REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

MAURICE DUMAS

Sur les tests dérivés de la loi de Kolmogorov

Revue de statistique appliquée, tome 25, n° 1 (1977), p. 35-55
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1977__25_1_35_0>

SUR LES TESTS DÉRIVÉS DE LA LOI DE KOLMOGOROV

Maurice DUMAS
Ingénieur en chef de l'artillerie navale (E. R.)

TABLE DES MATIERES

RESUME

L'auteur examine le cas du test de Kolmogorov-Smirnov, et celui du test de Lilliefors ; il formule à leur sujet quelques remarques qui le conduisent à établir différentes tables numériques, grâce auxquelles l'application de l'un et de l'autre de ces tests est rendue très simple, particulièrement en ce qui concerne le cas où la loi hypothèse est normale.

Mots-clés : **Loi de Kolmogorov. Test de Kolmogorov-Smirnov. Test de Kolmogorov-Lilliefors.**
Tests de normalité. Droite de Henry. Contrôle des fabrications.

Il établit de plus une liaison entre ces tests et la construction de Henry ; il montre que des courbes critiques, concrétisant des tests, peuvent être tracées sur un graphique de Henry, et comment l'on peut se rapprocher ainsi d'un test de normalité.

1 – INTRODUCTION ET NOTATIONS

Le test dérivé le plus directement de la loi de Kolmogorov est connu sous le nom de Test de Kolmogorov-Smirnov (Test K.S.). Il met en cause une série de n mesures x_i, avec :

$$1 \leqslant i \leqslant n \qquad x_{i-1} \leqslant x_i ,$$

à laquelle nous faisons correspondre :

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n \qquad \text{et} \qquad s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2/(n-1).$$

Le test K.S. s'applique lorsque l'on se propose de décider s'il y a lieu de rejeter l'hypothèse d'après laquelle la série de mesures proviendrait d'une certaine loi continue, entièrement déterminée ; soit F (x) la fonction de répartition de cette loi, dite loi hypothèse, ou loi H. En particulier, il s'applique au cas où H est la loi normale, entièrement déterminée par ses deux paramètres m et σ, connus ; plus particulièrement encore, il s'applique au cas où m et σ sont définis à partir de la série elle-même, au moyen des relations suivantes, mettant en cause des estimations classiques :

$$m = \overline{x} \qquad \text{et} \qquad \sigma = s. \tag{1}$$

Ce dernier cas particulier a été envisagé par MASSEY [2] puis étudié par LILLIEFORS [3] au moyen d'une méthode de Monte-Carlo ; l'aboutissement a été le test de Kolmogorov-Lilliefors (dit dans la suite : test L.) auquel sont associées des valeurs numériques inférieures, à conditions égales, à celles que le test K.S. conduirait à considérer si l'on ne tenait pas compte des coincidences que traduisent les relations (1).

Dans ce qui suit, nous nous proposons de montrer que la mise en oeuvre graphique du test K.S. peut être plus simple que si la théorie était suivie pas à pas ; de la sorte, le recours à ce test – le théorème de K. est "un des joyaux de la statistique mathématique" comme l'a écrit G. DARMOIS dans une préface [1] – pourra devenir encore plus fréquent qu'aujourd'hui.

Par voie de conséquence, la mise en oeuvre du test L. peut, elle aussi, être très simple.

En outre, nous nous proposons de relier les deux tests aux études que permet l'établissement d'une droite de Henry.

2 – LE TEST K.S. ET SON APPLICATION GRAPHIQUE

a) L'application du test K.S. suppose que l'on ait admis un risque de première espèce, soit α ce risque, et que l'on dispose d'une table donnant la valeur de la "différence" D, correspondant à n et à α. MASSEY [2] a donné une telle table ; STEPHENS [4] et [5] a donné pour D des valeurs un peu différentes des précédentes ; remarque est faite que D est indépendante du rang i des mesures prises en considération pour l'application du test.

b) Sous sa forme graphique (Fig. 1), le test K.S. revient à ceci :

– tracer la courbe de répartition de H, c'est-à-dire la courbe F(x) ;

– lire sur la table la valeur de D correspondant aux données ;

– tracer de part et d'autre de la courbe F(x) les "courbes critiques" inférieure et supérieure, déduites l'une et l'autre de la courbe F(x) par une translation d'amplitude D, parallèlement à l'axe des ordonnées ; si la graduation de cet axe n'est pas linéaire, cette "translation" déforme la courbe ;

– porter les points représentatifs des mesures de la série ; pour cela, à l'abscisse x_i, faire correspondre 2 points, d'ordonnées respectives i/n et (i – 1)/n ; il y a donc à porter 2n points, dont 1 sur chacune des ordonnées 0 et 1 ;

– rejeter l'hypothèse si même un seul des points ainsi portés se situe à l'extérieur du domaine limité par les courbes critiques.

c) Le cas particulier où H est une loi normale est examiné séparément (n° 5 et suivants).

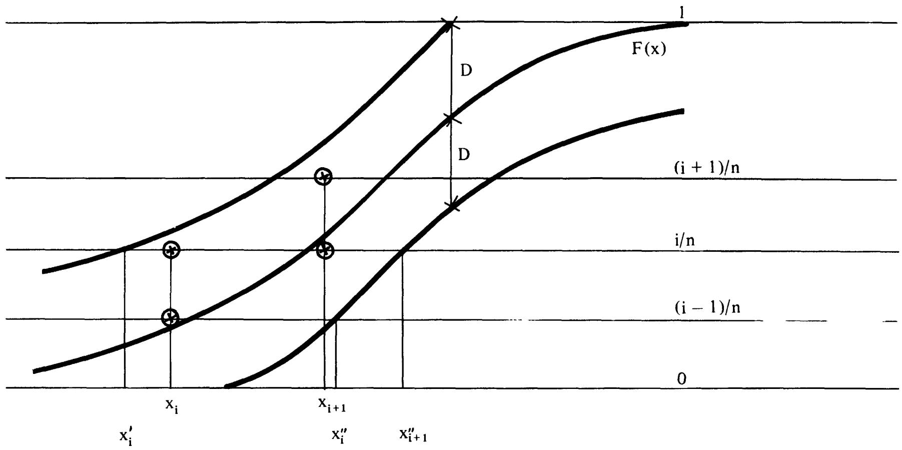

Figure 1 – Test K.S. du n° 2.

3 – REMARQUES SUR LE TEST K.S.

a) Sur la droite d'ordonnée i/n sont portés à la fois les points d'abscisses x_i et x_{i+1}.

Appelant, relativement à l'ordonnée i/n, "valeur critique inférieure (supérieure)" l'abscisse du point de rencontre de la droite d'ordonnée i/n avec la courbe critique supérieure (inférieure), il y a lieu à rejet de l'hypothèse du fait d'un point d'ordonnée i/n :

– soit si x_i est inférieure à la valeur critique inférieure, désormais désignée par x_i' ;

– soit si x_{i+1} est supérieure à la valeur critique supérieure, désormais désignée par x_{i+1}''.

N.B. – Aucun des cas $x_i > x_{i+1}''$ et $x_{i+1} < x_i'$ n'est à considérer ; en effet, par exemple, $x_i > x_{i+1}''$ entraine que sur l'ordonnée (i – 1)/n il y ait $x_i > x_i''$; d'où rejet.

b) Du fait du a ci-dessus, il y a rejet si x_i est extérieur à l'intervalle (x_i', x_i'').

