

J. RINGLER

Modélisation mathématique de la fiabilité des systèmes d'ordres séquentiels

Revue de statistique appliquée, tome 25, n° 1 (1977), p. 13-34

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1977__25_1_13_0

© Société française de statistique, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DE LA FIABILITÉ DES SYSTÈMES D'ORDRES SÉQUENTIELS ⁽¹⁾

J. RINGLER
Engins Matra

INTRODUCTION

Contrairement à la plupart des équipements ou systèmes pour lesquels un seul modèle mathématique est suffisant pour caractériser leur fiabilité sur une mission donnée, les systèmes destinés à émettre séquentiellement un ou plusieurs ordres dans le temps ne peuvent être considérés comme fiables que dans la mesure où chacun de ces ordres est effectivement transmis au moment où un signal de commande a été émis et où, inversement, il n'y a pas transmission d'ordre en l'absence de signal de commande. Autrement dit, la fiabilité de tels systèmes est caractérisée par, au moins, deux modèles mathématiques, l'un relatif à ce qui est communément appelé "panne avance", l'autre relatif à la "panne retard".

Dans ce contexte, le présent article se propose de présenter le formalisme nécessaire pour être en mesure de résoudre les difficultés engendrées par la dualité des modes de pannes fonctionnelles des systèmes d'ordres séquentiels. C'est en particulier, un domaine où le rôle du fiabiliste est particulièrement important dans le cadre des problèmes de sécurité liés au bon fonctionnement de ces systèmes.

1 – DEFINITION ET CRITERE DE BON FONCTIONNEMENT D'UN SYSTEME D'ORDRES SEQUENTIELS

Nous entendons par "Système d'ordres séquentiels" un système constitué de sous-ensembles de natures électronique ou électromécanique, destiné à délivrer un ou plusieurs ordres, logiques ou analogiques, à des instants prédéterminés. Un exemple typique de tels systèmes est illustré par les systèmes séquentiels des missiles ou des lanceurs spatiaux, dont le rôle est de délivrer des ordres de nature pyrotechnique (ex : mise à feu d'étoupilles) ou électrique (ex : mise sous tension d'électro-vannes).

(1) Article remis en septembre 1976, révisé en décembre 1976.

La figure 1 donnée ci-dessous correspond au schéma simplifié d'un système d'ordre électrique monté à bord d'un lanceur

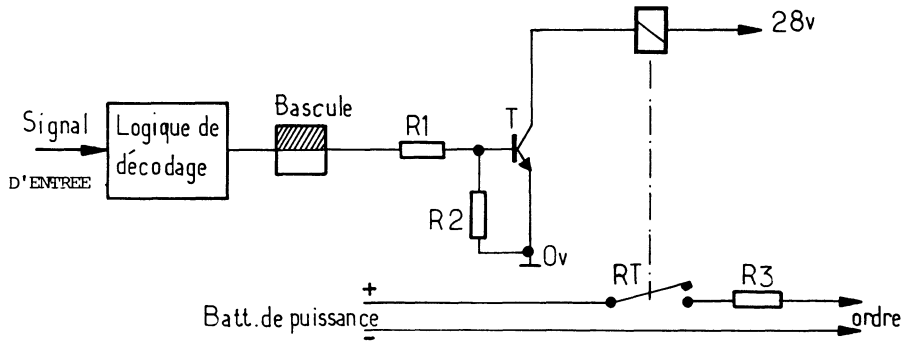


Figure 1

D'une manière générale, le critère de bon fonctionnement d'un système d'ordre séquentiel est caractérisé par les deux conditions suivantes :

- un ordre ne doit pas être transmis en l'absence de signal de commande (PAS DE PANNE AVANCE)
- l'exécution d'un ordre doit suivre l'émission du signal de commande (PAS DE PANNE RETARD).

2 - EVALUATION DES POTENTIALITES DE PANNE AVANCE ET DE PANNE RETARD DANS UN SYSTEME D'ORDRES SEQUENTIELS

En vertu du critère de bon fonctionnement d'un système d'ordres séquentiels que nous avons énoncé au paragraphe 1, l'étude de la fiabilité d'un tel système nécessite la prise en compte de deux modes de pannes. Autrement dit, l'analyse des modes de pannes et de leurs effets (angl : FMEA) devra prendre en compte les mécanismes de défaillance des modules de base, qui ont pour effet de rendre impossible le passage d'un ordre (PANNE RETARD), et ceux dont l'effet est de générer un ordre intempestif (PANNE AVANCE).

Cette FMEA conduit donc à l'établissement de deux blocs-diagrammes de fiabilité distincts, comportant ou non des redondances, l'un relatif à la panne RETARD, l'autre relatif à la panne AVANCE. A chacun de ces deux blocs-diagrammes correspond un modèle mathématique de fiabilité.

Nous désignerons par :

$r(t)$ la fonction fiabilité relative au bloc-diagramme de la panne RETARD

$s(t)$ la fonction fiabilité relative au bloc-diagramme de la panne AVANCE

Il en résulte que les expressions :

$$p(t) = 1 - r(t) \quad \text{et} \quad q(t) = 1 - s(t)$$

représentent respectivement les probabilités de pannes "potentielles" RETARD et AVANCE du système d'ordres séquentiels sur un temps de mission t .

Remarquons que la fiabilité globale $R(t)$ et la probabilité totale de panne $D(t)$ s'écrivent respectivement :

$$R(t) = r(t) \times s(t)$$

$$D(t) = 1 - R(t)$$

$$= 1 - (1 - p(t))(1 - q(t))$$

$$= p(t) + q(t) - p(t)q(t)$$

Désignons respectivement par :

$r_1(t), \dots, r_i(t), \dots, r_n(t)$ les fonctions fiabilité des modules numérotés $1, \dots, i, \dots, n$ relatives à la panne RETARD

$s_1(t), \dots, s_i(t), \dots, s_n(t)$ les fonctions fiabilité des mêmes modules relatives à la panne AVANCE.

Dans le cas où les blocs-diagrammes de fiabilité sont à structure série, c'est-à-dire ne comportent pas de redondances, les fonctions $r(t)$ et $s(t)$ ont pour expression :

$$r(t) = \prod_{i=1}^n r_i(t)$$

$$s(t) = \prod_{i=1}^n s_i(t)$$

Si, de plus, les fonctions fiabilité de chaque module sont de type exponentielles, c'est-à-dire :

$$r_i(t) = e^{-\lambda_i t}$$

$$s_i(t) = e^{-\mu_i t}$$

(μ ayant ici la signification d'un taux de défaillance),

on obtient alors :

$$r(t) = e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i t}$$

$$s(t) = e^{-\sum_{i=1}^n \mu_i t}$$

$$\text{Fiabilité globale : } R(t) = e^{-\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) t}$$

$$\text{Probabilité de panne globale : } D(t) = 1 - e^{-\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) t}$$

Nota : certaines des fonctions $r_i(t)$ et $s_i(t)$ peuvent être nulles. C'est le cas lorsque le module correspondant ne présente aucun mode de défaillance

interne susceptible de générer un type de panne fonctionnelle donnée (RETARD ou AVANCE).

