Revue de statistique appliquée

A. Vessereau

Note sur les intervalles statistiques de dispersion

Revue de statistique appliquée, tome 20, n° 1 (1972), p. 67-87

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1972__20_1_67_0>

NOTE SUR LES INTERVALLES STATISTIQUES DE DISPERSION

A. VESSEREAU

Un intervalle statistique de dispersion est un intervalle, calculé à partir d'un échantillon d'effectif n, tel qu'on puisse affirmer, avec un niveau de confiance fixé $1 - \alpha$, qu'il contient au moins une fraction p de la population dont provient l'échantillon. L'intervalle dépend des 3 paramètres n, p, α.

L'intervalle peut être bilatéral ; il est alors limité par deux quantités (aléatoires) L_i, L_s, appelées "limites statistiques de dispersion"; la fraction p s'applique à l'intervalle (L_i, L_s).

Si l'intervalle est unilatéral, la fraction p s'applique, soit à l'intervalle $(-\infty, L_s)$, soit à l'intervalle $(L_i, +\infty)$.

On suppose que les individus constituant l'échantillon ont été prélevés au hasard, et indépendamment, dans une population normale de paramètres (m, σ).

La détermination d'un intervalle statistique de dispersion a été étudiée, dans le cas où m et σ sont inconnus, notamment par :

- BOWKER dans EISENHART, HASTEY and WALLIS : "Selected Techniques of Statistical Analysis"
  Mac Graw Hill 1947
- JOHNSON and WELCH : "Applications of the non central t-distribution"
  Biometrika 47 (1960) p. 93/104
- WALD and WOLFOWITZ : "Tolerance limits for a normal distribution"
  Annals of Mathematical Statistics 17 (1946) p. 208/215
- BOWKER : "Computation of factors for tolerance limits on a normal distribution when the sample is large"
  Annals of Mathematical Statistics 17 (1946) p. 208/240

En notant $\bar{x}$ et s les estimations de m et σ, l'intervalle est de la forme

$$\bar{x} \pm ks \qquad \text{(intervalle bilatéral)}$$

$$\bar{x} + ks \quad \text{ou} \quad \bar{x} - ks \qquad \text{(intervalle unilatéral)}$$

Des tables donnant (ou permettant de calculer facilement) le coefficient k se trouvent dans :

- BOWKER dans EISENHART, HASTAY and WALLIS : "Selected Techniques of Statistical Analysis"
  Mac Graw Hill 1947
  Tables pour le cas bilatéral

- OWEN : "Handbook of Statistical Tables"
  Addison Wesley 1962
  Cas bilatéral et cas unilatéral

- DIXON and MASSEY : "Introduction to Statistical Analysis"
  Mac Graw Hill 1968 (3ème édition)
  Cas bilatéral

- HAHN : "Statistical intervals for a normal population"
  Journal of Quality Technology 1970 n° 3, p. 115/25
  Cas bilatéral et cas unilatéral

Par contre, nous n'avons trouvé nulle trace dans la littérature du cas où un seul des deux paramètres, m ou σ, est inconnu.

(Lorsque les deux paramètres sont connus, les intervalles sont des intervalles certains : intervalle unilatéral $m + u_{1-p}\,\sigma$, ou $m - u_{1-p}\,\sigma$; intervalle bilatéral $m \pm u_{\frac{1-p}{2}}\,\sigma$).

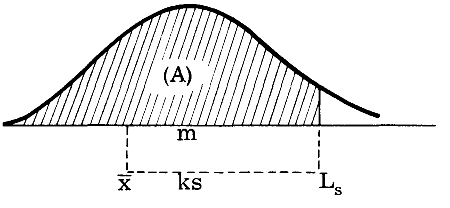
Dans cet article :

- on rappelera le principe de la détermination d'un intervalle statistique de dispersion lorsque m et σ sont inconnus, et l'on donnera des tables simplifiées, suffisantes pour la plupart des applications pratiques,

- on étudiera le cas où un seul des paramètres est inconnu.