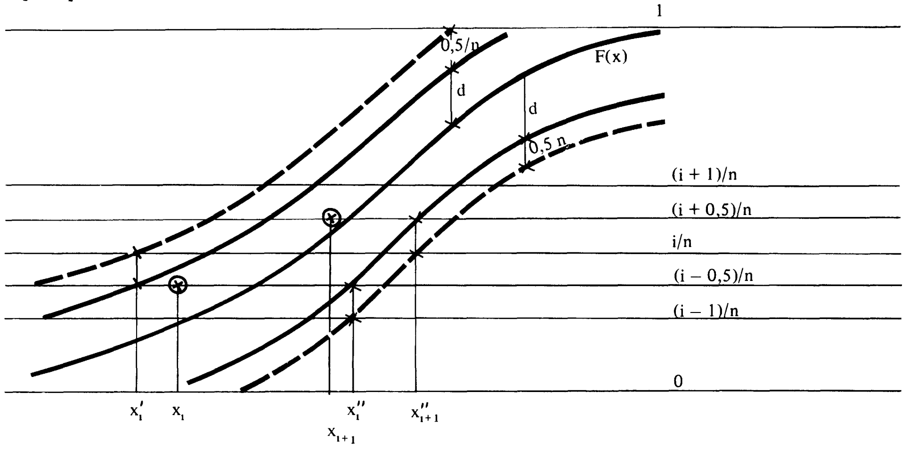

Figure 2 – Test K.S. du n° 3.

Le rapprochement des figures 1 et 2 montre que, relativement à la mesure x_i, on ne change aucunement le résultat du test si, à cette mesure x_i, l'on ne fait correspondre sur le graphique qu'un seul point (Fig. 2), au lieu de 2 points (Fig. 1), à la double condition d'une part, que ce point soit sur l'ordonnée (i – 0,5)/n, et d'autre part, que les courbes critiques soient rapprochées de la courbe F(x), de manière que leurs distances à cette courbe deviennent $\mp$ d, avec :

$$d = D - 0{,}5/n.$$

Ainsi l'application graphique du test K.S. se trouve simplifiée puisqu'il n'y a plus à porter que n points au lieu de 2n ; aucun de ces nouveaux points ne se trouve sur une ordonnée extrême.

N.B. – En rapport avec ce qui précède, les points critiques d'abscisses x_i' et x_i'', sont à placer graphiquement sur une seule et même ordonnée (c'est-à-dire l'ordonnée (i – 0,5)/n, qui est aussi celle du point d'abscisse x_i) comme sur la figure 2, et non plus l'un sur l'ordonnée i/n et l'autre sur l'ordonnée (i – 1)/n, comme sur la figure 1.

4 – APPLICATION NUMERIQUE DU TEST K.S.

Au niveau α admis, il y a lieu de rejeter l'hypothèse d'après laquelle la série de n mesures proviendrait de la loi H, si même une seule des mesures x_i se situe en dehors de l'intervalle critique (x_i', x_i'') défini indifféremment :

– d'après les considérations des numéros 2b et 3a, par :

$$F(x_i') = \frac{i}{n} - D \quad ; \quad F(x_{i+1}'') = \frac{i}{n} + D,$$

ce qui donne
$$F(x_i'') = \frac{i-1}{n} + D \; ;$$

– d'après les considérations du numéro 3b, par :

$$F(x_i') = \frac{i-0{,}5}{n} - d \; ; \; F(x_i'') = \frac{i-0{,}5}{n} + d, \quad \text{avec} \quad d = D - \frac{0{,}5}{n}.$$

L'application numérique du test K.S. est particulièrement simple si l'on utilise la table I, laquelle donne, multipliées par 1000, les valeurs de $(i - 0{,}5)/n$ et de $d = D - 0{,}5/n$, les valeurs de D ayant été celles de MASSEY [2].

La table I donne en outre, suivant trois variantes, la manière d'utiliser les quantités données, les trois variantes conduisant naturellement aux mêmes conclusions.

La variante A correspond directement à l'application graphique du test. Les variantes B et C font intervenir les quantités $\frac{i-0{,}5}{n} \mp d$, qui peuvent d'ailleurs être tabulées indépendamment de H.

La variante C convient au mieux lorsque H sert d'hypothèse à bien des reprises, car une table des valeurs critiques peut être établie une fois pour toutes.

Exemple. Soit à tester au niveau $\alpha = 0{,}20$, l'hypothèse d'après laquelle une certaine série de $n = 14$ mesures proviendrait de la loi normale réduite ; les calculs ne sont faits ici que dans le cas de la mesure $x_9 = 0{,}90$ de cette série.

La consultation d'une table de la loi normale réduite fait connaître $F(0{,}90) = 0{,}816$. Sur la table I on trouve qu'à $n = 14$ et $i = 9$ correspond $(i - 0{,}5)/n = 0{,}607$; et qu'à $n = 14$ et $\alpha = 0{,}20$ correspond $d = 0{,}238$.

Suivant la variante A, les deux valeurs critiques de $(i - 0{,}5)/n = 0{,}607$ sont :

$$0{,}816 - 0{,}238 = 0{,}578 \quad \text{et} \quad 0{,}816 + 0{,}238 > 1.$$

Suivant la variante B, les deux valeurs critiques de $F(x_i) = 0{,}816$ sont :

$$0{,}607 - 0{,}238 = 0{,}369 \quad \text{et} \quad 0{,}607 + 0{,}238 = 0{,}845.$$

Suivant la variante C, les deux valeurs critiques de $x_9 = 0{,}90$, sont x_9' et x_9'', valeurs déterminées, après exécution des calculs de la variante B, par

$F(x') = 0{,}369$ et $F(x'') = 0{,}845$; d'où :

$$x'_9 = -0{,}334 \qquad \text{et} \qquad x''_9 = 1{,}015.$$

Conclusion : D'après la seule mesure considérée, l'hypothèse ne serait pas à rejeter.

5 – CAS OU H EST UNE LOI NORMALE

Pour l'application du test K.S. au cas où H est une loi normale, on peut établir des tables grâce auxquelles cette application est encore plus directe qu'avec la table I. A cette particularité s'ajoute le fait déjà signalé plus haut (n° 1) de l'existence du test L.

Remarque étant faite que les tests K.S. et L. ne sont pas des tests de normalité, et que leur application implique que les paramètres m et σ de H soient bien déterminés, nous sommes amené à distinguer plusieurs cas.

Dans le cas I, m et σ n'ont aucunement été tirés de la série de n mesures considérée ; c'est le cas par exemple où l'on se propose de comparer cette série à ce qui peut être attendu d'une loi normale (la loi H) sur laquelle l'attention a été attirée par des raisonnements ou des expériences antérieures.

Dans les cas II et III, m et σ ont été tirés de la série considérée, parce que l'on se propose de résumer cette série par seulement deux valeurs numériques, caractérisant respectivement moyenne et dispersion des mesures ; ce que l'on demande alors au test, c'est de faire apparaître s'il serait déraisonnable de s'en tenir à un résumé aussi simple que celui envisagé. Bien entendu, ce résumé devrait inclure également la valeur de n, en l'absence de laquelle ce résumé n'aurait aucune valeur pratique.

6 – CAS I : LA LOI NORMALE H, BIEN DETERMINEE, EST QUELCONQUE ;

en particulier, les paramètres m et σ de H ont été déterminés indépendamment de la série de mesures.

Le cas où m et σ sont quelconques se ramène au cas $m = 0$ et $\sigma = 1$ (cas de la loi normale réduite) en remplaçant chaque x_i par sa valeur réduite $(x_i - m)/\sigma$.