3 – EVALUATION DES PROBABILITES D'ARRET DE MISSION PAR PANNE RETARD ET PAR PANNE AVANCE DANS UN SYSTEME SEQUENTIEL

Au paragraphe 2, nous nous sommes attachés à évaluer des "potentialités" de pannes fonctionnelles RETARD et AVANCE sur un temps de mission donné. Il se peut, en particulier, que des défaillances au niveau modules, génératrices de pannes fonctionnelles opposées, se produisent durant la mission. Cette remarque a été illustrée, au paragraphe 2, par l'égalité :

$$D(t) = p(t) + q(t) - p(t)q(t)$$

dans laquelle l'évènement "occurrence de défaillances génératrices de pannes RETARD et de défaillances génératrices de pannes AVANCE" est mis en évidence par le produit : $p(t) \times q(t)$.

A présent, nous nous proposons de chiffrer les probabilités d'échec de mission, par panne RETARD d'une part, par panne AVANCE d'autre part, en formulant au préalable les deux hypothèses suivantes :

1) Quel que soit l'instant où elle se produit pendant la mission, une défaillance génératrice de panne AVANCE ou RETARD entraîne l'échec de la mission.

2) Si cette défaillance est génératrice de panne RETARD (AVANCE), l'échec de la mission sera considéré comme un échec dû à une panne RETARD (AVANCE), même si une ou plusieurs défaillances génératrices de panne AVANCE (RETARD) surviennent après la première défaillance.

Nous verrons, dans les paragraphes suivants que ces deux hypothèses, bien que semblant avoir été émises par M. de la Palice, ne sont pas toujours justifiées.

Les définitions des fonctions $r(t)$ et $s(t)$ ayant été données au paragraphe 2, désignons de plus par :

$f(t) = -\frac{dr}{dt}$ la densité de probabilité de panne associée au bloc-diagramme panne RETARD

$g(t) = -\frac{ds}{dt}$ la densité de probabilité de panne associée au bloc-diagramme panne AVANCE

$P(t)$ la probabilité pour qu'il y ait un échec de mission par panne RETARD, sur le temps t .

$Q(t)$ la probabilité pour qu'il y ait un échec de mission par panne AVANCE, sur le temps t .

De par la signification de l'expression "échec de mission" par panne RETARD, nous pouvons écrire :

$$P(t) = \int_0^t s(\theta) \times f(\theta) d\theta$$

Le terme $s(\theta)$ s'impose pour exprimer qu'à l'instant θ d'apparition d'une défaillance génératrice de panne RETARD, il n'y a pas eu préalablement de défaillance génératrice de panne AVANCE.

De façon analogue, nous aurons :

$$Q(t) = \int_0^t r(\theta) \times g(\theta) d\theta$$

Il importe donc de bien voir que, contrairement aux probabilités $p(t)$ et $q(t)$ évaluées au paragraphe 2 et qui caractérisaient des évènements non exclusifs, les probabilités $P(t)$ et $Q(t)$ caractérisent des évènements exclusifs (un échec de mission par panne AVANCE n'est pas dû, par définition, à une panne RETARD, et vice-versa). On vérifie bien, du reste que :

$$\begin{aligned} P(t) + Q(t) &= \int_0^t -s(\theta) \frac{dr}{d\theta} d\theta + \int_0^t -r(\theta) \frac{ds}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^t -\left(s(\theta) \frac{dr}{d\theta} + r(\theta) \frac{ds}{d\theta}\right) d\theta \\ &= \int_{r(t) s(t)}^0 d(r(\theta) s(\theta)) \\ &= 1 - r(t) s(t) = \text{probabilité totale de panne} \end{aligned}$$

Nous allons détailler les expressions de $P(t)$ et de $Q(t)$ dans l'hypothèse de bloc-diagrammes de fiabilité à structure série. Considérons, comme au paragraphe 2, n blocs en série numérotés $1, \dots, i, \dots, n$. Aux définitions de $r_i(t)$ et de $s_i(t)$, nous ajouterons les définitions suivantes :

- $\lambda_i(t)$ = taux de défaillance instantané du module i pour la défaillance génératrice d'une panne RETARD

- $\mu_i(t)$ = taux de défaillance instantané du module i pour la défaillance génératrice d'une panne AVANCE.

On obtient donc :

$$r(t) = \prod_{i=1}^n r_i(t) \quad s(t) = \prod_{i=1}^n s_i(t)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{d}{dt} \left(\prod_{i=1}^n r_i(t) \right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^n r_i(t) \right) \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \quad \left(\text{en effet : } \lambda_i(t) = -\frac{1}{r_i(t)} \frac{dr_i}{dt} \right) \end{aligned}$$

$$g(t) = -\frac{d}{dt} \left(\prod_{i=1}^n s_i(t) \right) = \left(\prod_{i=1}^n s_i(t) \right) \sum_{i=1}^n \mu_i(t) \quad \left(\mu_i(t) = -\frac{1}{s_i(t)} \frac{ds_i}{dt} \right)$$

Les expressions P(t) et Q(t) s'écrivent ainsi :

$$P(t) = \int_0^t \left(\prod_{i=1}^n r_i(\theta) s_i(\theta) \right) \sum_{i=1}^n \lambda_i(\theta) d\theta$$

$$Q(t) = \int_0^t \left(\prod_{i=1}^n r_i(\theta) s_i(\theta) \right) \sum_{i=1}^n \mu_i(\theta) d\theta$$

Si, de plus, les fonctions fiabilité de chaque module sont de type exponentielles, on obtient alors :

$$P(t) = \int_0^t e^{-\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) \theta} \times \sum_{i=1}^n \lambda_i d\theta, \quad \text{soit :}$$

$$P(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i)} \left(1 - e^{-\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) t} \right)$$

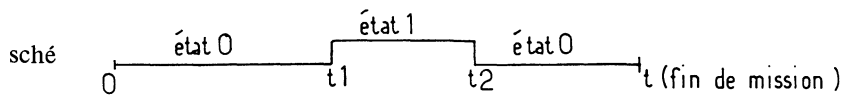
De même :

$$Q(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i)} \left(1 - e^{-\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) t} \right)$$

4 – PRISE EN COMPTE DU DIAGRAMME DES TEMPS – PRECISIONS SUR LES CONCEPTS “PANNE AVANCE” ET “PANNE RETARD”

Nous avons raisonné, jusqu'à présent, sur un temps de mission donné, sans aucune considération sur le diagramme séquentiel. Ceci nous a conduit à écrire que, pendant la totalité du temps de mission, le système d'ordres séquentiels ne doit tolérer ni panne RETARD ni panne AVANCE. Nous allons voir, sur un exemple précis, que l'évaluation du modèle mathématique rigoureux nécessite, outre la prise en compte du diagramme des temps, une précision améliorée de la définition des termes “panne AVANCE” et “panne RETARD”.