1 - INTERVALLES STATISTIQUES DE DISPERSION, m et σ INCONNUS

Les estimations de m et σ sont $\bar{x}$ et $s = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$



1.1 - Intervalle unilatéral

La limite $L_s = \bar{x} + ks$, (ou $L_i = \bar{x} - ks$) est telle que, dans la distribution normale (m, σ), l'aire (A) soit au moins égale à p, avec une probabilité $1 - \alpha$.

$$\Pr[A \geq p] = 1 - \alpha \qquad \Pr[A \leq p] = \alpha$$

$$A = \int_{\infty}^{\bar{x}+ks} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2} dx = F\left[\frac{\bar{x} - m + ks}{\sigma}\right]$$

F désignant la fonction de répartition de la variable normale réduite.

Le coefficient k est donc défini par la relation :

$$\boxed{\Pr\left[F\left(\frac{\bar{x} - m}{\sigma} + k\frac{s}{\sigma}\right) \leqslant p\right] = \alpha} \qquad (1)$$

En désignant par u la variable normale réduite, et par $\chi(\nu)$ la variable χ à $\nu = n - 1$ degrés de liberté, cette relation s'écrit :

$$\Pr\left[F\left(\frac{u}{\sqrt{n}} + k\frac{\chi(\nu)}{\sqrt{\nu}}\right) \leq p\right] = \alpha$$

soit

$$\Pr\left[\frac{u}{\sqrt{n}} + k\frac{\chi(\nu)}{\sqrt{\nu}} \leq u_p\right] = \alpha \qquad (u_p = \text{fractile d'ordre } p \text{ de } u)$$

ou encore

$$\Pr\left[\frac{u - \sqrt{n}\, u_p}{\chi(\nu)/\sqrt{\nu}} \leq -k\sqrt{n}\right] = \alpha$$

$\frac{u - \sqrt{n}\, u_p}{\chi(\nu)/\sqrt{\nu}}$ est la variable t décentrée, à ν degrés de liberté et paramètre de décentrement égal à $-\sqrt{n}\, u_p$. D'où :

$$\Pr\left[t'(\nu, -\sqrt{n}\, u_p) \leq -k\sqrt{n}\right] = \alpha$$

D'où l'on tire :

$$\boxed{k = -\frac{1}{\sqrt{n}} t'_{\alpha}(\nu, -\sqrt{n}\, u_p)} \qquad (2)$$

t'_{α} étant le fractile d'ordre α de la variable t décentrée.

On trouvera en annexe 1 une table des valeurs de k pour p = 0,90 ; 0,95 ; 0,99 et $1 - \alpha$ = 0,95 ; 0,99 (d'après Owen, op.cit).

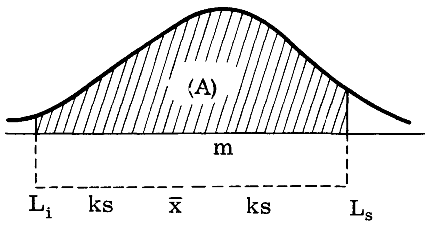
1.2 - Intervalle bilatéral

Les limites $L_i = \bar{x} - ks$, $L_s = \bar{x} + ks$ sont telles que :

$$\Pr[A \leq p] = \alpha$$

D'où :

$$\boxed{\Pr\left[F\left(\frac{\bar{x} - m}{\sigma} + k\frac{s}{\sigma}\right) - F\left(\frac{\bar{x} - m}{\sigma} - k\frac{s}{\sigma}\right) \leq p\right] = \alpha} \qquad (3)$$



On notera que l'intervalle ainsi défini est symétrique par rapport à $\bar{x}$, mais qu'il n'est pas symétrique en probabilité : il n'y a pas une proportion $\frac{1-p}{2}$ à gauche de L_i et une proportion $\frac{1-p}{2}$ à droite de L_s.

Pour $n > 10$, Hald (Statistical Theory with engeneering applications) donne pour k l'expression approchée ci-après :

$$\boxed{k \sim \left(1 + \frac{1}{2n}\right) u_{\frac{1+p}{2}} \Big/ \frac{\chi_\alpha(\nu)}{\sqrt{\nu}}} \qquad (4)$$

$\chi_\alpha(\nu)$ étant le fractile d'ordre α de la variable χ à $\nu = n - 1$ degrés de liberté.

