Revue de statistique appliquée

J. David

Détermination sans tâtonnement du coefficient γ de la loi de Weibull

Revue de statistique appliquée, tome 23, n° 3 (1975), p. 81-85
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1975__23_3_81_0>

DÉTERMINATION SANS TATONNEMENT DU COEFFICIENT "γ" DE LA LOI DE WEIBULL

J. DAVID
Direction de la qualité – Automobiles Peugeot

I – INTRODUCTION

La plupart des distributions de défaillances peuvent être représentées, avec des paramètres convenablement choisis, par la loi de Weibull dont la fonction de répartition s'écrit :

$$F(x) = 0 \qquad \text{pour} \quad x < \gamma$$

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}} \qquad \text{pour} \quad x \geqslant \gamma$$

où η , positif, est le paramètre d'échelle

γ , positif ou nul, est le paramètre de position

β , positif, est le paramètre de forme

Dans le papier à échelles fonctionnelles d'Alan PLAIT, la courbe représentative peut être :

– si $\gamma = 0$: rectiligne

– si $\gamma > 0$: une courbe dont la concavité est orientée en bas à droite

Quand la courbe représentative est une droite, on trouve très facilement les deux coefficients : β, grâce à un quart de cercle ou une échelle verticale, gradué en pente ; η est l'abscisse du point de la droite tracée, d'ordonnée nulle (ordonnée mesurée sur l'échelle verticale de droite).

Ces deux paramètres sont importants : β indique la nature du défaut ($\beta < 1$: défaillance de jeunesse ; $\beta = 1$: défaillance aléatoire ; $\beta > 1$: défaillance d'usure) et η permet de calculer la durée de vie moyenne par l'intermédiaire d'un coefficient qui dépend de β : $\Gamma(1 + 1/\beta)$.

Quand la courbe représentative n'est pas rectiligne, on ne peut pas déterminer la pente β immédiatement. Pour obtenir β, il faut transformer la courbe en droite. Pour cela on transforme des points de la courbe en leur faisant subir une translation horizontale en soustrayant à l'abscisse de chacun une même quantité γ.

L'estimation de γ, lorsque l'échantillon observé provient d'une loi de Weibull, peut se faire par tâtonnements [1] : quand le γ essayé est trop petit, la courbe garde sa concavité orientée en bas et à droite, quand le γ essayé est trop grand, la courbe prend une concavité orientée en haut et à gauche.

Cette recherche, graphique, peut être assez longue pour un dessinateur malchanceux. Le même travail peut être effectué commodément à l'aide d'un calculateur programmable de bureau ou, a fortiori, d'un ordinateur.

La méthode proposée ci-après permet de trouver le paramètre γ avec une construction graphique simple et l'application d'une formule simple.

II – METHODE PROPOSEE

Prenons trois points sur la courbe représentative

$$A\ (t_1\ ;\ y_1)$$

$$B\ (t_2\ ;\ y_2)$$

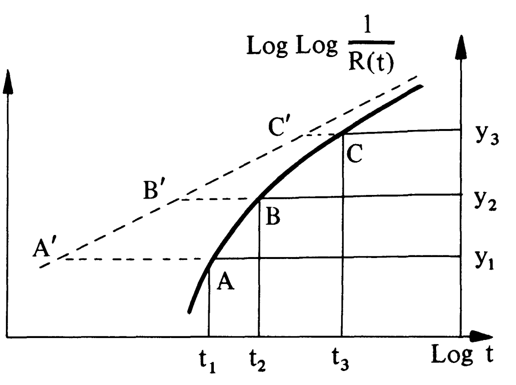
$$C\ (t_3\ ;\ y_3)$$

Après translation de γ il leur correspond les points transformés :

$$A'\ (t_1 - \gamma\ ;\ y_1)$$

$$B'\ (t_2 - \gamma\ ;\ y_2)$$

$$C'\ (t_3 - \gamma\ ;\ y_3)$$



Exprimons que ces trois points sont alignés. Il vient :