Considérons le diagramme des temps suivant, dans lequel un ordre et un seul doit être transmis entre t_1 et t_2 :



Dans un but de simplification dans les notations, nous allons à présent utiliser la terminologie suivante :

Etat fonctionnel du système

- Etat 0 : la fonction de sortie (courant, tension) est inhibée
- Etat 1 : la fonction de sortie est active

Défaillances sur les modules du circuit :

- Défaillance par 0 : défaillance sur un module ayant pour conséquence un état fonctionnel "0" permanent (fonction de sortie inhibée).

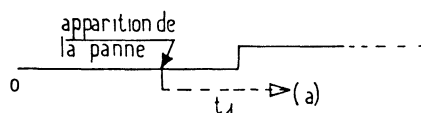
- Défaillance par 1 : défaillance sur un module ayant pour conséquence un état fonctionnel "1" permanent (fonction de sortie active).

Les conséquences fonctionnelles de défaillances sur un module quelconque dépendent :

- du type de panne sur le module
- de l'instant où se produit la panne.

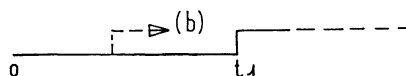
Considérons en effet les différentes éventualités possibles, en s'appuyant sur le diagramme des temps précédents :

- *Défaillance par 0 sur un module avant t_1*
(configuration a)



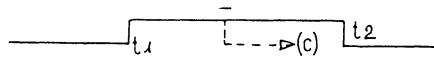
Au moment t_1 , l'ordre d'activation prévue de la fonction de sortie est inhibé.

- *Défaillance par 1 sur un module avant t_1*
(configuration b)



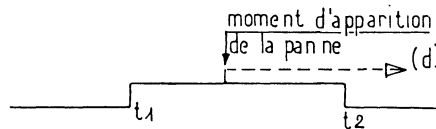
Cette défaillance correspond à un ordre d'activation intempestif de la fonction de sortie.

- Défaillance par 0 sur un module entre t_1 et t_2
(configuration c)



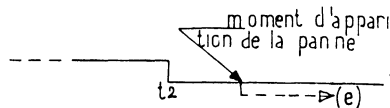
Cette défaillance provoque une inhibition intempestive de la fonction de sortie qui devait rester active jusqu'à t_2 .

- Défaillance par 1 sur un module entre t_1 et t_2
(configuration d)



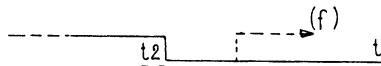
Au moment t_2 , l'ordre prévu d'inhibition de la fonction de sortie ne sera pas réalisé : celle-ci restera active.

- Défaillance par 0 sur un module après t_2
(configuration e)



Cette panne n'a aucun effet, étant donné que la fonction de sortie n'a plus à être activée après t_2 .

- Défaillance par 1 sur un module après t_2
(configuration f)



Cette défaillance provoque un ordre d'activation intempestif de la fonction de sortie après t_2 .

Cet exemple est suffisant pour démontrer la nécessité de l'amélioration du concept panne AVANCE et panne RETARD. Ainsi, on constate que la défaillance par 1 sur un module se traduit par une panne AVANCE (vis-à-vis de l'ordre d'activation) ou par une panne RETARD (vis-à-vis de l'ordre d'inhibition) selon qu'elle se produit avant t_1 ou entre t_1 et t_2 .

D'une façon générale, nous sommes amenés à considérer non plus deux, mais quatre types de pannes fonctionnelles :

- RETARD A L'ACTIVATION (configuration a)
- AVANCE A L'ACTIVATION (configuration b et f)
- RETARD A L'INHIBITION (configuration d)
- AVANCE A L'INHIBITION (configuration c)

Par corrélation avec la mise en évidence de ces quatre modes de pannes, nous sommes conduits à envisager non plus deux, mais quatre modèles mathématiques de fiabilité, relatifs à chacun de ces quatre modes de pannes. Cette considération est importante, car elle sous-entend qu'un modèle mathématique de fiabilité dans un système séquentiel nécessite la prise en compte de l'état fonctionnel dans lequel se trouve le circuit au moment où se produit une panne.

Ainsi, ce que nous avons désigné dans les paragraphes 2 et 3 par panne "AVANCE", c'est-à-dire panne par signal de sortie permanent, devient à présent :

- panne par avance à l'activation, si la défaillance du module concerné apparaît au moment où le circuit est à l'état fonctionnel 0 (absence de signal)
- panne par retard à l'inhibition si la défaillance du module apparaît au moment où le circuit est à l'état fonctionnel 1 (présence de signal).

Les considérations sur la panne "RETARD" sont analogues, à condition d'inverser état fonctionnel 0 et état fonctionnel 1.

Le problème est de savoir, à présent, dans quelle mesure le modèle mathématique de fiabilité relatif à la panne "Retard à l'activation" d'une part diffère de celui relatif à la panne "Avance à l'inhibition", et dans quelle mesure le modèle mathématique de fiabilité relatif à la panne "Avance à l'activation" d'autre part diffère de celui relatif à la panne "Retard à l'inhibition". En effet, les modèles du 1^{er} cas (Retard à l'activation et Avance à l'inhibition) font tous deux intervenir les pannes par 0 sur les modules du circuit, tandis que ceux du second cas (Avance à l'activation et Retard à l'inhibition) font intervenir les pannes par 1 sur ces modules. La réponse à cette question dépend, comme nous allons le voir, de la présence ou non d'organes présentant un caractère mécanique dans le système :

– 1^{er} cas : le système ne comporte que des sous-ensembles électroniques

Considérons, par exemple, une bascule binaire délivrant un 0 ou un 1 logique suivant son état. Pour cette bascule, 2 modes de défaillances sont envisageables :

- sortie bloquée à 0
- sortie bloquée à 1.

Il nous paraît difficile, dans l'état actuel de nos connaissances, d'établir une corrélation entre chacun de ces deux modes de défaillances et l'état logique dans lequel était la bascule au moment de la défaillance. Autrement dit, on ne peut distinguer le mode de défaillance : "blocage permanent à 0 apparu au moment où la bascule était à l'état 0" du mode de défaillance : "commutation intempestive de l'état 1 à l'état 0".

De la même manière, on fera abstraction de l'influence de l'état d'un transistor (bloqué ou saturé) ou d'une diode (bloquée ou passante) sur l'apparition des modes de défaillance "court-circuit" ou "circuit ouvert".

En généralisant ces considérations sur des modules électroniques, nous sommes conduits à admettre que les modes de défaillance de ces modules : "sortie bloquée à 0" et "sortie bloquée à 1" ne dépendent pas de l'état fonctionnel de ces modules, donc de celui de la fonction de sortie du système séquentiel.

Autrement dit, si l'on s'en tient aux hypothèses qui viennent d'être émises, lorsqu'il n'y a pas de sous-ensembles à caractère mécanique :

- les 2 modèles mathématiques relatifs aux pannes fonctionnelles "Retard à l'activation" et "Avance à l'inhibition" peuvent être considérés comme identiques.

- les 2 modèles mathématiques relatifs aux pannes fonctionnelles "Avance à l'activation" et "Retard à l'inhibition" peuvent également être considérés comme identiques.

Nous retrouvons donc les deux modèles qui correspondent respectivement aux modèles "Panne Retard" et "Panne Avance" ainsi dénommés au paragraphe 2.