On trouvera en annexe 2 une table des valeurs de k pour $p = 0,90$; $0,95$; $0,99$ et $1 - \alpha = 0,95$; $0,99$ (d'après Bowker, op. cit).

Nota - Owen et Fawley ont calculé des intervalles bilatéraux tels que simultanément, au niveau de confiance $1 - \alpha$, une proportion au plus égale à p_1 soit inférieure à $\bar{x} - k_1 s$ et une proportion au plus égale à p_2 soit supérieure à $\bar{x} + k_2 s$. Pour $p_1 = p_2 = \frac{1-p}{2}$, on obtient ainsi des intervalles symétriques en probabilité et par rapport à $\bar{x}$. Ces intervalles sont légèrement plus grands que les précédents (Owen and Frawley : "Factors for tolerance limits which control both tails of the normal distribution". Journal of Quality Technology 1971 n° 2 p. 69/79).

2 - INTERVALLES STATISTIQUES DE DISPERSION, m CONNU, σ INCONNU

La moyenne étant connue, l'estimation de σ est $s = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - m)^2}{n}}$

2.1 - Intervalle unilatéral

La relation (1) dans laquelle $\bar{x}$ est remplacé par m donne immédiatement :

$$\Pr\left[F\left(k\frac{s}{\sigma}\right) \leq p\right] = \alpha$$

D'où $\left(\frac{s}{\sigma} = \frac{\chi(\nu)}{\sqrt{\nu}},\ \nu = n\right)$:

$$\boxed{k = u_p \Big/ \frac{\chi_\alpha(\nu)}{\sqrt{\nu}}} \qquad (5)$$

Les valeurs de k s'obtiennent facilement à l'aide d'une table des fractiles de la variable $\chi(\nu)/\sqrt{\nu}$ (par exemple : Hald, Statistical Tables and Formulas). Elles sont données en Annexe (Table 3).

2.2 - Intervalle bilatéral

La relation (3) ou $\bar{x}$ est remplacé par m, donne

$$\Pr\left[F\left(k\frac{s}{\sigma}\right) - F\left(-k\frac{s}{\sigma}\right) \leq p\right] = \alpha$$

$$\Pr\left[2\ F\left(k\frac{s}{\sigma}\right) \leq 1 + p\right] = \alpha$$

$$\boxed{k = u_{\frac{1+p}{2}} \frac{\chi_\alpha(\nu)}{\sqrt{\nu}}} \qquad (6)$$

Là encore, les valeurs de k s'obtiennent facilement à l'aide d'une table des fractiles de la variable $\chi(\nu)/\sqrt{\nu}$. Elles sont données en Annexe (Table 4).

On notera que, lorsque m est connu, l'intervalle est symétrique en probabilité - La valeur de k, bilatéral pour une proportion p, est égale à la valeur de k unilatéral pour une proportion $\frac{1+p}{2}$.

3 - INTERVALLES STATISTIQUES DE DISPERSION, m INCONNU, σ CONNU

Les intervalles sont de la forme $\bar{x} \pm k\sigma$

3.1 - Intervalle unilatéral

La relation (1) dans laquelle s est remplacé par σ donne immédiatement :

$$\boxed{k = u_p + \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}} \qquad (7)$$

Les valeurs de k sont données en Annexe (Table 5).

3.2 - Intervalle bilatéral

La relation (3) s'écrit :

$$\Pr\left[F\left(\frac{u}{\sqrt{n}}+k\right)-F\left(\frac{u}{\sqrt{n}}-k\right)\leq p\right]=\alpha$$

$$\Pr\left[F\left(k+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)+F\left(k-\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\leq 1+p\right]=\alpha$$

Les valeurs de k qui satisfont à cette relation (Table 6 de l'Annexe) ont été calculées de la façon suivante :

$$\Pr\left[2\,F(k)+\int_k^{k+\frac{u}{\sqrt{n}}}f(x)\,dx+\int_k^{k-\frac{u}{\sqrt{n}}}f(x)\,dx\leqslant 1+p\right]=\alpha\quad\left(f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