A partir d'une table F(u) de la loi normale réduite, on calcule les valeurs critiques u'_i et u''_i par application de la variante C de la Table I ; les relations sont donc :

$$F(u) = \frac{i - 0{,}5}{n} \pm d \qquad \text{avec} \qquad d = D - \frac{0{,}5}{n},$$

u étant positif ou négatif suivant que F(u) est supérieur ou inférieur à 0,50 ; leur application a donné les valeurs des colonnes K de la Table II. Ainsi, reprenant l'exemple numérique du numéro 4, traité suivant la variante C, les valeurs critiques (soit $-0,334$ et $1,015$) figurent directement dans la colonne K20, pour $n = 14$ et $i = 9$ de la table II.

Remarque. Ce qui précède montre que, pour n donné, on peut, avant tout calcul, tracer sur un papier à échelle fonctionnelle loi normale, les courbes critiques définies par les u_i' et u_i'', pour les différentes valeurs de α que l'on envisage d'utiliser. De la sorte, après calcul des valeurs réduites $(x_i - m)/\sigma$, le test K.S. s'applique graphiquement de façon très simple. Bien entendu, le point correspondant à x_i est à porter sur l'ordonnée $(i - 0,5)/n$.

7 – CAS II : LES PARAMETRES DE LA LOI NORMALE H SONT DETERMINES PAR $m = \bar{x}$ ET $\sigma = s$.

a) Le cas où H est déterminé en fonction de la série de mesures par les égalités $m = \bar{x}$ et $\sigma = s$, est celui où le test L, présenté au n° 1, peut être substitué au test K.S., avantageusement de différents points de vue. Tout ce qui a été dit relativement au test K.S. s'applique au test L. ; il y a seulement à utiliser les différences, soit D_L, tabulées par LILLIEFORS [3], à la place des différences D dites plus haut. En particulier, les nouvelles valeurs critiques v_i' et v_i'' sont définies par

$$F(v) = \frac{i - 0,5}{n} \pm \left(D_L - \frac{0,5}{n}\right) .$$

Il y a donc lieu de remplacer dans la table II, les u_i' et u_i'' des colonnes K, par les v_i' et v_i'' des colonnes L. La remarque du n° 6 reste valable, sous réserve que ce même remplacement soit effectué.

Il est à noter que, les valeurs D_L ayant été obtenues par une méthode de Monte-Carlo, il est téméraire de s'en servir dans des conditions qui ne sont pas en accord avec celles des essais de l'auteur.

b) Le cas II peut être traité graphiquement : voir d) du n° suivant.

8 – CAS III : LES PARAMETRES m ET σ DE LA LOI H ONT ETE DETERMINES PAR UNE DROITE DE HENRY

Remarque liminaire. Le cas III, puisqu'il ne se confond pas avec le seul cas (cas II) où le test L. est applicable, doit être traité au moyen des valeurs du test K.S. ; mais on peut espérer qu'une future expérimentation permettra de rapprocher pour le cas II, le test K.S. du test L. (voir, au n° 10, la remarque au sujet de [2] MASSEY) ; l'on pourrait donc être tenté, toujours pour le cas III, de se référer au test L., mais des précautions seraient alors à prendre (paragraphe c) ci-dessous).

a) Le cas où H est déterminée par une droite de HENRY construite d'après la série de n mesures, est particulièrement intéressant étant donné que, à notre avis, une étude sur le graphique de HENRY et un recours au test de K.S. (ou L), sont deux opérations qui se complètent heureusement l'une l'autre. Développer ce point serait sortir du cadre de la présente note ; il y a seulement lieu de remarquer ceci :

1) Sur un graphique de HENRY, il est possible de reporter de part et d'autre de la droite, retenue comme compensant au mieux les mesures de la série, (droite de HENRY), les valeurs critiques des mesures x_i, calculées à l'aide, par exemple, de la table II ; comme à ces valeurs critiques sont associés des risques α bien déterminés, l'ensemble constitue un véritable test, aussi complet qu'il peut être désiré, et intéressant à connaître même si, dans l'état actuel des choses, il se présente comme étant peu puissant. Pour le moins, on obtient par le tracé des lignes joignant les points critiques, une précieuse indication visuelle sur les écarts pouvant exister, sans que cela soit surprenant, entre les points expérimentaux et la droite de HENRY correspondante ; une indication différente, mais répondant à la même préoccupation, a été mentionnée dans [6], sous la désignation de "Lignes L 25 et L 75".

2) Le graphique de HENRY est valablement établi si l'on adopte $(i - 0{,}5)/n$ comme estimation de la fréquence cumulée de x_i ; lorsqu'il en est ainsi, les points critiques de x_i se placent (N.B. du n° 3b) sur la même ordonnée (soit : $(i - 0{,}5)/n$) que le point x_i lui-même.

Il est à noter que, pour l'établissement d'un graphique de HENRY :

– d'une part, la table I donne les valeurs de $(i - 0{,}5)/n$, qui sont utiles en cas d'emploi d'un papier à échelle fonctionnelle, loi normale ;

– d'autre part, la table II, dans sa dernière colonne, donne u_i d'après $F(u_i) = (i - 0{,}5)/n$ pour i supérieur à 0,5 n ; en utilisant convenablement cette dernière valeur, on se libère de la sujétion d'avoir recours à un papier à échelle fonctionnelle, loi normale, et l'on peut opérer sur une simple feuille de papier quadrillé.

En outre, l'utilisation des ordonnées $(i - 0{,}5)/n$ et du papier quadrillé peut être faite à l'aide de tables existantes [6].

3) Si pour l'étude en cause l'on adopte non pas l'estimation $(i - 0{,}5)/n$, mais i/n, ou $i/(n + 1)$ ou etc, l'étude n'en sera pas modifiée, à condition que les valeurs critiques de x_i soient bien portées sur la même ordonnée que x_i.

b) Puisque la série de mesures a fait l'objet d'une étude graphique, à savoir celle qui a conduit à la droite de HENRY dont les paramètres m et σ ont été retenus, il est tout naturel d'appliquer le test K.S. sous sa forme graphique, particulièrement expressive. Pour cela :

– calculer les quantités $m + u_i'\sigma$ et $m + u_i''\sigma$;

– porter les points ayant ces quantités pour abscisses sur la même ordonnée que le point d'abscisse x_i ;

– rejeter l'hypothèse si même un seul des points d'abscisse x_i se situe hors de l'intervalle des deux points de même ordonnée.