— 2^e cas : le système comporte des sous-ensembles à caractère mécanique

Considérons, pour fixer les idées, le relais monostable sur notre circuit séquentiel présenté sur la figure 1. Lorsque la fonction de sortie est à l'état 0, le contact du relais est ouvert. Dans cet état fonctionnel, le mode de défaillance par 1 du relais serait la conséquence d'une fermeture intempestive du contact, due à la cassure du ressort de rappel ou à un court-circuit entre les contacts.

Supposons maintenant la fonction de sortie à l'état 1 : le contact du relais est fermé. Dans cet état fonctionnel, le mode de défaillance par 1 du relais peut être dû non seulement à la cassure du ressort de rappel, mais encore — et surtout — au collage des contacts consécutif à un échauffement important. Ce mode de défaillance est d'ailleurs caractéristique des relais qui sont amenés à couper des courants supérieurs au courant nominal.

Cet exemple est généralisable aux autres sous-ensembles à caractère mécanique (vannes, vérins, etc. . .) : certains modes de défaillance sont inhérents à l'état fonctionnel du sous-ensemble. Dans le cas du relais, il était clair que l'échauffement des contacts ne pouvait se produire à l'état fonctionnel 0 puisque, par définition, cet état pré-supposait le contact ouvert.

Dans ce deuxième cas, nous sommes ainsi tenus de prendre en compte la corrélation qui existe entre l'état fonctionnel du système séquentiel et les modes de pannes de ceux des sous-ensembles qui présentent un caractère mécanique.

De ces considérations, deux conclusions s'imposent :

1) Pour un module à caractère mécanique numéroté i , il convient de définir non plus deux, mais quatre modèles mathématiques de fiabilité, prenant

en compte la corrélation entre l'état fonctionnel du module et ses modes de pannes.

On désignera ainsi par :

- $r_i^{(0)}(t)$ la fiabilité du module i , à l'état fonctionnel 0, vis-à-vis de la panne par 0
- $s_i^{(0)}(t)$ la fiabilité du module i , à l'état fonctionnel 0, vis-à-vis de la panne par 1
- $r_i^{(1)}(t)$ la fiabilité du module i , à l'état fonctionnel 1, vis-à-vis de la panne par 0
- $s_i^{(1)}(t)$ la fiabilité du module i , à l'état fonctionnel 1, vis-à-vis de la panne par 1

2) Dans le cas de la présence de modules à caractère mécanique dans le système séquentiel, il résulte de la première conclusion que, à l'image de ces modules, il y a quatre modèles mathématiques de fiabilité au niveau système, prenant en compte la corrélation entre l'état fonctionnel du système et les modes de pannes de la fonction de sortie.

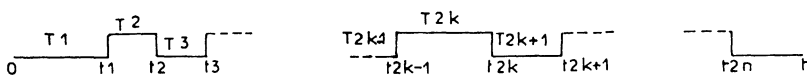
Les fonctions $r(t)$ et $s(t)$ au niveau système ayant été définies au paragraphe 2, nous définirons par :

- $r^{(0)}(t)$ l'expression de $r(t)$ lorsque le système est à l'état fonctionnel 0
- $r^{(1)}(t)$ l'expression de $r(t)$ lorsque le système est à l'état fonctionnel 1
- $s^{(0)}(t)$ l'expression de $s(t)$ lorsque le système est à l'état fonctionnel 0
- $s^{(1)}(t)$ l'expression de $s(t)$ lorsque le système est à l'état fonctionnel 1

Nous définirons enfin les densités de probabilités conditionnelles :

- $\Phi^{(0)}(t) = -s^{(0)}(t) \frac{dr^{(0)}}{dt}$
- $\Psi^{(0)}(t) = -r^{(0)}(t) \frac{ds^{(0)}}{dt}$
- $\Phi^{(1)}(t) = -s^{(1)}(t) \frac{dr^{(1)}}{dt}$
- $\Psi^{(1)}(t) = -r^{(1)}(t) \frac{ds^{(1)}}{dt}$

Considérons à présent le diagramme séquentiel suivant :



Relativement à ce diagramme, nous désignerons par :

- t : le temps total de mission
- t_{2k-1} : le temps correspondant au $k^{\text{ème}}$ ordre d'activation (commutation 0 \rightarrow 1)

- t_{2k} : le temps correspondant au $k^{\text{ème}}$ ordre d'inhibition (commutation $1 \rightarrow 0$)
- T_{2k-1} : $t_{2k-1} - t_{2k-2}$ la durée du $k^{\text{ème}}$ signal 0
- T_{2k} : $t_{2k} - t_{2k-1}$ la durée du $k^{\text{ème}}$ signal 1
- $\alpha_k = \sum_{i=1}^k T_{2i}$ le cumul des temps pendant lesquels le système est à l'état 1 depuis le début de mission jusqu'au $k^{\text{ème}}$ ordre d'inhibition inclus
- $\alpha'_k = \sum_{i=1}^k T_{2i-1}$ le cumul des temps pendant lesquels le système est à l'état 0 depuis le début de mission jusqu'au $k^{\text{ème}}$ ordre d'activation inclus.

Moyennant ces définitions, nous sommes en mesure de donner les expressions des probabilités de pannes relatives au $k^{\text{ème}}$ ordre d'activation et au $k^{\text{ème}}$ ordre d'inhibition ($1 \leq k \leq n$) :
(voir nota)

- Probabilité de panne "Retard à la $k^{\text{ème}}$ activation" ($t_{2k-2} \leq t \leq t_{2k-1}$)

$$P_k^{(0)} = r^{(1)}(\alpha_{k-1}) s^{(1)}(\alpha_{k-1}) \int_{\alpha'_{k-1}}^{\alpha'_k} \Phi^{(0)}(\theta) d\theta$$

- Probabilité de panne "Avance à la $k^{\text{ème}}$ activation" ($t_{2k-2} \leq t \leq t_{2k-1}$)

$$Q_k^{(0)} = r^{(1)}(\alpha_{k-1}) s^{(1)}(\alpha_{k-1}) \int_{\alpha'_{k-1}}^{\alpha'_k} \Psi^{(0)}(\theta) d\theta$$

- Fiabilité du système au moment de la $k^{\text{ème}}$ activation ($t = t_{2k-1}$)

$$R(t_{2k-1}) = r^{(0)}(\alpha'_k) s^{(0)}(\alpha'_k) r^{(1)}(\alpha_{k-1}) s^{(1)}(\alpha_{k-1})$$

- Probabilité de panne "Avance à la $k^{\text{ème}}$ inhibition" ($t_{2k-1} \leq t \leq t_{2k}$) :

$$P_k^{(1)} = r^{(0)}(\alpha'_k) s^{(0)}(\alpha'_k) \int_{\alpha'_{k-1}}^{\alpha'_k} \Phi^{(1)}(\theta) d\theta$$

Nota : les différentes expressions ainsi obtenues reposent sur l'hypothèse, non toujours fondée, que sur chacun des modules du système il y a indépendance entre les mécanismes de pannes inhérents à l'état fonctionnel "0" du module d'une part, et les mécanismes de pannes inhérents à l'état fonctionnel "1" du module d'autre part : autrement dit, il n'y a pas vieillissement relativement à l'état complémentaire.