$$\frac{y_3 - y_2}{\mathrm{Log}\,(t_3 - \gamma) - (\mathrm{Log}\,(t_2 - \gamma)} = \frac{y_2 - y_1}{\mathrm{Log}\,(t_2 - \gamma) - \mathrm{Log}\,(t_1 - \gamma)}$$

$$(y_2 - y_1)\,\mathrm{Log}\,(t_3 - \gamma) + (y_3 - y_2)\,\mathrm{Log}\,(t_1 - \gamma) = (y_3 - y_1)\,\mathrm{Log}\,(t_2 - \gamma)$$

$$(t_3 - \gamma)^{(y_2 - y_1)} \times (t_1 - \gamma)^{(y_3 - y_2)} = (t_2 - \gamma)^{(y_3 - y_1)}$$

Dans le cas général, si y_1, y_2 et y_3 sont quelconques, cette équation ne peut pas se résoudre en γ. Mais si on choisit les ordonnées de telle façon que :

$$y_3 - y_1 = y_2 - y_1 = 1 \text{ , donc : } y_3 - y_1 = 2$$

il vient :

$$(t_3 - \gamma)(t_1 - \gamma) = (t_2 - \gamma)^2$$

d'où :

$$\gamma = \frac{t_2^2 - t_1 \cdot t_3}{2t_2 - (t_1 + t_3)}$$

et la règle suivante :

Sur l'échelle verticale de droite du papier de PLAIT, généralement graduée en Log Log, on choisit trois points tels que : $y_3 - y_2 = y_2 - y_1 = 1$. Aux abscisses t_1 , t_2 , t_3 des trois points correspondants de la courbe, on applique la formule :

$$\gamma = \frac{t_2^2 - t_1 t_3}{2t_2 - (t_1 + t_3)}$$

qui permet la détermination de γ.

III – EXEMPLE D'APPLICATION

Certains produits industriels ont peu de chance d'être le siège d'un défaut de réalisation – qui entraînerait des défaillances de jeunesse – et ne peuvent donc être le siège que de défaillances aléatoires ou d'usure.

Certains produits ne peuvent avoir des défaillances d'usure – quel que soit l'usage qui en est fait – avant un certain temps d'utilisation (freins, pneus). Dans ce cas, la fonction de répartition de la loi de Weibull

$$F(x) = 0 \qquad \text{pour } x < \gamma$$

laisse prévoir l'existence d'une utilisation minimale garantie γ.

Ayant trouvé la courbe en trait plein du graphique, nous nous proposons de la transformer en droite (cf. figure).

Nous choisissons une zone de forte courbure et nous prenons :

$$y_1 = -3{,}6$$

$$y_2 = -2{,}6$$

$$y_3 = -1{,}6$$

On a bien :

$$y_3 - y_2 = 1 \; ; y_2 - y_1 = 1 \; ; y_3 - y_1 = 2 \, .$$

On lit alors les abscisses des trois points A, B, C :

$$t_1 = 96$$

$$t_2 = 112$$

$$t_3 = 144$$

d'où :

$$\gamma = \frac{t_2^2 - t_1 \cdot t_3}{2t_2 - (t_1 + t_3)} = \frac{112^2 - 96 \times 144}{224 - (96 + 144)} = 80$$

Après la translation de $\gamma = 80$ des points A, B, C on trouve les points A', B' et C' alignés sur une droite de pente $\beta = 1,4$