Posant :

$$H(u)=\int_k^{k+\frac{u}{\sqrt{n}}}f(x)\,dx$$

cette relation s'écrit :

$$\Pr\left[H(u)+H(-u)+2\,F(k)-p-1\leqslant 0\right]=\alpha$$

Développant H(u) en série de Taylor, on trouve, par un calcul qui ne présente pas de difficultés

$$H(u)+H(-u)=-k\,f(k)\left[\frac{u^2}{n}+\frac{k^2-3}{12n^2}(u^2)^2+\frac{k^4-10\,k^2+15}{360n^3}(u^2)^3+\dots\right]$$

$$\left(f(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{k^2}{2}}\right)$$

D'où la relation :

$$\Pr\left[\frac{u^2}{n}+\frac{k^2-3}{12n^2}(u^2)^2+\frac{k^4-10k^2+15}{360n^3}(u^2)^3+\dots\leqslant\frac{2F(k)-p-1}{k\,f(k)}\right]=1-\alpha\qquad(8)$$

La résolution de cette équation en k, pour différentes valeurs de n (on ne considérera que les valeurs au moins égales à 5), et pour les différentes situations ($p = 0,90$; $0,95$; $0,99$), ($1-\alpha = 0,95$; $0,99$), peut s'effectuer en cherchant des valeurs approchées de k à partir du seul terme en u^2, ces valeurs étant ensuite améliorées en tenant compte du terme en $(u^2)^2$ et éventuellement du terme en $(u^2)^3$.

Lorsqu'on limite le développement du terme en u^2, la relation (8) s'écrit :

$$\Pr\left[\frac{u^2}{n}\leq\frac{2F(k)-p-1}{k\,f(k)}\right]=1-\alpha$$

d'où l'on déduit :

$$\boxed{2F(k) - p - 1 = \frac{k\ f(k)}{n}\ (u^2)_{1-\alpha}} \qquad (9)$$

$(u^2)_{1-\alpha}$ étant le fractile d'ordre $1 - \alpha$ de la variable u^2 (variable χ^2 à 1 degré de liberté).

Il est plus commode d'exprimer n en fonction de k :

$$n = \frac{k\ f(k)}{2F(k) - p - 1}\ (u^2)_{1-\alpha} \qquad (10)$$

La plus petite valeur de k est 1,645, qui correspond à p = 0,90 et $n = \infty$. En donnant à k des valeurs espacées de 0,01 (1,65 ; 1,66 ; 1,67,..) on détermine des valeurs de n qui, inversement fournissent des valeurs approchées de k pour n = 5, 6, 7, ...

Lorsqu'on introduit le terme en $(u^2)^2$, la relation (9) prend la forme

$$\boxed{2F(k) - p - 1 = k\ f(k)\ \frac{(u^2)_{1-\alpha}}{n}\left[1 + \frac{k^2 - 3}{12n}\ (u^2)_{1-\alpha}\right]} \qquad (11)$$

Ayant calculé les valeurs approchées de k à partir de la relation (9), on les améliore au moyen de la relation (11). Au-dessus d'une certaine valeur de n, le terme correctif figurant dans (11) devient négligeable.

Enfin, lorsqu'on tient compte du terme en $(u^2)^3$ la relation qui détermine k s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned}2F(k) - p - 1 = k\ f(k)\ \frac{(u^2)_{1-\alpha}}{n}\Bigg[1 &+ \frac{k^2 - 3}{12n}\ (u^2)_{1-\alpha} + \ldots \\ &\ldots + \frac{k^4 - 10k^2 + 15}{360n^2}\ ((u^2)_{1-\alpha})^2\Bigg]\end{aligned}} \qquad (12)$$

On constate en fait que l'introduction du terme en $(u^2)^3$ n'a pour effet que de modifier légèrement la 2ème décimale de k, et uniquement pour les plus faibles valeurs de $n (n < 10)$.

Cette méthode de détermination des valeurs du coefficient k est assez laborieuse. Je dois à M. MORLAT la méthode ci-après qui est plus simple (et aussi plus satisfaisante).

