sont identiques et ont pour forme une distribution binomiale à estimer.

Les domaines sur lesquels portent l'estimation et le test entraînent des variations dans la distribution limite des trois statistiques.

Test	Domaine de l'estimation	Domaine de la statistique	Distribution limite
Homogénéité Pearson	Témoin + Expérimental	Témoin + Expérimental	χ^2
Tanner	Témoin	Expérimental	$(1 + \tau)\,\chi^2$
Murthy et Gafarian	Témoin + Expérimental	Expérimental	$\frac{1}{1 + \tau}\,\chi^2$

avec $\tau = \frac{\text{effectif expérimental}}{\text{effectif témoin}}$

B. Test du maximum de vraisemblance

Nous supposons que les quatre variables du tableau croisé x, u, y, v, suivent des lois de Poisson de paramètre a, λa, b, μb.

	Avant	Après
Expérimental	x	u
Témoin	y	v

Calculons le logarithme de la fonction de vraisemblance :

$$\text{Log L} = \text{Log}\left(\frac{e^{-a}\, a^{x}\, e^{-b}\, b^{y}\, e^{-\lambda a}\, (\lambda a)^{u}\, e^{-\mu b}\, (\mu b)^{v}}{x!\, y!\, u!\, v!}\right)$$

$$\text{Log L} = -a + x \text{ Log } a - b + y \text{ Log } b - \lambda a + u \text{ Log } \lambda a$$
$$- \mu b + v \text{ Log } \mu b - \text{Log } x! - \text{Log } y! - \text{Log } u! - \text{Log } v!$$

Pour rendre maximum cette quantité, il est nécessaire d'annuler des dérivées :

$$\frac{\partial \text{ Log L}}{\partial a} = -1 + \frac{x}{a} - \lambda + \frac{u}{a}$$

$$\frac{\partial \text{ Log L}}{\partial b} = -1 + \frac{y}{b} - \mu + \frac{u}{b}$$

$$\frac{\partial \text{ Log L}}{\partial \lambda} = -a + \frac{v}{\lambda}$$

$$\frac{\partial \text{ Log L}}{\partial \mu} = -b + \frac{v}{\mu}$$

Nous devons tester l'hypothèse nulle $H_0 : \lambda = \mu$ (l'évolution est la même sur l'expérimental et le témoin). Nous devons considérer deux cas H_0 et H_1 pour calculer le maximum de Log L.

1) $H_1 : \lambda \neq \mu$

En annulant les dérivées, on obtient la valeur des paramètres rendant maximum L dans l'hypothèse H_1.

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\lambda} a &= u \\ \hat{\mu} b &= v \\ \hat{a} &= x \\ \hat{b} &= y \end{aligned}}$$

2) $H_0 : \lambda = \mu$

L devient L_0 en remplaçant λ par μ et on ne doit plus qu'annuler trois dérivées :

$$\frac{\partial \text{ Log } L_0}{\partial a} = -1 + \frac{x}{a} - \mu + \frac{u}{a}$$

$$\frac{\partial \text{ Log } L_0}{\partial b} = -1 + \frac{y}{b} - \mu + \frac{v}{b}$$

$$\frac{\partial \text{ Log } L_0}{\partial \mu} = -a + \frac{u}{\mu} - b + \frac{v}{\mu}$$

d'où les valeurs des paramètres qui rendent maximum L dans l'hypothèse H_0.

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\mu}_0 &= \frac{u+v}{x+y} \\ \hat{a}_0 &= \frac{(x+u)(x+y)}{u+v+x+y} \\ \hat{b}_0 &= \frac{(y+v)(x+y)}{u+v+x+y} \end{aligned}}$$

d'où :

$$\hat{\mu a}_0 = \frac{(x+u)(u+v)}{u+v+x+y}$$

$$\hat{\mu b}_0 = \frac{(y+u)(u+v)}{u+v+x+y}$$

Formons le rapport du maximum de vraisemblance :

$$\Lambda = \frac{\underset{H_0}{\text{Max}}\, L}{\underset{H_1}{\text{Max}}\, L}$$

$$\Lambda = \frac{(x+u)^{x+u}\,(x+y)^{x+y}\,(u+v)^{u+v}}{x^x\, y^y\, u^u\, v^v\,(u+y+u+v)^{x+y+u+v}}$$

Λ est homogène de degré zéro en u, v, x, y.