Remarque. Il n'est pas toujours nécessaire de calculer en totalité les $m + u\sigma$ qui sont au nombre de 2n. En effet, les points correspondant à ces quantités se situent sur deux courbes dont l'allure générale est simple ; cette allure est celle des courbes tracées sur la figure 3, comme elle est aussi celle des courbes L25 et L75, citées en a) ci-dessus. Il suffit donc pratiquement d'opérer ainsi :

– calculer les $m + u\sigma$ seulement pour trois valeurs de i, voisines respectivement de 0 (i petit), de 0,5 n et de n ;

– porter sur le graphique les 6 points correspondant à ces trois valeurs ;

– tracer les courbes passant par ces points et ayant comme allure générale, celle dite plus haut ;

– conclure immédiatement ou bien, s'il y a doute, repérer les valeurs de i pour lesquelles le point x_i se situe trop près d'une courbe pour que l'on ait pu conclure, puis calculer les $m + u\sigma$ qui renseigneront sur ce point, et conclure.

i	x_i	Courbe I	Courbe S
$i \leqslant 0,5$ n		$1500 - 425\, v'_i$	$1500 - 425\, v''_i$
1	925	1165	»
2	1053	1295	»
3	1127	1409	917
4	1276	1516	1119
5	1345	1624	1259
$i > 0,5$ n		$1500 + 425\, v''_i$	$1500 + 425\, v'_i$
6	1430	1741	1376
7	1857	1881	1484
8	1925	2083	1591
9	2028	»	1705
10	2034	»	1835

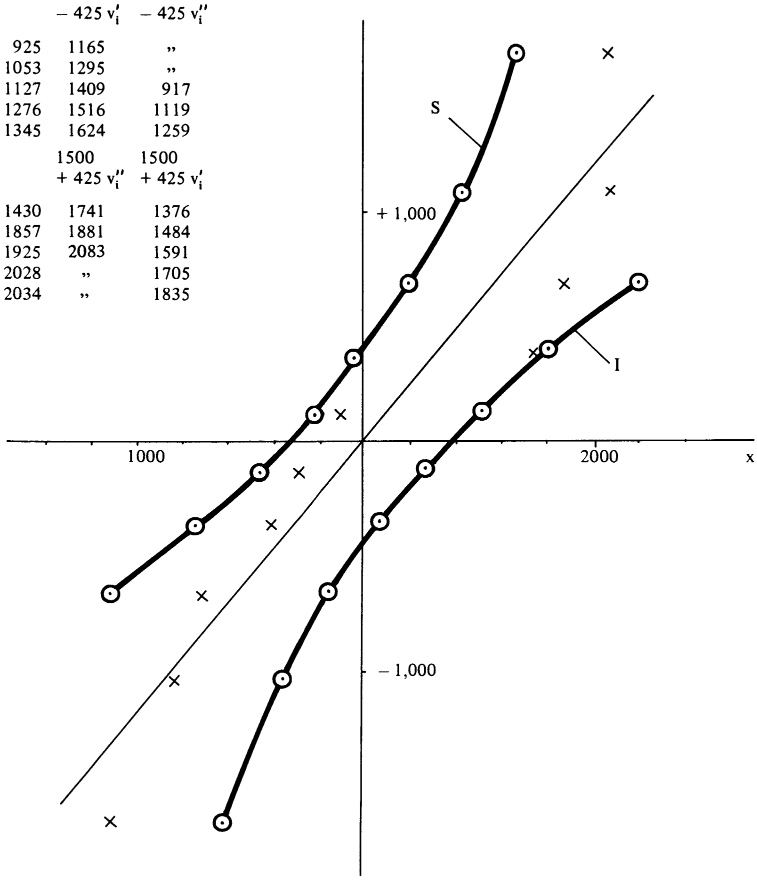

Figure 3 (Exemple du n° 9) – Graphique de HENRY et points critiques du test de LILLIEFORS, pour $\alpha = 0,200$

× points expérimentaux

⊙ points critiques correspondants.

c) Dans la construction ci-dessus on s'en est tenu strictement au test K.S., puisque l'on a eu recours (table II) aux u et non pas aux v du test L ; si l'on choisit de se référer au test L, on peut opérer exactement comme plus haut, sauf à remplacer les u par les v, et seulement à la condition d'avoir l'attention attirée sur ce qu'en agissant de la sorte, on s'expose à une sévérité accrue c'est-à-dire à être amené à rejeter l'hypothèse – ou encore (n° 5) à être incité à ne pas résumer la série de n mesures par seulement les m et σ déduits de la droite de HENRY tracée – plus souvent que si l'on s'en était tenu strictement au test K.S.

d) Le cas II peut être traité graphiquement dans les mêmes conditions que le cas III, mais en utilisant valablement les v de la table II au lieu des u ; c'est d'ailleurs ce qui est fait au n° 9.

e) A supposer que la double étude sur un graphique de HENRY conduise à rejeter les hypothèses correspondant respectivement au cas II et au cas III, on est conduit à penser que la série de mesures n'appartient ni à la loi normale définie par les estimations sans biais de ses paramètres, ni à la loi normale que le graphique de HENRY a fait apparaître comme cadrant "au mieux" avec les mesures. Il semble donc que cette double étude, sans qu'elle puisse être considérée en toute rigueur comme constituant un test de normalité, est bien près de mériter cependant d'être considérée comme tel.

9 – EXEMPLE TIRE D'UNE ETUDE TECHNIQUE

a) Position du problème

La série de n = 10 mesures reproduite sur la figure 3 représente les durées de vie de lampes à incandescence d'un même modèle, provenant d'un même atelier, ou, plus exactement, de lampes que l'on ne sait distinguer l'une de l'autre par aucun détail technique de leur élaboration, ou encore, de lampes appartenant à un même lot technique. Le problème technique qui se pose est de déterminer ce que l'on peut valablement retenir de la série de mesures, et notamment si l'on est incité par cette dernière à agir sur le processus de fabrication.

Nous avançons que toute étude du genre de celle-ci, doit commencer par l'établissement d'un graphique de HENRY ; elle peut être poursuivie comme il est indiqué plus loin.

b) Graphique de HENRY

Se reporter à la case n = 10 de la table II, puis, disposant d'un simple papier quadrillé, faire choix d'échelles linéaires convenables, à la fois pour les durées de vie (axe des x) et pour les u_i de la table II.

Porter sur le graphique les 10 points représentatifs des mesures, points marqués d'une croix sur la figure 3. L'ordonnée de x_i correspond à $(i - 0{,}5)/n$.

Aucune droite de HENRY n'est tracée, étant donné que les points venant d'être portés apparaissent comme ne pouvant pas être bien compensés par une droite ; il se trouve même que la disposition d'ensemble de ces points donne à penser que, peut-être, la série étudiée résulte d'un mélange de deux séries d'origines différentes. Finalement, il apparaît comme particulièrement intéressant de soumettre la série donnée à différents tests, avant de conclure.

c) Tests divers

1) *Test K.S.* Comme aucune droite de HENRY n'a été tracée, on ne dispose pas de valeurs de m et σ, nécessaires pour appliquer le test en cause.

2) *Test L., forme numérique.* Un calcul donne :

$$\overline{x} = 1500 \qquad \text{et} \qquad s^2 = 1620500/9 = 425^2.$$

Il y a lieu de se référer aux colonnes L et à la case n = 10 de la table II, puis, pour toutes les valeurs de i, de calculer les valeurs critiques de x_i et de les comparer à x_i.

Ainsi, pour i = 5 et pour $\alpha = 0,20$, les valeurs critiques de $x_5 = 1345$ sont :

$$1500 - 0,568 \times 425 = 1259 \quad \text{et} \quad 1500 + 0,292 \times 425 = 1624.$$

Finalement, aucune valeur x_i ne conduit à rejeter l'hypothèse soumise au test.

Remarque : Si l'on avait complété les calculs ci-dessus, par celui des valeurs réduites $(x_i - \overline{x})/s$, on aurait eu à comparer directement ces valeurs aux v_i' et v_i'' de la table II.

Ainsi, pour i = 5, la valeur réduite est (1345 – 1500)/425, soit – 0,365, valeur qui se trouve être comprise entre – 0,568 et 0,292.

3) *Test L., forme graphique. Construction préliminaire* : Sur la figure 3 porter :

– d'une part, la droite définie par les valeurs m = 1500 et $\sigma = 425$;

– d'autre part, tous les points représentatifs des valeurs critiques, calculées comme il est dit à propos du test L, forme numérique ;

– puis tracer les deux courbes réunissant ces points entre eux : ce sont les courbes critiques.