La relation qui définit k est :

$$\Pr\left[F\left(\frac{u}{\sqrt{n}} + k\right) - F\left(\frac{u}{\sqrt{n}} - k\right) \leq p\right] = \alpha \qquad (13)$$

où u est la variable normale réduite.

Posant $Z(u) = F\left(\frac{u}{\sqrt{n}} + k\right) - F\left(\frac{u}{\sqrt{n}} - k\right)$
on constate que la variable aléatoire Z(u) est une fonction paire de u, et que, lorsque u croit de 0 à $+\infty$, Z(u) est constamment décroissant (de 2F(K) - 1 à 0). Il en résulte que le quantile d'ordre α de u est :

$$[Z(u)]_\alpha = Z(u_{1-\frac{\alpha}{2}})$$

et la relation (13) s'écrit :

$$F\left(\frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} + k\right) - F\left(\frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} - k\right) = p$$

Les valeurs de k - pour les différentes combinaisons (p, α, n) peuvent donc s'obtenir à partir d'une table de la fonction de répartition de la variable normale réduite.

On observe aussi que k est le même (p étant fixé) pour les valeurs de α et n telles que

$$\frac{u^2_{1-\alpha/2}}{n}$$

reste constant. Pour les valeurs de α, α = 0,05 et α = 0,01, on a :

$$\left(\frac{u_{0,995}}{u_{0,975}}\right)^2 = \left(\frac{2,58}{1,96}\right)^2 = 1,73$$

On a donc la même valeur de k pour n et α = 0,05, et pour n' = 1,73 n et α = 0,01 - par exemple n = 10, n' = 17 - n = 20, n' = 35 - etc.., comme on peut le constater sur la table des valeurs de k.

4 - TABLEAU RESUME DES VALEURS DE k SOUS LES DIFFERENTES HYPOTHESES ENVISAGEES

Le tableau ci-après permet, notamment, de constater l'influence sur la valeur de k, de la connaissance de l'un des paramètres, m ou σ, de la distribution. La comparaison de ces situations peut être faite de façon plus complète sur les 6 graphiques donnés en Annexe.

	I = inconnu C = connu		Intervalles Unilatéraux						Intervalles Bilatéraux					
			$1 - \alpha = 0,95$			$1 - \alpha = 0,99$			$1 - \alpha = 0,95$			$1 - \alpha = 0,99$		
	m	σ	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99
n = 5	I	I	3,41	4,21	5,75	-	-	-	4,28	5,08	6,63	6,61	7,86	10,26
	C	I	2,68	3,44	4,86	3,85	4,94	6,99	3,44	4,10	5,38	4,94	5,89	7,74
	I	C	2,02	2,38	3,06	2,32	2,69	3,37	2,16	2,52	3,20	2,44	2,80	3,48
n = 10	I	I	2,36	2,91	3,98	3,05	3,74	5,08	2,84	3,38	4,43	3,58	4,27	5,59
	C	I	2,04	2,62	3,71	2,53	3,25	4,60	2,62	3,12	4,10	3,25	3,88	5,09
	I	C	1,80	2,17	2,85	2,02	2,38	3,06	1,93	2,28	2,95	2,11	2,47	3,14
n = 20	I	I	1,93	2,40	3,30	2,28	2,81	3,83	2,31	2,75	3,62	2,66	3,17	4,16
	C	I	1,74	2,23	3,16	1,99	2,56	3,62	2,23	2,66	3,50	2,56	3,05	4,00
	I	C	1,65	2,01	2,69	1,80	2,17	2,85	1,80	2,13	2,79	1,90	2,25	2,91
n = 50	I	I	1,65	2,07	2,86	1,82	2,27	3,12	2,00	2,38	3,13	2,16	2,58	3,39
	C	I	1,54	1,97	2,79	1,66	2,13	3,02	1,97	2,35	3,09	2,13	2,54	3,34
	I	C	1,51	1,88	2,56	1,61	1,97	2,66	1,71	2,03	2,67	1,75	2,08	2,73
n = 100	I	I	1,53	1,93	2,68	1,64	2,06	2,85	1,87	2,23	2,93	1,98	2,36	3,10
	C	I	1,45	1,86	2,63	1,53	1,97	2,78	1,86	2,22	2,92	1,97	2,34	3,08
	I	C	1,45	1,81	2,49	1,51	1,88	2,56	1,68	2,00	2,62	1,70	2,02	2,66
n = 200	I	I	1,45	1,84	2,57	1,52	1,92	2,68	1,80	2,14	2,82	1,87	2,22	2,92
	C	I	1,40	1,79	2,54	1,45	1,86	2,63	1,79	2,14	2,81	1,86	2,22	2,91
	I	C	1,40	1,76	2,44	1,45	1,81	2,49	1,66	1,98	2,60	1,67	1,99	2,62