- Probabilité de panne "Retard à la $k^{\text{ème}}$ inhibition" ($t_{2k-1} \leq t \leq t_{2k}$) :

$$Q_k^{(1)} = r^{(0)}(\alpha'_k) s^{(0)}(\alpha'_k) \int_{\alpha'_{k-1}}^{\alpha'_k} \Psi^{(1)}(\theta) d\theta$$

- Fiabilité du système au moment de la $k^{\text{ème}}$ inhibition ($t = t_{2k}$) :

$$R(t_{2k}) = r^{(0)}(\alpha'_k) s^{(0)}(\alpha'_k) r^{(1)}(\alpha_k) s^{(1)}(\alpha_k)$$

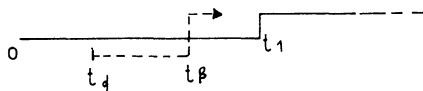
On voit ainsi qu'il est aisé d'évaluer la fiabilité du système à différents moments de la mission, ainsi que les probabilités des différents types de pannes fonctionnelles, suivant l'état du système.

5 – INCIDENCE DES PANNES MULTIPLES SUR LE MODELE MATHEMATIQUE DE FIABILITE D'UN SYSTEME D'ORDRES SEQUENTIELS A STRUCTURE SERIE

Nous avons fait l'hypothèse, au paragraphe 3, que la nature de la défaillance fonctionnelle au niveau "Fonction de sortie" ne dépend que de celle de la première défaillance au niveau d'un module quelconque du circuit séquentiel.

Ainsi, en reprenant notre figure 1, nous serions amenés à dire qu'à une défaillance sur la bascule par sortie bloquée à 0 succèdera automatiquement une panne fonctionnelle "Retard à l'activation" si cette défaillance est apparue au moment où l'état fonctionnel du circuit était à 0 (absence de signal).

Supposons à présent que les conditions de fiabilité de cette chaîne séquentielle soient suffisamment mauvaises pour que l'occurrence de pannes doubles ne soit pas à négliger. Considérons un diagramme des temps dans lequel une première activation doit passer au temps t_1 , et portons notre attention sur l'intervalle de temps $(0, t_1)$:



Nous allons supposer les faits suivants :

- au temps t_α apparaît une panne sur la bascule (fig. 1) par sortie bloquée à 0.

- au temps t_β ($t_\alpha < t_\beta < t_1$) apparaît sur le transistor T un court-circuit ayant pour effet de saturer T intempestivement (panne par 1).

Examinons les conséquences de ces deux pannes au niveau de la fonction de sortie :

- entre t_α et t_β , on peut dire qu'il y a, au niveau fonctionnel, panne *latente* par "retard à l'activation". En effet, cette panne est latente car elle ne se manifestera "effectivement" qu'au moment de l'ordre d'activation (temps t_1) en empêchant la réalisation de cet ordre.

- dès l'instant t_β , le transistor, étant saturé intempestivement, va autoriser le passage du courant dans la bobine du relais RT, d'où fermeture du contact de ce relais et passage du courant intempestif dans le circuit de puissance, ce qui correspond à une panne *effective* par "avance à l'activation".

Autrement dit, au niveau de la fonction de sortie, la première panne a été *masquée* par la seconde. Nous constatons ainsi que l'hypothèse que nous avons formulée au paragraphe 3 est en défaut dans ce cas.

Supposons à présent les faits suivants :

– au temps t_α apparaît sur le transistor T une défaillance par circuit ouvert (panne par 0)

– au temps t_β ($t_\alpha < t_\beta < t_1$) apparaît sur la bascule une panne par sortie bloquée à 1.

Qu'en résulte-t-il ?

– entre t_α et t_β , il y a, au niveau fonctionnel, panne latente par "retard à l'activation" due à la panne par 0 sur le transistor.

– à t_β se manifeste la panne par 1 sur la bascule. L'existence de ce 1 logique, qui devrait normalement saturer le transistor, reste cependant sans effet sur la fonction de sortie puisque le transistor est supposé avoir subi précédemment un mode de panne qui le bloque en permanence.

Autrement dit, contrairement au cas précédent, la panne fonctionnelle "retard à l'activation", latente jusqu'à t_1 devient effective à t_1 , malgré l'apparition d'une panne par 1 au temps t_β . L'hypothèse du paragraphe 3 reste bien fondée dans ce cas.

Remarquons que des conclusions analogues sont valables dans le cas où les pannes apparaissent dans un palier correspondant à un état fonctionnel 1 (présence du signal) : l'enchaînement chronologique d'une panne sur la bascule par sortie bloquée à 1 suivie d'une panne par circuit-ouvert sur le transistor (panne par 0) aurait pour conséquence *effective* une panne fonctionnelle "avance à l'inhibition". A l'inverse, l'enchaînement chronologique d'une panne par court-circuit sur le transistor (panne par 1) suivie d'une panne sur la bascule par sortie bloquée à 0 aurait pour conséquence effective une panne fonctionnelle "retard à l'inhibition".

Cette analyse, menée sur un exemple concret, nous conduit à la notion de CLASSE DE PRIORITES FONCTIONNELLES DE PANNES (C.P.F.P.).

Nous dirons qu'un module I du circuit séquentiel a une "priorité fonctionnelle de pannes" supérieure à celle d'un module J du même circuit si, lorsque dans un palier correspondant à un état fonctionnel 0 (1) du système séquentiel, se produisent successivement une panne par 0 (1) sur le module J puis une panne par 1 (0) sur le module I, la panne fonctionnelle effective est conditionnée par la panne du module I, et se trouve donc être une "avance à l'activation" ("avance à l'inhibition").

Ainsi, dans l'exemple précédent, nous pouvons dire que le transistor T possède, de par sa configuration géographique, une C.P.F.P. supérieure à celle de la bascule, et inférieure à celle du relais RT.

D'une manière quasi générale, on peut dire que, pour des circuits non bouclés, *les priorités fonctionnelles de pannes vont en augmentant lorsqu'on remonte le circuit de l'amont vers l'aval*. Sur la figure 1, le cas de la résistance R_3 est typique : si cette résistance présente à un moment donné une défaillance par circuit ouvert (panne par 0), la fonction de sortie sera en état

“absence de signal” quel que puisse être l'état des modules en amont par rapport à R_3 sur le circuit. Notons cependant que le cas des alimentations électriques (batteries et convertisseurs) ne correspond pas toujours à cette règle. Pour établir la C.P.F.P. d'une alimentation, il est en effet nécessaire d'étudier les conséquences d'une coupure ou d'une insuffisance de cette alimentation sur les différents modules électroniques, et donc sur l'état de la fonction de sortie.

Nous allons à présent établir les expressions de chacune des quatre probabilités de pannes au niveau fonctionnel définies au paragraphe 4 en tenant compte de l'occurrence d'une deuxième panne.