En fait, on s'intéresse à la quantité $-2 \operatorname{Log} \Lambda$ qui suit lorsque $n \to \infty$ un χ^2 à 1 degré de liberté.

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{Log} \Lambda = 2\,[\,&(x+y+u+v) \operatorname{Log}(x+y+u+v) + x \operatorname{Log} x + y \operatorname{Log} y + u \operatorname{Log} u \\ &+ v \operatorname{Log} v - (x+u) \operatorname{Log}(x+u) - (x+y) \operatorname{Log}(x+y) - (y+v) \\ &\operatorname{Log}(y+v) - (u+v) \operatorname{Log}(u+v)\,] \end{aligned}$$

Une simulation qui porte sur 300 quadruplets de v.a. de Poisson de moyenne (36, 24, 20, 16) montre que l'ajustement de la distribution de $-2 \log \Lambda$ à un χ^2 à 1 degré de liberté est très bonne. (Voir Annexe II – le graphique 1).

C. Comparaison de la puissance du test du χ^2 de PEARSON et du test du maximum de vraisemblance par simulation

Le coefficient de correlation entre les deux statistiques est voisin de 1. Il suffit pour s'en assurer de considérer le tableau ci-après où sont inscrites les valeurs des trois statistiques pour un quadruplet poissonnien tiré au hasard.

D'ailleurs un développement en série de Taylor de $-2 \operatorname{Log} \Lambda$ permettrait de retrouver l'expression du $\chi^2_{N,M}$ sous certaines conditions.

Quadruplet Poissonien					Statistique Tanner	$-2 \operatorname{Log} \Lambda$	Pearson
28.	26.	18.	16.	*	.016*	.009*	.010
29.	16.	21.	21.	*	3.624*	1.658*	1.654
26.	24.	13.	15.	*	.348*	.222*	.223
31.	32.	13.	17.	*	.069*	.043*	.044
40.	22.	18.	15.	*	1.433*	.892*	.900
25.	13.	20.	8.	*	.396*	.236*	.236
27.	25.	21.	14.	*	.915*	.553*	.552
25.	17.	19.	12.	*	.040*	.022*	.023
11.	24.	16.	21.	*	2.396*	1.075*	1.071
32.	26.	22.	20.	*	.132*	.075*	.076
31.	18.	19.	12.	*	.052*	.051*	.052
30.	19.	11.	17.	*	5.677*	3.460*	3.445
40.	25.	23.	16.	*	.108*	.065*	.067
24.	26.	17.	19.	*	.009*	.004*	.005
20.	23.	11.	19.	*	1.169*	.704*	.701
30.	17.	23.	20.	*	1.992*	.992*	.992
31.	36.	16.	19.	*	.004*	.001*	.003
28.	25.	25.	19.	*	.281*	.153*	.154
29.	30.	24.	10.	*	6.251*	4.133*	4.043
36.	25.	18.	28.	*	7.521*	4.175*	4.149
38.	21.	21.	18.	*	1.897*	1.088*	1.093
37.	15.	22.	26.	*	14.993*	6.682*	6.615
37.	19.	25.	15.	*	.228*	.129*	.130
30.	34.	19.	14.	*	1.517*	1.000*	.997
28.	22.	24.	16.	*	.260*	.144*	.146
22.	35.	20.	14.	*	5.870*	3.515*	3.506
27.	21.	15.	9.	*	.381*	.258*	.257
34.	18.	25.	15.	*	.147*	.080*	.082
42.	22.	18.	16.	*	2.425*	1.491*	1.505
33.	25.	21.	18.	*	.148*	.086*	.088
40.	25.	18.	16.	*	1.062*	.675*	.680