Table 1

Intervalle statistique de dispersion unilatéral m, σ inconnus

$$\bar{x} + ks \text{ ou } \bar{x} - ks \qquad \left(s^2 = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}\right)$$

valeurs du coefficient k(n, p 1 - α)

	$1 - \alpha = 0,95$			$1 - \alpha = 0,99$		
n	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99
5	3,41	4,21	5,75			
6	3,01	3,71	5,07	4,41	5,41	7,33
7	2,76	3,40	4,64	3,86	4,73	6,41
8	2,58	3,19	4,36	3,50	4,29	5,81
9	2,45	3,03	4,14	3,24	3,97	5,39
10	2,36	2,91	3,98	3,05	3,74	5,08
11	2,28	2,82	3,85	2,90	3,56	4,83
12	2,21	2,74	3,75	2,77	3,41	4,63
13	2,16	2,67	3,66	2,68	3,29	4,47
14	2,11	2,61	3,59	2,59	3,19	4,34
15	2,07	2,57	3,52	2,52	3,10	4,22
16	2,03	2,52	3,46	2,46	3,03	4,12
17	2,00	2,49	3,41	2,41	2,96	4,04
18	1,97	2,45	3,37	2,36	2,91	3,96
19	1,95	2,42	3,33	2,32	2,86	3,89
20	1,93	2,40	3,30	2,28	2,81	3,83
22	1,89	2,35	3,23	2,21	2,73	3,73
24	1,85	2,31	3,18	2,15	2,66	3,64
26	1,82	2,27	3,13	2,10	2,60	3,56
28	1,80	2,24	3,09	2,06	2,55	3,50
30	1,78	2,22	3,06	2,03	2,52	3,45
35	1,73	2,17	2,99	1,96	2,43	3,33
40	1,70	2,13	2,94	1,90	2,37	3,25
45	1,67	2,09	2,90	1,86	2,31	3,18
50	1,65	2,07	2,86	1,82	2,27	3,12
60	1,61	2,02	2,81	1,76	2,20	3,04
70	1,58	1,99	2,77	1,72	2,15	2,98
80	1,56	1,97	2,73	1,69	2,11	2,93
90	1,54	1,94	2,71	1,66	2,08	2,89
100	1,53	1,93	2,68	1,64	2,06	2,85
150	1,48	1,87	2,62	1,57	1,97	2,74
200	1,45	1,84	2,57	1,52	1,92	2,68
250	1,43	1,81	2,54	1,50	1,89	2,64
300	1,42	1,80	2,52	1,48	1,87	2,61
400	1,40	1,78	2,49	1,45	1,84	2,57
500	1,39	1,76	2,48	1,43	1,81	2,54
1000	1,35	1,73	2,43	1,38	1,76	2,47
∞	1,28	1,64	2,33	1,28	1,64	2,33

Table 2

Intervalle statistique de dispersion bilatéral, m, σ inconnus

$$\bar{x} \pm ks \quad \left(s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \right)$$

valeurs du coefficient k(n, p, 1 - α)