Considérons un circuit séquentiel à structure série dans lequel nous supposons établie la C.P.F.P. de l'ensemble de n modules. Soit : $1, 2, \dots, i, \dots, n$ les numéros de ces n modules classés dans leur ordre de priorités fonctionnelles de pannes croissantes (exemple : si $j > i$, la C.P.F.P. du module j est supérieure à celle du module i).

Pour un module quelconque numéroté i , nous utiliserons la terminologie définie aux paragraphes précédents pour caractériser les fonctions de fiabilité et les taux de pannes instantanés vis-à-vis des quatre modes de défaillance inhérents aux sous-ensembles à caractère mécanique, soit :

- défaillance par 0 lorsque le module est à l'état 0 : $r_i^{(0)}(t), \lambda_i^{(0)}(t)$
- défaillance par 1 lorsque le module est à l'état 0 : $s_i^{(0)}(t), \mu_i^{(0)}(t)$
- défaillance par 0 lorsque le module est à l'état 1 : $r_i^{(1)}(t), \lambda_i^{(1)}(t)$
- défaillance par 1 lorsque le module est à l'état 1 : $s_i^{(1)}(t), \mu_i^{(1)}(t)$.

Pour les modules purement électroniques :

$$\lambda_i^{(0)}(t) \equiv \lambda_i^{(1)}(t)$$

$$\mu_i^{(0)}(t) \equiv \mu_i^{(1)}(t)$$

Considérons le premier palier d'un diagramme d'ordres et supposons que ce palier d'une durée égale à t_1 corresponde à un état fonctionnel 0 :

schéma



Nous allons définir trois événements, notés ϵ_1, ϵ_2 et ϵ_3 , exclusifs entre eux et couvrant l'ensemble des pannes possibles sur le créneau de temps $(0, t_1)$:

– ϵ_1 : la première défaillance apparaissant sur un module quelconque est un 1 permanent. La conséquence au niveau fonctionnel se traduira par une “avance à l'activation”.

– ϵ_2 : la première panne, apparaissant à l'instant θ sur un module quelconque i , est un 0 permanent, et les modules à CFPF supérieure à celle de i (modules $i + 1, i + 2, \dots, n$) ne présentent pas de pannes par 1 permanent entre θ et t_1 . La conséquence au niveau fonctionnel se traduira par un “retard à l'activation”.

– ϵ_3 : La première panne, apparaissant à l’instant θ sur un module quelconque i , est un 0 permanent, et un module au moins à CPFPP supérieure à celle de i présente une panne par 1 permanent entre θ et t_1 . D’après la définition des CPFPP, la conséquence au niveau fonctionnel se traduira par une “avance à l’activation”.

Explicitons les probabilités des évènements ϵ_1 , ϵ_2 et ϵ_3 en tenant compte de leurs définitions respectives. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 - P(\epsilon_1) &= \int_0^{t_1} \underbrace{\left(\prod_{k=1}^n r_k^{(0)}(\theta) s_k^{(0)}(\theta) \right)}_{\text{aucune panne avant } \theta} \underbrace{\sum_{i=1}^n \mu_i^{(0)}(\theta) d\theta}_{\text{une panne par 1 sur un module quelconque à } \theta} \\
 - P(\epsilon_2) &= \int_0^{t_1} \underbrace{\left(\prod_{k=1}^n r_k^{(0)}(\theta) s_k^{(0)}(\theta) \right)}_{\text{aucune panne avant } \theta} \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i^{(0)}(\theta) \prod_{j=i+1}^n s_j^{(0)}(t_1 - \theta) \right) d\theta}_{\text{Panne par 0 sur un module à } \theta \text{ et pas de pannes par 1 entre } \theta \text{ et } t_1 \text{ sur les modules à CPFPP supérieure}} \\
 - P(\epsilon_3) &= \int_0^{t_1} \underbrace{\left(\prod_{k=1}^n r_k^{(0)}(\theta) s_k^{(0)}(\theta) \right)}_{\text{aucune panne avant } \theta} \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i^{(0)}(\theta) \left(1 - \prod_{j=i+1}^n s_j^{(0)}(t_1 - \theta) \right) \right) d\theta}_{\text{panne par 0 sur un module à } \theta \text{ suivie d'une panne par 1 entre } \theta \text{ et } t_1 \text{ sur un module à CPFPP supérieure.}}
 \end{aligned}$$

Les conséquences des évènements ϵ_1 , ϵ_2 et ϵ_3 permettent d’écrire :

$$\begin{aligned}
 P^{(0)}(t_1) &= \text{probabilité de panne retard à l’activation} \\
 &= P(\epsilon_2)
 \end{aligned}$$

et $Q^{(0)}(t_1) = \text{probabilité de panne avance à l’activation}$
 $= P(\epsilon_1) + P(\epsilon_3).$

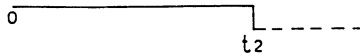
Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
 - P^{(0)}(t_1) &= \int_0^{t_1} \left(\prod_{k=1}^n r_k^{(0)}(\theta) s_k^{(0)}(\theta) \right) \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i^{(0)}(\theta) \prod_{j=i+1}^n s_j^{(0)}(t_1 - \theta) \right) d\theta \\
 - Q^{(0)}(t_1) &= \int_0^{t_1} \left(\prod_{k=1}^n r_k^{(0)}(\theta) s_k^{(0)}(\theta) \right) \sum_{i=1}^n \left\{ \mu_i^{(0)}(\theta) + \lambda_i^{(0)}(\theta) \right. \\
 &\quad \left. \left(1 - \prod_{j=i+1}^n s_j^{(0)}(t_1 - \theta) \right) \right\} d\theta .
 \end{aligned}$$

On vérifie aisément que :

$$P^{(0)}(t_1) + Q^{(0)}(t_1) = 1 - \prod_{i=1}^n r_i^{(0)}(t_1) s_i^{(0)}(t_1) = 1 - r^{(0)}(t_1) s^{(0)}(t_1)$$

Supposons à présent que le premier palier du diagramme d'ordres corresponde à un état fonctionnel 1 et soit d'une durée égale à t_2 :



Dans ce cas, les deux modes de pannes au niveau de la fonction de sortie sont :

- le retard à l'inhibition,
- l'avance à l'inhibition.

Les expressions des probabilités de ces deux évènements sont respectivement obtenues à partir de celles du "retard à l'activation" et de "l'avance à l'activation" en intervertissant les modes de pannes par 0 et les modes de pannes par 1 sur chacun des modules.