Cette construction préliminaire ne fait pas partie du test L. exposé ici ; son but est de faire apparaître quelle est véritablement l'allure générale de ces courbes et leurs positions par rapport à la droite représentative de la loi normale en cause dans le test.

Test. Calculer comme plus haut, les valeurs critiques correspondant seulement à trois valeurs de i, à savoir 2, puis 5 et 9 ;

– porter sur le graphique de HENRY les six points critiques correspondants ;

– tracer approximativement les deux courbes critiques, sachant qu'elles passent par les points critiques, et qu'elles ont pour allure générale, celle que l'on connaît, attendu que l'allure générale des courbes critiques tracées sur la figure 3 au cours de la construction préliminaire, est valable en toute circonstance ;

– reconnaître que les courbes critiques tracées approximativement, contiennent entre elles tous les points x_i, sauf peut-être, avec les données de l'exemple traité, ceux correspondant à x_6 (éventuellement, trop faible) et à x_7 (éventuellement trop fort) ;

– élucider ce dernier point par les calculs de $1500 - 425\ u'_6$ et de $1500 + 425\ u''_7$.

Ainsi dans le cas présent, le nombre des calculs nécessaires a été de 8, au lieu de 20 calculs du test L, forme numérique ; la différence aurait été encore plus grande si n avait été supérieur à 10.

4) *Test de SHAPIRO et WILK.* Les calculs, non détaillés ici, conduisent à :

$$W = 0{,}894.$$

Les valeurs critiques de W aux niveaux tabulés (soit $\alpha = 0{,}01 - 0{,}02 - 0{,}05 - 0{,}10$ et 0,50) permettent de situer 0,894 au voisinage de 0,20.

d) Discussion statistique

Le graphique de HENRY a fourni les enseignements dits plus haut (n° 9b).

Le test L ne conduit pas à rejeter l'hypothèse de base de ce test, et cela, même au niveau $\alpha = 0{,}20$, qui est un niveau sévère en ce sens qu'il entraine des rejets d'hypothèse bien plus fréquents que les niveaux 0,05 et surtout 0,01.

Le test de normalité de SHAPIRO et WILK conduit au même résultat général que le test L.

e) Discussion technique

D'une façon générale, hypothèse est faite qu'une fabrication bien réglée donne lieu à une distribution normale des mesures, et qu'en cas de distribution normale, la fabrication apparaît comme d'autant mieux réglée que la dispersion de cette distribution est plus faible. En conséquence, le fait qu'une distribution soit considérée comme normale ne fournit au technicien aucune indication, si ce n'est qu'elle lui donne confiance dans le processus suivi ; mais il lui reste toujours à continuer son étude en vue de réduire la dispersion des mesures.

Ainsi, dans les conditions de l'exemple traité, le technicien n'est pas incité par les tests à intervenir dans le processus d'élaboration du produit. Mais il a l'attention attirée par le graphique de HENRY – que, s'il possède quelques notions élémentaires de statistique, il a été capable de construire lui-même sur une feuille de papier quadrillé, puis d'interpréter – sur l'éventualité d'un trouble équivalant à un mélange de deux fabrications ; réfléchissant sur cette indication, il se dit que l'effectif n = 10 de la série dont il a disposé, est bien trop faible pour renseigner sur un mélange éventuel.

Finalement, ou bien ce technicien est en période d'essais, et il fera en sorte d'effectuer de nouvelles mesures sur un échantillon de grand effectif ; ou bien, la fabrication étant en cours, il portera particulièrement son attention sur tout ce qui pourrait confirmer ou infirmer l'indication donnée par le graphique de HENRY. De toute façon, jusqu'à plus ample informé, il évitera de considérer que les valeurs $\overline{x} = 1500$ et $s = 425$, qui, associées à $n = 10$, résument la série par deux estimations sans biais, résument valablement la fabrication.

10 – BIBLIOGRAPHIE

[1] DUGUE D. – Traité de statistique théorique et appliquée. Masson. Ouvrage visé au n° 1.

[2] MASSEY F.J.Jr. – The KOLMOGOROV-SMIRNOV test for goodness of fit. *Am. Statistical Ass. Journal* - 1951, pp. 68-78.
Note contenant une table pouvant servir à prolonger la table I pour $n = 1$ - 2 et 3, et pour $n = 25$ - 30 et 35.

Les notations étant dans ce qui suit celles de notre texte, MASSEY note que l'on doit s'attendre à ce que l'ajustement de m et de σ aux valeurs correspondantes de l'échantillon, "soit par calcul, soit par ajustement visuel à une ligne droite sur un papier à échelle fonctionnelle" ait pour conséquence une réduction de $D_{n,\alpha}$; il appuie cela par une expérience de Monte Carlo ayant comporté le tirage de 100 distributions de chacune 10 valeurs d'une population normale ; chaque distribution a été représentée sur un papier à échelle fonctionnelle, et une droite a été tracée au mieux ; parmi les résultats de l'expérience figure notamment ceci que seulement une observation, sur 100, dépassa le point critique de $\alpha = 0{,}20$, d'après le D du test K.S. D'autres résultats sont rappelés par FERIGNAC dans [8].

Remarque. Des deux cas envisagés par MASSEY, l'ajustement par calcul a été développé par LILLIEFORS, tandis que l'ajustement visuel –c'est-à-dire l'ajustement par droite de HENRY– reste à traiter plus complètement qu'il ne l'a été par les 100 distributions de MASSEY. Pour ce faire, l'opérateur aura à éliminer des droites qui, même si elles compensent "au mieux" les points expérimentaux, les compense en fait "très mal". L'opérateur aura donc à se fixer une règle pratique d'élimination ; naturellement, les valeurs des différences retenues finalement pour remplacer dans le cas particulier étudié, les D de K.S., ne seront valables que dans le cadre de la dite règle, explicitement énoncée, règle qui, dans ces conditions, peut être relativement arbitraire.

[3] LILLIEFORS H.W. – On the KOLMOGOROV-SMIRNOV test for normality with mean and variance unknown. *Am. Statistical Ass. Journal* - 1967, pp. 393-402.
Note contenant une table pouvant servir à compléter les colonnes L de la table II pour les valeurs $\alpha = 0{,}10$ et 0,15.

[4] STEPHENS M.A. – Use of the KOLMOGOROV-SMIRNOV, Cramér-von Mises and related statistics without extensive tables. *Journal of the Royal Statistical Society*. Série B. 32 - 1970 pp. 115-122.
Note indiquant pour D (test de KOLMOGOROV-SMIRNOV) et pour D_L (test de LILLIEFORS) des valeurs qui auraient pu servir à l'établissement des tables I et II, sauf pour $\alpha = 0{,}20$; et au prolongement de ces tables pour $\alpha = 0{,}025$.

[5] PEARSON E.S. and HARTLEY H. – Biometrika Tables for Statisticians. Vol. 2. 1972. Cambridge University Press.
Ouvrage reproduisant dans sa table 54 les résultats de STEPHENS.

[6] DUMAS M. – Les épreuves sur échantillon. 1955 ; Centre national de la recherche scientifique.

Ouvrage visé au n° 8a et 8b, en raison des figures A et B de son n° 403 ; ces figures sont d'ailleurs les reproductions des figures a et b du n° 42 de l'ouvrage : M. DUMAS et P. MAHEU, Les méthodes statistiques et . . . , publié par le Mémorial de l'Artillerie Française, dans ses fascicules de 1948 - 1949 et 1950.