A partir de l'hypothèse nulle H_0, c'est-à-dire des tableaux :

30	24
20	16

et

150	120
100	80

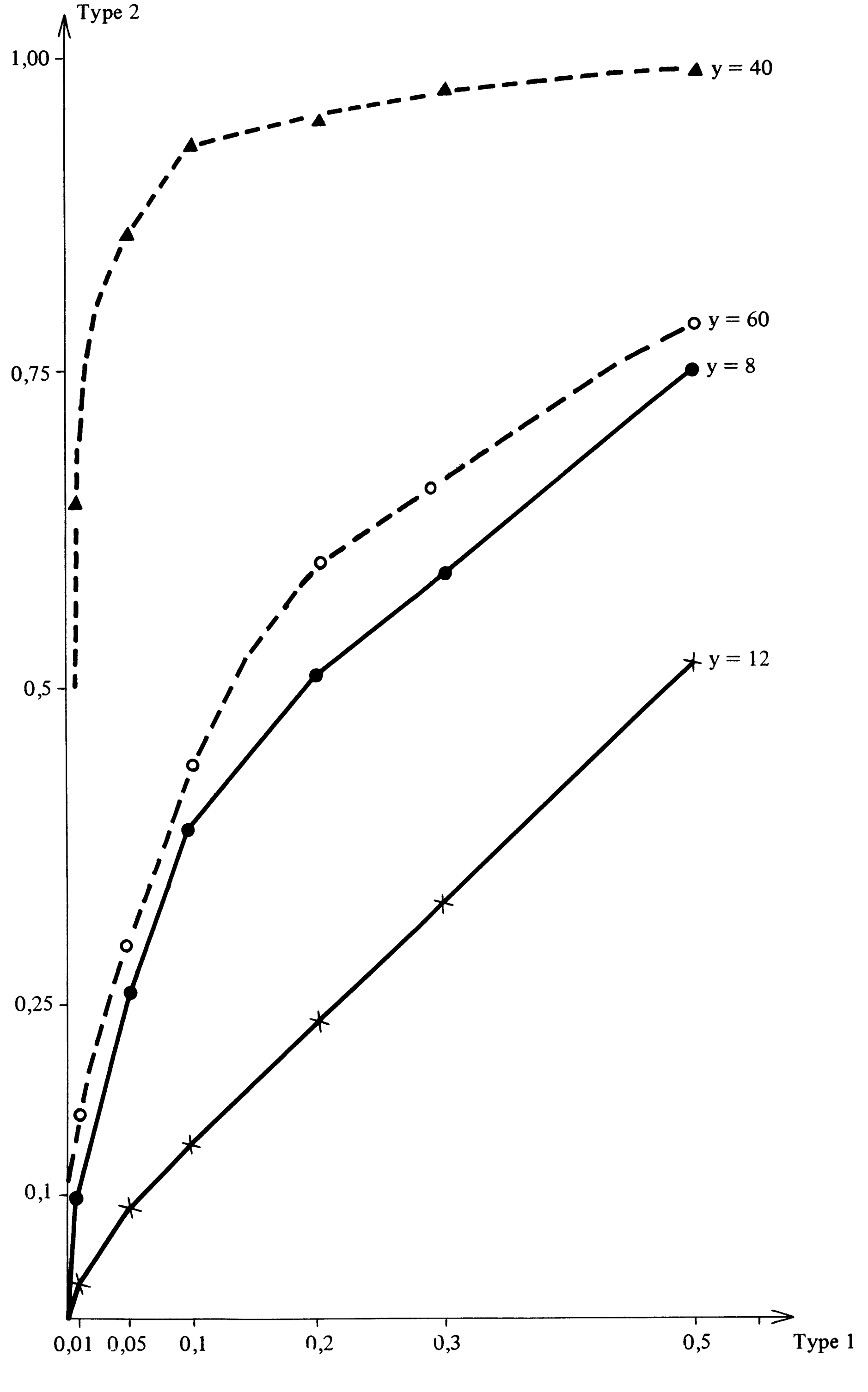
On choisit de s'écarter de l'hypothèse nulle en prenant 8 autres quadruplets :