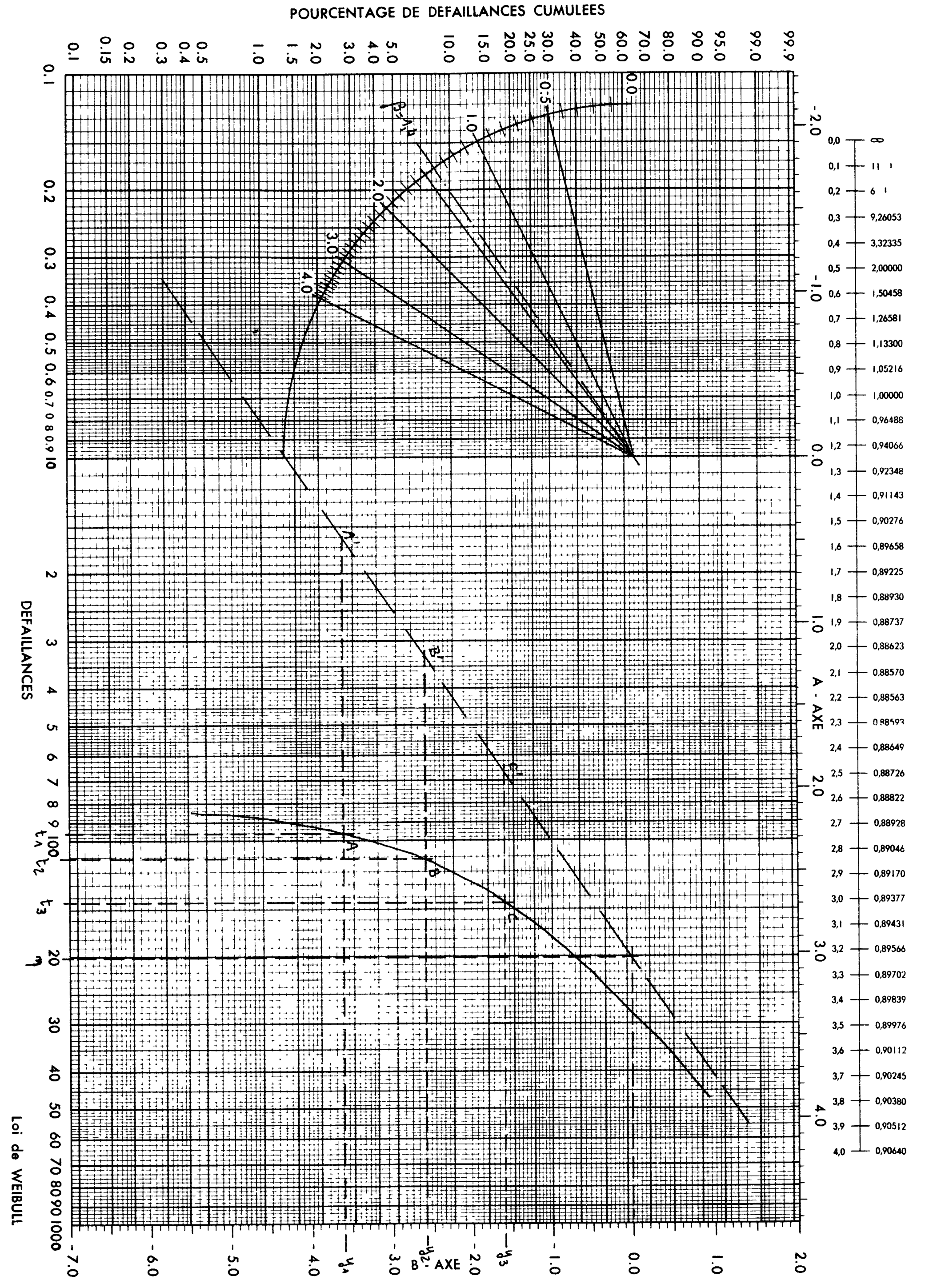
avec $\eta = 195$

REFERENCES

[1] MARCOVICI & VIGIER – "Cours de fiabilité du Centre de Perfectionnement Technique de Rueil-Malmaison" – 1973

[2] CHAPOUILLE et de PAZZIS – Fiabilité des systèmes, Masson 1968.

[3] SCHWOB et PEYRACHE – Traité de fiabilité, Masson 1969.



POURCENTAGE DE DEFAILLANCES CUMULEES
DEFAILLANCES
Loi de WEIBULL
A - AXE
B AXE