[7] MORICE E. – Tests de normalité d'une distribution observée. *Revue de Statistique Appliquée.* 1972. Vol. XX n° 2.
En particulier : exposé du test L. et table de quelques valeurs relatives à ce test.

[8] FERIGNAC P. – Test de KOLMOGOROV-SMIRNOV. *Revue de Statistique Appliquée.* Vol. X, n° 4, p. 13 à 32.
Ouvrage cité plus haut, à propos de MASSEY [2].

Table I. Test de KOLMOGOROV-SMIRNOV

MODE D'EMPLOI

Données. $x_1\ x_2, \ldots\ x_i\ \ldots\ x_n$: série de n mesures, ordonnées $x_{i-1} \leqslant x_i$;

α : risque de première espèce, admis ;

$F(x)$: fonction de répartition, continue, de la loi hypothèse H.

Objectif. Décider s'il convient de rejeter l'hypothèse d'après laquelle la série de mesures appartiendrait à la loi H.

Processus. Opérer ainsi qu'il suit pour chaque valeur de i :

– dans la rubrique n, lire sur la ligne i la valeur de $(i - 0{,}5)/n$, et sur la ligne α, la valeur de la différence d ;
N.B. : *les valeurs indiquées sont à diviser par 1000.*

– faire choix de l'une des variantes suivantes :

Variante A. déterminer $F(x_i)$, puis retenir comme valeurs critiques de $(i - 0{,}5)/n$ les valeurs $F(x_i) \pm d$.

Variante B. déterminer $F(x_i)$, puis retenir comme valeurs critiques de $F(x_i)$ les valeurs $(i - 0{,}5)/n \pm d$.

Variante C. retenir comme valeurs critiques de x_i, les quantités x_i' et x_i'', solutions de $F(x) = (i - 0{,}5)/n \pm d$.

Décision. Rejeter l'hypothèse, même si pour une seule valeur de i, il y a dépassement des valeurs critiques indiquées par la variante adoptée.

Table de (i – 0,5)/n, puis table de la différence d(α , n)*

i	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10
n 1	875 125	900 100	917 83	929 71	938 62	945 55	950 50
n-1 2	625 375	700 300	750 250	786 214	812 188	833 167	850 150
n-2 3		500	583 417	643 357	687 313	722 278	750 250
n-3 4				500	562 438	611 389	650 350
n-4 5						500	550 450
α = 0,01	608	569	535	506	481	458	440
α = 0,05	499	465	438	415	395	376	360
α = 0,10	439	410	387	367	349	332	318
α = 0,15	400	374	353	334	319	304	292
α = 0,20	369	346	327	310	296	283	272

i	n = 11	n = 12	n = 13	n = 14	n = 15	n = 16	n = 17
n 1	955 45	958 42	962 38	964 36	967 33	969 31	971 29
n-1 2	864 136	875 125	885 115	893 107	900 100	906 94	912 88
n-2 3	773 227	792 208	808 192	821 179	834 166	843 157	854 146
n-3 4	682 318	709 291	731 269	750 250	767 233	781 219	795 205
n-4 5	591 409	625 375	654 346	678 322	700 300	718 282	736 264
n-5 6	500	542 458	577 423	607 393	634 366	656 344	677 323
n-6 7			500	531 469	567 433	593 407	618 382
n-7 8					500	531 469	559 441
n-8 9							500
α = 0,01	423	408	395	382	371	361	352
α = 0,05	346	333	323	313	305	297	289
α = 0,10	307	296	287	278	271	264	257
α = 0,15	281	271	264	256	250	243	237
α = 0,20	262	253	246	238	233	227	221

i	n = 18	n = 19	n = 20
n 1	972 28	974 26	975 25
n-1 2	917 83	922 78	925 75
n-2 3	861 139	869 131	875 125
n-3 4	806 194	816 184	825 175
n-4 5	750 250	764 236	775 225
n-5 6	695 305	711 289	725 275
n-6 7	639 361	658 342	675 325
n-7 8	584 416	606 394	625 375
n-8 9	528 472	553 447	575 425
n-9 10		500	525 475
α = 0,01	343	337	331
α = 0,05	281	275	269
α = 0,10	250	246	239
α = 0,15	231	226	221
α = 0,20	216	211	206

$n > 35$

Valeurs de d :

		soit pour n = 20
$\alpha = 0{,}01$	$\dfrac{1{,}63}{\sqrt{n}} - \dfrac{0{,}5}{n}$	339
$\alpha = 0{,}05$	$\dfrac{1{,}36}{\sqrt{n}} - \dfrac{0{,}5}{n}$	279
$\alpha = 0{,}10$	$\dfrac{1{,}22}{\sqrt{n}} - \dfrac{0{,}5}{n}$	248
$\alpha = 0{,}15$	$\dfrac{1{,}14}{\sqrt{n}} - \dfrac{0{,}5}{n}$	227
$\alpha = 0{,}20$	$\dfrac{1{,}07}{\sqrt{n}} - \dfrac{0{,}5}{n}$	214

$20 < n < 36$

Appliquer les formules approximatives ci-dessus, puis réduire la valeur trouvée d'environ 0,5 (36 – n)

* d = D – 0,5/n, avec pour D les valeurs lues sur la table de MASSEY [2].

Table II. Tests en cas de loi H normale

MODE D'EMPLOI

Données. $x_1\ x_2, \ldots x_i \ldots x_n$: série de n mesures, ordonnées $x_{i-1} \leqslant x_i$;

α : risque de première espèce, admis :

Objectif. Décider s'il convient de rejeter l'hypothèse d'après laquelle la série de mesures appartiendrait à une certaine loi normale.

Processus. Opérer ainsi qu'il suit pour chaque valeur de i :

a) Cas où la loi hypothèse est une loi normale entièrement déterminée (m et σ spécifiés), et où par suite il y a lieu d'appliquer le test de KOLMOGOROV-SMIRNOV.

– dans la rubrique n, lire sur la ligne i les u_i' et u_i'' des colonnes K intéressées :

– retenir comme valeurs critiques de x_i :

si $i > 0,5\ n$ $\quad m + u_i'\sigma$ et $m + u_i''\sigma$;

si $i \leqslant 0,5\ n$ $\quad m - u_i'\sigma$ et $m - u_i''\sigma$.

b) Cas où la loi normale, hypothèse, n'est pas déterminée (m et σ non spécifiés), et où par suite il est justifié d'appliquer le test de LILLIEFORS :

– calculer les quantités $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$ et $s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2/(n-1)$,

– dans la rubrique n, lire sur la ligne i les v_i' et v_i'' des colonnes L intéressées ;

– retenir comme valeurs critiques de x_i :

si $i > 0,5\ n$ $\quad \overline{x} + v_i' \,.\, s$ et $\overline{x} + v_i'' \,.\, s$

si $i \leqslant 0,5\ n$ $\quad \overline{x} - v_i' \,.\, s$ et $\overline{x} - v_i'' \,.\, s$.

N.B. – *Les valeurs indiquées pour les u et les v, sont à diviser par 1000.*

Décision. Rejeter l'hypothèse, même si pour une seule valeur de i, il y a dépassement des valeurs critiques.