(30, 24, 20, 14) (150, 120, 100, 70)
(30, 24, 20, 12) (150, 120, 100, 60)
(30, 24, 20, 12) (150, 120, 100, 50)
(30, 24, 20, 8) (150, 120, 100, 40)

Sept seuils d'erreur de première espèce (rejet de H_0 lorsque H_0 est vrai) sont sélectionnés.

Proba. α	0,5	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
seuil	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635

Courbe de puissance de $\chi^2_{N,M}$



Cela permet de construire 5 x 7 tableaux de contingence. Chaque tableau correspond à une hypothèse H_1 et un seuil donné et a pour forme :

Test 2 = $-2 \operatorname{Log} \Lambda$

		Rejet	Accept.	Total
	Rejet			
Test 1	Acceptation			
$\chi^2_{N,M}$	Total			

Voir les tableaux de contingence en Annexe 2.

Il est possible de tracer pour les écarts progressifs à l'hypothèse nulle, les courbes de puissance des deux tests avec en abscisse l'erreur de type I et en ordonnée l'erreur de type II qui est calculée.

Les puissances des deux tests sont équivalentes. Les tests ont la même puissance. (voir le tableau de l'annexe II).

Le test de Pearson fondé sur la statistique $\chi^2_{N,M}$ est pour les faibles valeurs (de l'ordre de 30) peu puissant pour un écart de 25 % par rapport à l'hypothèse nulle, moyennement puissant pour un écart de 50 % à l'hypothèse nulle. Pour les fortes valeurs (de l'ordre de 150) le test est moyennement puissant pour un écart de 25 % à l'hypothèse nulle, très puissant pour un écart de 50 % à l'hypothèse nulle.

IV. CONCLUSIONS

L'utilisation du test du χ^2 comme test d'ajustement ou comme test d'homogénéité (traités par Cramer) ne suffit toujours pas dans la pratique. Des variantes selon le domaine de l'estimation et le domaine de la statistique conduisent à des variantes du test du χ^2 qui ont été étudiées par Murthy et Gafarian puis par Chase. Moore et Spruill [8] ont réussi à unifier la théorie des statistiques du χ^2.

Une de ses variantes nous a conduit à corriger la distribution limite de la statistique de Tanner. Ce test, bien que séduisant par le modèle sous-jacent adapté à notre problématique, n'est pas recommandé car la distribution limite de la statistique dépend du rapport des nombres d'accidents sur le témoin et sur l'expérimental.

Les deux autres tests : test du χ^2 comme test d'homogénéité et le test du maximum de vraisemblance sur variables poissonniennes sont de bons tests pour juger de la significativité de l'évolution d'une mesure visant à améliorer la sécurité, car les distributions limites des statistiques correspondantes ne dépendent pas du nombre d'accidents.

Leurs puissances sont comparables. Mais ces tests sont peu puissants pour des effectifs faibles (30 environ) même pour des écarts importants par rapport à l'hypothèse nulle, ils sont par contre puissants pour des forts effectifs (150 environ) et d'autant plus que l'écart à l'hypothèse nulle est grand.

Remerciements

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur MORLAT pour les conseils qu'il a bien voulu me donner.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIECHELER. – Le χ^2 en note sur le projet d'un cahier des méthodes statistiques applicables à la sécurité routière. ONSER.

[2] CRAMER (chapitre 30). – Tests of goodness of fit in Mathematical Methods of Statistics.