Nous obtenons ainsi l'expression des deux probabilités :

- Retard à l'inhibition :

$$Q^{(1)}(t_2) = \int_0^{t_2} \left(\prod_{k=1}^n r_k^{(1)}(\theta) s_k^{(1)}(\theta) \right) \sum_{i=1}^n \left(\mu_i^{(1)}(\theta) \prod_{j=i+1}^n r_j^{(1)}(t_2 - \theta) \right) d\theta$$

- Avance à l'inhibition :

$$P^{(1)}(t_2) = \int_0^{t_2} \left(\prod_{k=1}^n r_k^{(1)}(\theta) s_k^{(1)}(\theta) \right) \sum_{i=1}^n \left\{ \lambda_i^{(1)}(\theta) + \mu_i^{(1)}(\theta) \left(1 - \prod_{j=i+1}^n r_j^{(1)}(t_2 - \theta) \right) \right\} d\theta .$$

Reprenons maintenant le cas général du diagramme d'ordres séquentiels, étudié au paragraphe 4, pour lequel :

- dans les niveaux de temps (t_{2k-1}, t_{2k}) : l'état fonctionnel est 1
- dans les niveaux de temps (t_{2k}, t_{2k+1}) : l'état fonctionnel est 0

Les expressions des probabilités de pannes fonctionnelles que nous avons établies relativement à ce diagramme général pour des différentes valeurs du temps t demeurent valables. Cependant, lorsqu'on prend en compte l'occurrence de pannes multiples, des précautions doivent être prises pour l'établissement des expressions des quatre densités de probabilités de défaillances fonctionnelles :

$\Phi^{(0)}(\theta)$, $\Psi^{(0)}(\theta)$, $\Phi^{(1)}(\theta)$ et $\Psi^{(1)}(\theta)$ définies au paragraphe 4. En effet, dans cette hypothèse, l'expression de chacune de ces densités doit tenir compte de la durée du créneau sur lequel est envisagé le temps t . D'une façon générale,

ces densités de probabilité s'exprimeront de la façon suivante, en gardant les notations du paragraphe 4 :

– $t_{2k-2} \leq t \leq t_{2k-1}$ ($k^{\text{ème}}$ état fonctionnel à 0) :

$$\begin{aligned}
 - \Phi^{(0)}(\theta) &= \left[\prod_{k=1}^n r_k^{(0)}(\theta) s_k^{(0)}(\theta) \right] \sum_{i=1}^n \left\{ \lambda_i^{(0)}(\theta) \prod_{j=i+1}^n s_j^{(0)}(\alpha'_k - \theta) \right\} \\
 - \Psi^{(0)}(\theta) &= \left[\prod_{k=1}^n r_k^{(0)}(\theta) s_k^{(0)}(\theta) \right] \sum_{i=1}^n \left\{ \mu_i^{(0)}(\theta) + \lambda_i^{(0)}(\theta) \right. \\
 &\quad \left. \left(1 - \prod_{j=i+1}^n s_j^{(0)}(\alpha'_k - \theta) \right) \right\} .
 \end{aligned}$$

Rappelons que, dans ce créneau :

$$\theta = t - \sum_{i=1}^{k-1} T_{2i}$$

et

$$\alpha'_k = \sum_{i=1}^k T_{2i-1}$$

– $t_{2k-1} \leq t \leq t_{2k}$ ($k^{\text{ème}}$ état fonctionnel à 1) :

$$\begin{aligned}
 - \Phi^{(1)}(\theta) &= \left[\prod_{k=1}^n r_k^{(1)}(\theta) s_k^{(1)}(\theta) \right] \sum_{i=1}^n \left\{ \lambda_i^{(1)}(\theta) + \mu_i^{(1)}(\theta) \right. \\
 &\quad \left. \left(1 - \prod_{j=i+1}^n r_j^{(1)}(\alpha_k - \theta) \right) \right\} .
 \end{aligned}$$

$$- \Psi^{(1)}(\theta) = \left[\prod_{k=1}^n r_k^{(1)}(\theta) s_k^{(1)}(\theta) \right] \sum_{i=1}^n \left\{ \mu_i^{(1)}(\theta) \prod_{j=i+1}^n r_j^{(1)}(\alpha_k - \theta) \right\}$$

avec, dans ce créneau :

$$\theta = t - \sum_{i=1}^k T_{2i-1}$$

et

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^k T_{2i}$$

Notons que l'on a évidemment, compte-tenu de l'hypothèse d'un système séquentiel à structure série :

$$\prod_{k=1}^n r_k^{(0)}(\theta) s_k^{(0)}(\theta) = r^{(0)}(\theta) s^{(0)}(\theta)$$

et

$$\prod_{k=1}^n r_k^{(1)}(\theta) s_k^{(1)}(\theta) = r^{(1)}(\theta) s^{(1)}(\theta)$$

Voyons ce que deviennent les expressions des fonctions $\Phi^{(0)}(\theta)$, $\Psi^{(0)}(\theta)$, $\Phi^{(1)}(\theta)$ et $\Psi^{(1)}(\theta)$ dans l'hypothèse de modules ayant des lois de mortalité exponentielles, c'est-à-dire pour lesquels :

$$\begin{aligned} r_i^{(0)}(\theta) &= e^{-\lambda_i^{(0)}\theta} & s_i^{(0)}(\theta) &= e^{-\mu_i^{(0)}\theta} \\ r_i^{(1)}(\theta) &= e^{-\lambda_i^{(1)}\theta} & s_i^{(1)}(\theta) &= e^{-\mu_i^{(1)}\theta} \end{aligned}$$

Ces expressions deviennent alors :

- $\Phi^{(0)}(\theta) = e^{-\sum_{i=1}^n (\lambda_i^{(0)} + \mu_i^{(0)})\theta} \times \sum_{i=1}^n \left\{ \lambda_i^{(0)} e^{-\sum_{j=i+1}^n \mu_j^{(0)}(\alpha'_k - \theta)} \right\}$
- $\Psi^{(0)}(\theta) = e^{-\sum_{i=1}^n (\lambda_i^{(0)} + \mu_i^{(0)})\theta} \times \sum_{i=1}^n \left\{ \mu_i^{(0)} + \lambda_i^{(0)} (1 - e^{-\sum_{j=i+1}^n \mu_j^{(0)}(\alpha'_k - \theta)}) \right\}$
- $\Phi^{(1)}(\theta) = e^{-\sum_{i=1}^n (\lambda_i^{(1)} + \mu_i^{(1)})\theta} \times \sum_{i=1}^n \left\{ \lambda_i^{(1)} + \mu_i^{(1)} (1 - e^{-\sum_{j=i+1}^n \lambda_j^{(1)}(\alpha_k - \theta)}) \right\}$
- $\Psi^{(1)}(\theta) = e^{-\sum_{i=1}^n (\lambda_i^{(1)} + \mu_i^{(1)})\theta} \times \sum_{i=1}^n \left\{ \mu_i^{(1)} e^{-\sum_{j=i+1}^n \lambda_j^{(1)}(\alpha_k - \theta)} \right\}$

6 -- CONCLUSION

Sans prétendre avoir effectué une étude exhaustive et parfaite des modèles mathématiques de fiabilité des systèmes d'ordres séquentiels, nous pensons avoir dégagé une certaine méthodologie qui devrait être de nature à faciliter la tâche du fiabiliste.

Nous avons été conduits, au paragraphe 2, à déterminer les modèles mathématiques correspondant aux "potentialités" de panne RETARD et de panne AVANCE sur un temps donné, puis, au paragraphe 3, à évaluer les probabilités de fin de mission d'un système séquentiel par panne RETARD et par panne AVANCE, en partant de l'hypothèse que l'apparition d'une panne entraîne systématiquement une fin de mission. Ces évaluations ne tiennent pas compte de la nature du diagramme d'ordres dévolu à la mission du système séquentiel.