	$1 - \alpha = 0,95$			$1 - \alpha = 0,99$		
n	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99
5	4,28	5,08	6,63	6,61	7,86	10,26
6	3,71	4,41	5,78	5,34	6,35	8,30
7	3,37	4,01	5,25	4,61	5,49	7,19
8	3,14	3,73	4,89	4,15	4,94	6,47
9	2,97	3,53	4,63	3,82	4,55	5,97
10	2,84	3,38	4,43	3,58	4,27	5,59
11	2,74	3,26	4,28	3,40	4,05	5,31
12	2,66	3,16	4,15	3,25	3,87	5,08
13	2,59	3,08	4,04	3,13	3,73	4,89
14	2,53	3,01	3,96	3,03	3,61	4,74
15	2,48	2,95	3,88	2,95	3,51	4,61
16	2,44	2,90	3,81	2,87	3,41	4,49
17	2,40	2,86	3,75	2,81	3,35	4,39
18	2,37	2,82	3,70	2,75	3,28	4,31
19	2,84	2,78	3,66	2,70	3,22	4,23
20	2,31	2,75	3,62	2,66	3,17	4,16
22	2,26	2,70	3,54	2,58	3,08	4,04
24	2,23	2,65	3,48	2,52	3,00	3,95
26	2,19	2,61	3,43	2,47	2,94	3,87
28	2,16	2,58	3,39	2,43	2,89	3,79
30	2,14	2,55	3,35	2,39	2,84	3,73
35	2,09	2,49	3,27	2,31	2,75	3,61
40	2,05	2,45	3,21	2,25	2,68	3,52
45	2,02	2,41	3,17	2,20	2,62	3,44
50	2,00	2,38	3,13	2,16	2,58	3,39
60	1,96	2,33	3,07	3,10	2,51	3,29
70	1,93	2,30	3,02	2,06	2,45	3,23
80	1,91	2,27	2,99	2,03	2,41	3,17
90	1,89	2,25	2,96	2,00	2,38	3,13
100	1,87	2,23	2,93	1,98	2,36	3,10
150	1,83	2,18	2,86	1,91	2,27	2,98
200	1,80	2,14	2,82	1,87	2,22	2,92
250	1,78	2,12	2,79	1,84	2,19	2,88
300	1,77	2,11	2,77	1,82	2,17	2,85
400	1,75	2,08	2,74	1,79	2,14	2,81
500	1,74	2,07	2,72	1,78	2,12	2,78
1000	1,71	2,04	2,68	1,74	2,07	2,72
∞	1,64	1,96	2,58	1,64	1,96	2,58

Table 3

Intervalle statistique de dispersion unilatéral, m connu, σ inconnu

$$m + ks \text{ ou } m - ks \left(s^2 = \frac{\Sigma(x_i - m)^2}{n} \right)$$

valeurs du coefficient $k(n, p, 1 - \alpha)$

	$1 - \alpha = 0,95$			$1 - \alpha = 0,99$		
n	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99
5	2,68	3,44	4,86	3,85	4,94	6,99
6	2,46	3,15	4,46	3,36	4,31	6,10
7	2,30	2,96	4,18	3,05	3,91	5,53
8	2,19	2,81	3,98	2,82	3,63	5,13
9	2,11	2,71	3,83	2,66	3,41	4,83
10	2,04	2,62	3,71	2,53	3,25	4,60
11	1,99	2,55	3,61	2,43	3,12	4,42
12	1,94	2,49	3,52	2,35	3,02	4,26
13	1,90	2,44	3,46	2,28	2,93	4,14
14	1,87	2,40	3,40	2,22	2,85	4,03
15	1,84	2,36	3,34	2,17	2,79	3,94
16	1,82	2,33	3,30	2,13	2,73	3,86
17	1,79	2,30	3,26	2,09	2,68	3,79
18	1,77	2,28	3,22	2,05	2,63	3,74
19	1,76	2,25	3,19	2,02	2,60	3,67
20	1,74	2,23	3,16	1,99	2,56	3,62
22	1,71	2,20	3,11	1,95	2,50	3,53
24	1,69	2,17	3,06	1,91	2,45	3,46
26	1,66	2,14	3,02	1,87	2,40	3,40
28	1,65	2,11	2,99	1,84	2,36	3,34
30	1,63	2,10	2,96	1,82	2,33	3,29
35	1,60	2,05	2,90	1,76	2,26	3,20
40	1,57	2,02	2,86	1,72	2,21	3,13
45	1,55	1,99	2,82	1,69	2,17	3,07
50	1,54	1,97	2,79	1,66	2,13	3,02
60	1,51	1,94	2,74	1,62	2,08	2,94
70	1,49	1,91	2,71	1,59	2,04	2,89
80	1,48	1,89	2,68	1,57	2,01	2,84
90	1,46	1,88	2,65	1,55	1,99	2,81
100	1,45	1,86	2,63	1,53	1,97	2,78
150	1,42	1,82	2,57	1,48	1,90	2,68
200	1,40	1,79	2,54	1,45	1,86	2,63
250	1,38	1,78	2,51	1,43	1,83	2,59
300	1,37	1,76	2,49	1,42	1,82	2,57
400	1,36	1,75	2,47	1,40	1,79	2,53
500	1,35	1,74	2,45	1,38	1,78	2,51
1000	1,33	1,71	2,41	1,35	1,74	2,45
∞	1,28	1,64	2,33	1,28	1,64	2,33