[3] GARWOOD et NEWBY. – Utilisation du χ^2 pour la comparaison des fréquences d'accidents. Symposium sur l'utilisation des méthodes statistiques dans l'analyse des accidents de la route. OCDE, 1970.

[4] TANNER J.C. – A problem in the combination of accident frequencies. *Biometrika,* 45, 1958, 331.

[5] CHERNOFF H. and LEHMANN E.L. – The use of maximum Likelihood estimates in χ^2 – Tests for goodness of fit". *Annals of mathematical statistics,* 25 (September 1954), 579-86.

[6] MURTHY V.K. and GAFARIAN A.V. – "Limiting distribution of some variations of the Chi-Square Statistics". *Annals of mathematical statistics,* 4 (February 1970), 188-94.

[7] CHASE. 1– "On the chi square test when the parameters are estimated independently of the sample", *in JASA,* 1972, Vol. 67.

[8] MOORE et SPRUILL. – "Unified large-sample theory of general chi-squared statistics for tests of fit. *Annals of St.,* 1975, Vol. 3, n° 3.

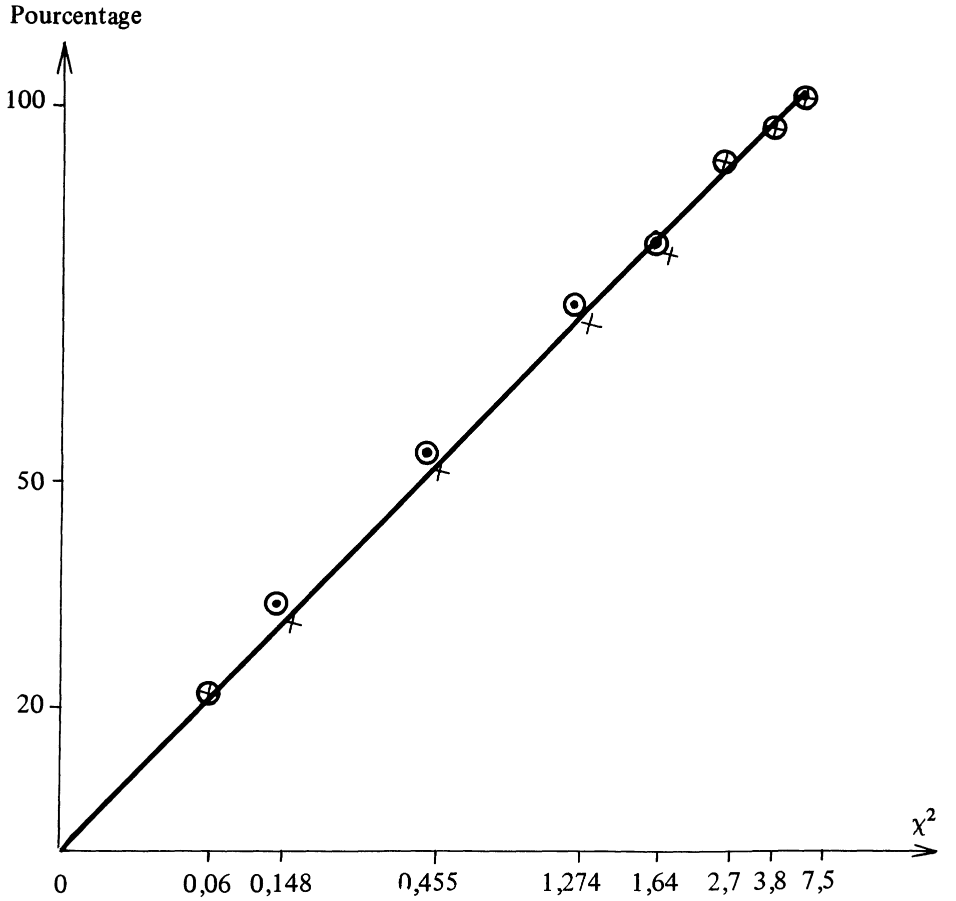
ANNEXE I

AJUSTEMENT GRAPHIQUE

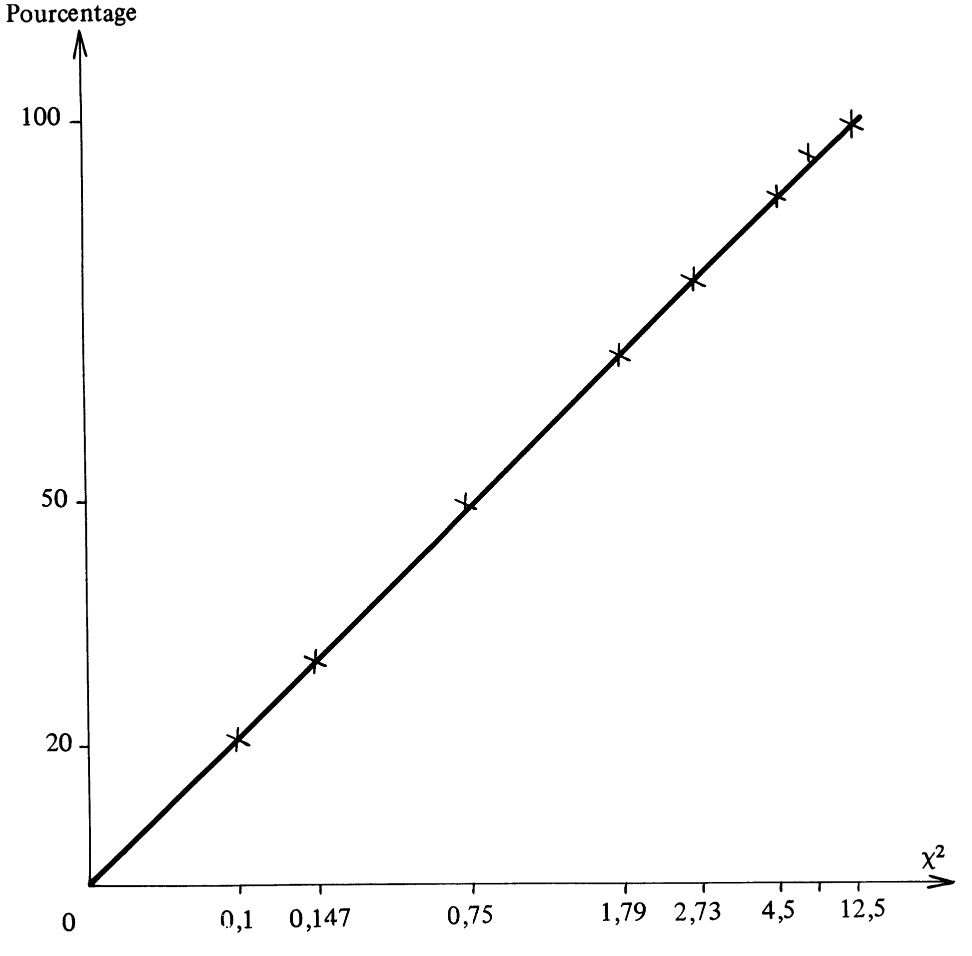
– En abscisse : les valeurs des statistiques et du χ^2.

– En ordonnée les pourcentages.

– La première bissectrice représente la distribution théorique $(1 + \tau)\,\chi^2$ dans le 1er cas, χ^2 dans le 2ème cas, en établissant une échelle convenable sur l'axe des abscisses.



Graphique 1 : Ajustement de la statistique $- 2 \text{ LOG } \Lambda$ ×
Ajustement de la statistique $\chi^2_{N,M}$ ⊙



Graphique 2 : Ajustement de la statistique de Tanner

ANNEXE II

TABLEAUX DE CONTINGENCE REJET/ACCEPTATION POUR LES DEUX TESTS ET LES DEUX SORTES DE TABLEAUX (30, 24, 20, 16), . . . ET (150, 120, 100, 80), . . .