Table donnant :

– Colonnes K : u_i' et u_i'' (test de KOLMOGOROV-SMIRNOV),

– Colonnes L : v_i' et v_i'' (test de KOLMOGOROV-LILLIEFORS),

– Dernière colonne : u_i pour $i > 0,5$ n (2ᵉ du n° 8a)
(Pour $i \leqslant 0,5$ n, changer le signe de u_i)

Table II

n	i	$\alpha = 0{,}01$ K 1	$= 0{,}05$ K 5	$= 0{,}20$ K 20	$= 0{,}20$ K 20	$= 0{,}05$ K 5	$= 0{,}01$ K 1	$\alpha = 0{,}01$ L 1	$= 0{,}05$ L 5	$= 0{,}20$ L 20	$= 0{,}20$ L 20	$= 0{,}05$ L 5	$= 0{,}01$ L 1	u_i
4	1	– 622	– 316	15	,,	,,	,,	210	303	524	,,	,,	,,	1150
3	2	– 2120	– 1146	– 656	2512	,,	,,	– 432	– 334	– 126	842	1180	1385	319
5	1	– 437	– 164	136	,,	,,	,,	240	421	568	,,	,,	,,	1282
4	2	– 1122	– 722	– 374	,,	,,	,,	– 266	– 93	38	1200	1530	,,	524
3		,,	– 1812	– 1019	1019	1812	,,	– 860	– 634	– 482	482	634	860	0
6	1	– 300	– 53	228	,,	,,	,,	348	470	628	,,	,,	,,	1385
5	2	– 789	– 490	– 194	,,	,,	,,	– 78	35	171	1491	2197	,,	674
4	3	– 1665	– 1058	– 656	1341	,,	,,	– 519	– 393	– 251	722	912	1098	210
7	1	– 194	35	303	,,	,,	,,	391	524	684	,,	,,	,,	1468
6	2	– 583	– 329	– 60	,,	,,	,,	23	143	279	1774	,,	,,	793
5	3	– 1094	– 745	– 432	1675	,,	,,	– 342	– 217	– 83	912	1136	1405	366
4		,,	– 1372	– 878	878	1372	,,	– 762	– 610	– 456	456	610	762	0
8	1	– 108	108	364	,,	,,	,,	437	568	729	,,	,,	,,	1538
7	2	– 437	– 210	40	,,	,,	,,	108	225	361	2120	,,	,,	885
6	3	– 820	– 548	– 277	2120	,,	,,	– 207	– 90	40	1071	1341	1706	487
5	4	– 1398	– 966	– 625	1071	1717	,,	– 545	– 415	– 277	622	789	958	156
9	1	– 33	174	418	,,	,,	,,	496	613	766	,,	,,	,,	1598
8	2	– 319	– 108	126	,,	,,	,,	197	300	429	,,	,,	,,	966
7	3	– 631	– 396	– 154	,,	,,	,,	– 83	17	138	1221	1530	1995	589
6	4	– 1024	– 722	– 445	1248	2226	,,	– 369	– 264	– 141	766	938	1108	282
5		– 1728	– 1155	– 782	782	1155	1728	– 690	– 568	– 432	432	568	690	0

n	i	α = 0,01 K 1	= 0,05 K 5	= 0,20 K 20	= 0,20 K 20	= 0,05 K 5	= 0,01 K 1	α = 0,01 L 1	= 0,05 L 5	= 0,20 L 20	= 0,20 L 20	= 0,05 L 5	= 0,01 L 1	u_i
10	1	25	228	462	”	”	”	542	650	789	”	”	”	1645
9	2	– 228	– 25	197	”	”	”	269	364	482	”	”	”	1036
8	3	– 496	– 279	– 55	”	”	”	15	106	215	1372	1728	2512	674
7	4	– 806	– 553	– 311	1419	”	”	– 238	– 146	– 38	896	1071	1248	385
6	5	– 1226	– 878	– 589	923	1341	2326	– 507	– 407	– 292	568	700	820	126
11	1	80	277	504	”	”	”	571	678	820	”	”	”	1695
10	2	– 148	45	258	”	”	”	319	412	533	”	”	”	1098
9	3	– 385	– 184	28	”	”	”	85	174	284	1498	1995	”	749
8	4	– 646	– 423	– 202	1589	”	”	– 143	– 55	53	1007	1206	1412	473
7	5	– 962	– 690	– 443	1049	1530	”	– 380	– 287	– 176	681	824	954	230
6		– 1426	– 1019	– 713	713	1019	1426	– 640	– 536	– 415	415	536	640	0
12	1	126	319	539	”	”	”	598	700	845	”	”	”	1728
11	2	– 83	106	311	”	”	”	364	454	577	”	”	”	1150
10	3	– 295	– 103	98	”	”	”	148	233	345	1635	2409	”	813
9	4	– 522	– 316	– 110	1774	”	”	– 60	23	131	1108	1335	1572	550
8	5	– 782	– 548	– 327	1165	1728	”	– 274	– 189	– 80	779	935	1071	319
7	6	– 1108	– 810	– 556	824	1150	1645	– 499	– 407	– 292	522	650	755	106
13	1	169	356	571	”	”	”	619	726	878	”	”	”	1774
12	2	– 25	156	356	”	”	”	399	493	622	”	”	”	1200
11	3	– 220	– 38	156	”	”	”	197	284	402	1751	”	”	870
10	4	– 423	– 233	– 38	1995	”	”	2	88	199	1190	1454	1762	616
9	5	– 646	– 437	– 233	1282	1995	”	– 192	– 106	5	863	1036	1195	396
8	6	– 908	– 662	– 437	927	1282	1911	– 393	– 303	– 189	610	749	867	194
7		– 1254	– 927	– 662	662	927	1254	– 613	– 513	– 391	391	513	613	0
14	1	207	388	601	”	”	”	640	749	904	”	”	”	1799
13	2	28	202	399	”	”	”	434	530	662	”	”	”	1243
12	3	– 154	20	210	”	”	”	243	332	451	1852	”	”	919
11	3	– 337	– 159	30	2257	”	”	63	148	261	1265	1563	1960	674
10	5	– 536	– 345	– 151	1379	2366	”	– 118	– 33	78	935	1122	1299	462
9	6	– 755	– 542	– 334	1015	1405	2290	– 300	– 212	– 100	687	834	962	272
8	7	– 1019	– 762	– 530	752	1032	1392	– 493	– 399	– 282	476	604	710	90