Afin de tenir compte de ce diagramme d'ordres, nous avons été amenés au paragraphe 4 à introduire la notion de "panne fonctionnelle par 0" ou panne par absence de signal, et celle de "panne fonctionnelle par 1" ou panne par signal permanent. De plus, nous avons montré que, en cas de présence d'éléments à caractère mécanique, les modèles mathématiques ne sont pas les mêmes selon l'état fonctionnel du circuit séquentiel (absence de signal

ou signal passant) au moment où se produit la panne. Il devient dans ce cas nécessaire de considérer que la panne fonctionnelle par 0 (1) est, soit une panne par "retard à l'activation" ("avance à l'activation") si elle se produit lorsque le séquentiel est à l'état fonctionnel 0, soit une panne par "avance à l'inhibition" ("retard à l'inhibition") si elle se produit lorsque le séquentiel est à l'état fonctionnel 1.

A ces quatre modes de pannes fonctionnels correspondent quatre modèles mathématiques de fiabilité, dont les expressions sont données en fin de paragraphe.

Au paragraphe 5, nous nous sommes intéressés à l'incidence de l'apparition de pannes multiples sur les modèles mathématiques de fiabilité dans un circuit séquentiel à structure série. Ceci nous a amené à définir des CLASSES DE PRIORITES FONCTIONNELLES DE PANNES (C.P.F.P.) qui font intervenir la position des modules défaillants au sein de la chaîne électrique. La prise en compte de cette position géographique (aspect spatial) et des instants respectifs auxquels apparaissent les pannes (aspect temporel) nous conduit à l'établissement de modèles mathématiques assez lourds. C'est pourquoi la considération de l'occurrence de pannes multiples ne saurait se justifier que dans les cas où les probabilités de pannes simples sont importantes. En particulier, elle devient le plus souvent illusoire dans les cas de faible durée de mission.

ANNEXE

EXPRESSIONS DES PROBABILITES DE PANNES $P_k^{(0)}$, $Q_k^{(0)}$, $P_k^{(1)}$, $Q_k^{(1)}$ DANS LE CAS DE MODELES EXPONENTIELS

En utilisant la symbolique définie au paragraphe 4, nous avons, dans l'hypothèse d'une mortalité de type exponentiel :

$$r^{(0)}(t) = e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(0)} t}$$

$$s^{(0)}(t) = e^{-\sum_{i=1}^n \mu_i^{(0)} t}$$

$$r^{(1)}(t) = e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(1)} t}$$

$$s^{(1)}(t) = e^{-\sum_{i=1}^n \mu_i^{(1)} t}$$

Dans les hypothèses définies au paragraphe 4, après avoir posé :

$$L^{(0)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(0)}$$

$$M^{(0)} = \sum_{i=1}^n \mu_i^{(0)}$$

$$L^{(1)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(1)}$$

$$M^{(1)} = \sum_{i=1}^n \mu_i^{(1)},$$

nous obtenons les expressions suivantes, relatives aux probabilités conditionnelles :

$$\Phi^{(0)}(t) = L^{(0)} e^{-(L^{(0)}+M^{(0)})t}$$

$$\Psi^{(0)}(t) = M^{(0)} e^{-(L^{(0)}+M^{(0)})t}$$

$$\Phi^{(1)}(t) = L^{(1)} e^{-(L^{(1)}+M^{(1)})t}$$

$$\Psi^{(1)}(t) = M^{(1)} e^{-(L^{(1)}+M^{(1)})t}$$

Dans ces conditions, sans prise en compte de l'occurrence de pannes multiples, les expressions $P_k^{(0)}$, $Q_k^{(0)}$, $P_k^{(1)}$ et $Q_k^{(1)}$ sont alors les suivantes :

$$P_k^{(0)} = \frac{L^{(0)}}{L^{(0)} + M^{(0)}} e^{-(L^{(1)}+M^{(1)})\alpha_{k-1}} [e^{-(L^{(0)}+M^{(0)})\alpha'_{k-1}} - e^{-(L^{(0)}+M^{(0)})\alpha'_k}]$$

$$Q_k^{(0)} = \frac{M^{(0)}}{L^{(0)} + M^{(0)}} e^{-(L^{(1)}+M^{(1)})\alpha_{k-1}} [e^{-(L^{(0)}+M^{(0)})\alpha'_{k-1}} - e^{-(L^{(0)}+M^{(0)})\alpha'_k}]$$

$$P_k^{(1)} = \frac{L^{(1)}}{L^{(1)} + M^{(1)}} e^{-(L^{(0)}+M^{(0)})\alpha'_k} [e^{-(L^{(1)}+M^{(1)})\alpha_{k-1}} - e^{-(L^{(1)}+M^{(1)})\alpha_k}]$$

$$Q_k^{(1)} = \frac{M^{(1)}}{L^{(1)} + M^{(1)}} e^{-(L^{(0)}+M^{(0)})\alpha'_k} [e^{-(L^{(1)}+M^{(1)})\alpha_{k-1}} - e^{-(L^{(1)}+M^{(1)})\alpha_k}]$$

L'hypothèse de l'occurrence d'une deuxième panne, traitée selon la méthode des C.P.F.P. définie en paragraphe 5, conduirait aux expressions suivantes :

$$P_k^{(0)} = e^{-(L^{(1)}+M^{(1)})\alpha_{k-1}} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^{(0)} e^{-\sum_{j=i+1}^n \mu_j^{(0)} \alpha'_k}}{L^{(0)} + M^{(0)} - \sum_{j=i+1}^n \mu_j^{(0)}} \left[e^{-(L^{(0)}+M^{(0)}) - \sum_{j=i+1}^n \mu_j^{(0)} \alpha'_{k-1}} - e^{-(L^{(0)}+M^{(0)}) - \sum_{j=i+1}^n \mu_j^{(0)} \alpha'_k} \right] \right\}$$

$$Q_k^{(0)} = e^{-(L^{(1)}+M^{(1)})\alpha_{k-1}} [e^{-(L^{(0)}+M^{(0)})\alpha'_{k-1}} - e^{-(L^{(0)}+M^{(0)})\alpha'_k}] - P_k^{(0)}$$

$$Q_k^{(1)} = e^{-(L^{(0)}+M^{(0)})\alpha'_k} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i^{(1)} e^{-\sum_{j=i+1}^n \lambda_j^{(1)} \alpha_k}}{L^{(1)} + M^{(1)} - \sum_{j=i+1}^n \lambda_j^{(1)}} \left[e^{-(L^{(1)}+M^{(1)} - \sum_{j=i+1}^n \lambda_j^{(1)})\alpha_{k-1}} \right. \right. \\ \left. \left. - e^{-(L^{(1)}+M^{(1)} - \sum_{j=i+1}^n \mu_j^{(0)})\alpha_k} \right] \right\}$$

$$P_k^{(1)} = e^{-(L^{(0)}+M^{(0)})\alpha'_k} [e^{-(L^{(1)}+M^{(1)})\alpha_{k-1}} - e^{-(L^{(1)}+M^{(1)})\alpha_k}] - Q_k^{(1)}$$