	$X^2_{N,M}$		H_0 y = 80, − 2 Log Λ, Rej.	Acc.		y = 70			y = 60			y = 50			y = 40		
α = 0,5		Rej.	159	0	159	180	0	180	238	0	238	285	0	285	297	0	297
		Acc.	0	141	141	2	118	120	0	62	62	1	14	15	0	3	3
			159	141	300	182	118	300	238	62	300	286	14	300	297	3	300
α = 0,3			96	0	96	135	0	135	198	0	198	263	1	264	294	0	294
			4	200	204	5	160	165	1	101	102	2	34	36	0	6	6
			100	200	300	140	160	300	199	101	300	265	35	300	294	6	300
α = 0,2			62	0	62	100	0	100	179	0	179	249	0	249	286	0	286
			7	231	238	8	192	200	1	120	121	3	48	51	1	13	14
			69	231	300	108	192	300	180	120	300	252	48	300	287	13	300
α = 0,1			35	0	35	56	0	56	132	0	132	217	0	217	279	0	279
			2	263	265	9	235	244	2	166	168	5	78	83	0	21	21
			37	263	300	65	235	300	134	166	300	222	78	300	279	21	300
α = 0,5			21	0	21	32	0	32	91	0	91	181	0	181	259	0	259
			4	275	279	2	266	268	5	204	209	10	109	119	9	32	41
			25	275	300	34	266	300	96	204	300	191	109	300	268	32	300
α = 0,02			9	1	10	15	0	15	65	0	65	139	0	139	231	0	231
			1	289	290	0	285	285	3	232	235	5	156	161	9	60	69
			10	290	300	15	285	300	68	232	300	144	156	300	240	60	300
α = 0,01			4	1	5	7	0	7	48	0	48	107	0	107	196	0	196
			1	294	295	3	290	293	1	251	252	15	178	193	17	87	104
			5	295	300	10	290	300	49	251	300	122	178	300	213	87	300

STOP 0

		H_0 y = 16 -2 Log Λ Rej.	Acc.		y = 14			y = 12			y = 10			y = 8		
α = 0,5 $\chi^2_{N,M}$	Rej.	148	0	148	143	1	144	155	2	157	211	0	211	225	1	226
	Acc.	4	148	152	3	153	156	2	141	143	2	87	89	3	71	74
		152	148	300	146	154	300	157	143	300	213	87	300	228	72	300
α = 0,3		86	3	89	96	1	97	100	0	100	143	0	143	178	0	178
		6	205	211	0	203	203	9	191	200	6	151	157	5	117	122
		92	208	300	96	204	300	109	191	300	149	151	300	183	117	300
α = 0,2		53	1	54	61	0	61	71	0	71	109	1	110	151	1	152
		5	241	246	5	234	239	5	224	229	10	180	190	5	143	148
		58	242	300	66	234	300	76	224	300	119	181	300	156	144	300
α = 0,1		22	3	25	37	0	37	42	0	42	65	1	66	116	0	116
		6	269	275	8	255	263	5	253	258	8	226	234	5	179	184
		28	272	300	45	255	300	47	253	300	73	227	300	121	179	300
α = 0,05		9	1	10	21	0	21	28	0	28	43	0	43	79	0	79
		4	286	290	4	275	279	2	270	272	7	250	257	11	210	221
		13	287	300	25	275	300	30	270	300	50	250	300	90	210	300
α = 0,02		4	0	4	12	0	12	14	0	14	21	0	21	45	0	45
		2	294	296	3	285	288	6	280	286	5	274	279	12	243	255
		6	294	300	15	285	300	20	280	300	26	274	300	57	243	300
α = 0,01		1	0	1	5	0	5	8	0	8	16	0	16	31	0	31
		3	296	299	5	290	295	2	290	292	4	280	284	12	257	269
		4	296	300	10	290	300	10	290	300	20	280	300	43	257	300

STOP 0