15	1	243	418	625	”	”	”	653	772	927	”	”	”	1838
14	2	73	240	432	”	”	”	456	562	694	”	”	”	1282
13	3	– 93	73	256	”	”	”	279	377	496	2014	”	”	970
12	4	– 264	– 95	85	”	”	”	108	202	313	1347	1685	2366	729
11	5	– 443	– 266	– 83	1498	”	”	– 60	33	141	1011	1211	1432	524
10	6	– 634	– 443	– 251	1112	1546	”	– 228	– 133	– 25	766	919	1071	342
9	7	– 856	– 637	– 429	842	1136	1538	– 404	– 305	– 194	556	687	810	169
8		– 1131	– 860	– 622	622	860	1131	– 595	– 487	– 369	369	487	595	0
16	1	274	445	650	”	”	”	674	796	942	”	”	”	1866
15	2	113	277	465	”	”	”	487	595	719	”	”	”	1316
14	3	– 45	116	295	”	”	”	316	415	527	2170	”	”	1007
13	4	– 202	– 40	136	”	”	”	156	251	356	1426	1787	3090	776
12	5	– 366	– 199	– 23	1598	”	”	– 2	90	192	1080	1282	1530	577
11	6	– 539	– 361	– 179	1190	1675	”	– 159	– 65	35	834	986	1150	402
10	7	– 732	– 536	– 342	915	1226	1685	– 321	– 225	– 123	628	755	885	235
9	8	– 954	– 726	– 513	700	946	1237	– 490	– 388	– 282	448	562	674	78
17	1	303	473	674	”	”	”	690	820	958	”	”	”	1896
16	2	151	313	499	”	”	”	513	628	745	”	”	”	1353
15	3	5	164	340	”	”	”	353	459	565	2512	”	”	1054
14	4	– 143	15	187	”	”	”	199	300	399	1514	1911	”	824
13	5	– 295	– 133	38	1717	”	”	50	148	243	1155	1360	1665	628
12	6	– 454	– 284	– 110	1270	1825	”	– 98	0	93	900	1054	1243	459
11	7	– 625	– 443	– 261	990	1322	1881	– 248	– 148	– 55	700	824	970	300
10	8	– 817	– 613	– 418	772	1028	1347	– 404	– 300	204	522	631	755	148
9		– 1045	– 803	– 586	586	803	1045	– 571	– 459	– 358	358	459	571	0
18	1	329	499	694	”	”	”	710	842	970	”	”	”	1911
17	2	187	348	527	”	”	”	542	659	769	”	”	”	1385
16	3	45	202	372	”	”	”	385	493	592	3090	”	”	1085
15	4	– 93	63	228	”	”	”	240	342	434	1589	2014	”	863
14	5	– 235	– 78	85	1825	”	”	98	197	284	1216	1419	1762	674
13	6	– 380	– 217	– 53	1347	1977	”	– 40	58	143	966	1112	1316	510
12	7	– 536	– 364	– 194	1058	1405	2097	– 182	– 83	2	762	882	1036	356
11	8	– 703	– 516	– 337	842	1103	1454	– 324	– 222	– 136	589	694	824	212
10	9	– 896	– 684	– 490	656	874	1131	– 476	– 369	– 279	429	524	640	70

n	i	α = 0,01 K 1	= 0,05 K 5	= 0,20 K 20	= 0,20 K 20	= 0,05 K 5	= 0,01 K 1	α = 0,01 L 1	= 0,05 L 5	= 0,20 L 20	= 0,20 L 20	= 0,05 L 5	= 0,01 L 1	u_i
19	1	350	522	716	,,	,,	,,	722	860	982	,,	,,	,,	1943
18	2	215	377	556	,,	,,	,,	562	684	789	,,	,,	,,	1419
17	3	80	238	407	,,	,,	,,	412	524	619	,,	,,	,,	1217
16	4	– 53	103	266	,,	,,	,,	272	377	465	1675	2170	,,	900
15	5	– 184	– 28	133	,,	,,	,,	138	240	324	1287	1498	1927	719
14	6	– 321	– 161	0	1419	2197	,,	5	106	187	1028	1175	1405	556
13	7	– 465	– 298	– 133	1122	1498	2576	– 128	– 28	53	824	942	1112	407
12	8	– 616	– 437	– 266	904	1180	1580	– 261	– 159	– 78	653	755	896	269
11	9	– 786	– 589	– 407	719	946	1226	– 402	– 295	– 212	496	589	713	133
10	8	– 982	– 755	– 556	556	755	982	– 550	– 437	– 350	350	437	550	0
20	1	369	542	736	,,	,,	,,	736	878	994	,,	,,	,,	1960
19	2	238	402	580	,,	,,	,,	580	706	806	,,	,,	,,	1440
18	3	110	269	437	,,	,,	,,	437	553	643	,,	,,	,,	1150
17	4	– 15	141	303	,,	,,	,,	303	412	496	1751	2326	,,	935
16	5	– 141	15	174	2075	,,	,,	174	279	358	1341	1555	2075	755
15	6	– 269	– 110	48	1483	2512	,,	48	151	228	1080	1226	1483	598
14	7	– 402	– 238	– 78	1180	1589	,,	– 78	25	100	878	994	1180	454
13	8	– 542	– 369	– 204	958	1248	1706	– 204	– 100	– 25	706	806	958	319
12	9	– 694	– 507	– 334	776	1011	1316	– 334	– 228	– 151	553	643	776	189
11	10	– 863	– 656	– 470	616	820	1062	– 470	– 358	– 279	412	496	616	63
25	1	468	613	806	,,	,,	,,	831	915	1041	,,	,,	,,	2054
24	2	358	496	674	,,	,,	,,	697	772	882	,,	,,	,,	1555
23	3	253	385	553	,,	,,	,,	574	643	742	,,	,,	,,	1282
22	4	151	279	440	,,	,,	,,	459	524	616	2290	,,	,,	1080
21	5	50	176	332	,,	,,	,,	350	412	499	1635	2054	,,	915
20	6	– 50	75	228	1881	,,	,,	246	306	388	1335	1555	1787	772
19	7	– 151	– 25	126	1476	2326	,,	143	202	282	1122	1282	1426	643
18	8	– 253	– 126	25	1226	1645	3090	43	100	179	950	1080	1190	524
17	9	– 358	– 228	– 75	1036	1341	1751	– 56	0	78	803	915	1007	412
16	10	– 468	– 332	– 176	878	1126	1405	– 159	– 100	– 23	671	772	852	306
15	11	– 583	– 440	– 279	739	954	1175	– 261	– 202	– 123	550	643	716	202
14	12	– 706	– 553	– 385	613	806	994	– 366	– 306	– 225	437	524	592	100
13		– 842	– 674	– 496	496	674	842	– 476	– 412	– 329	329	412	476	0

30	1	553	706	915	,,	,,	,,	889	990	1122	,,	,,	,,	2120
29	2	459	604	796	,,	,,	,,	772	863	978	,,	,,	,,	1645
28	3	369	507	687	,,	,,	,,	665	749	852	,,	,,	,,	1385
27	4	279	412	583	,,	,,	,,	562	640	736	2748	,,	,,	1190
26	5	194	324	487	,,	,,	,,	468	542	631	1799	2512	,,	1036
25	6	110	238	396	2054	,,	,,	377	448	533	1483	1762	2226	904
24	7	25	151	306	1607	,,	,,	287	356	437	1265	1454	1675	782
23	8	– 58	68	220	1360	1927	,,	202	269	348	1098	1248	1405	674
22	9	– 141	– 15	136	1175	1555	2326	118	184	261	958	1085	1211	574
21	10	– 228	– 100	50	1019	1316	1706	33	98	174	831	942	1049	476
20	11	– 313	– 184	– 33	889	1141	1426	– 50	15	90	719	820	915	385
19	12	– 402	– 269	– 116	772	994	1226	– 133	– 68	8	616	710	796	298
18	13	– 496	– 358	– 202	662	863	1062	– 222	– 154	– 78	516	604	684	210
17	14	– 592	– 448	– 287	562	749	927	– 306	– 238	– 161	423	507	583	126
16	15	– 694	– 542	– 374	468	643	806	– 393	– 324	– 246	334	415	487	43
			u'_i			u''_i			v'_i			v''_i		u_i

Justification : Les valeurs de la table ci-dessus ont été lues sur une table de la fonction de répartition F(u) de la variable normale réduite :

– Cas des u des colonnes K $F(u) = (i - 0,5)/n \mp (D - 0,5/n)$,

avec pour D les valeurs lues sur la table de MASSEY [2],

– Cas des v des colonnes L $F(v) = (i - 0,5)/n \mp (D_L - 0,5/n)$,

avec pour D_L les valeurs lues sur la table de LILLIEFORS [3],

– Cas des u de la dernière colonne $F(u) = (i - 0,5)/n$ pour $i > 0,5\ n$.