Table 4

Intervalle statistique de dispersion bilatéral, m connu, σ inconnu

$$m \pm ks \quad \left(s^2 = \frac{\Sigma (x_i - m)^2}{n}\right)$$

valeurs du coefficient $k(n, p, 1 - \alpha)$

	$1 - \alpha = 0,95$			$1 - \alpha = 0,99$		
n	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99
5	3,44	4,10	5,38	4,94	5,89	7,74
6	3,15	3,75	4,93	4,32	5,14	6,76
7	2,96	3,52	4,63	3,91	4,66	6,12
8	2,81	3,35	4,41	3,63	4,32	5,68
9	2,71	3,22	4,24	3,41	4,07	5,35
10	2,62	3,12	4,10	3,25	3,88	5,09
11	2,55	3,04	3,99	3,12	3,72	4,89
12	2,49	2,97	3,90	3,02	3,59	4,72
13	2,44	2,91	3,83	2,93	3,49	4,58
14	2,40	2,86	3,76	2,85	3,40	4,46
15	2,36	2,82	3,70	2,79	3,32	4,36
16	2,33	2,78	3,65	2,73	3,25	4,27
17	2,30	2,74	3,61	2,68	3,19	4,20
18	2,28	2,71	3,57	2,63	3,14	4,13
19	2,25	2,69	3,53	2,60	3,09	4,06
20	2,23	2,66	3,50	2,56	3,05	4,00
22	2,20	2,61	3,44	2,50	2,98	3,91
24	2,17	2,58	3,39	2,45	2,91	3,83
26	2,14	2,55	3,35	2,40	2,86	3,76
28	2,12	2,52	3,31	2,36	2,82	3,70
30	2,10	2,50	3,28	2,33	2,78	3,65
35	2,05	2,45	3,21	2,26	2,70	3,54
40	2,02	2,41	3,16	2,21	2,63	3,46
45	1,99	2,38	3,12	2,17	2,58	3,39
50	1,97	2,35	3,09	2,13	2,54	3,34
60	1,94	2,31	3,04	2,08	2,48	3,26
70	1,91	2,28	3,00	2,04	2,43	3,20
80	1,89	2,26	2,96	2,01	2,40	3,15
90	1,88	2,24	2,94	1,99	2,37	3,11
100	1,86	2,22	2,92	1,97	2,34	3,08
150	1,82	2,17	2,85	1,90	2,26	2,97
200	1,79	2,14	2,81	1,86	2,22	2,91
250	1,78	2,12	2,78	1,83	2,19	2,87
300	1,76	2,10	2,76	1,82	2,16	2,84
400	1,75	2,08	2,74	1,79	2,13	2,81
500	1,74	2,07	2,72	1,78	2,12	2,78
1000	1,71	2,04	2,67	1,74	2,07	2,72
∞	1,64	1,96	2,58	1,64	1,96	2,58

Table 5

Intervalle statistique de dispersion unilatéral, m inconnu, σ connu

$\bar{x} + k\sigma$ ou $\bar{x} - k\sigma$

valeurs du coefficient $k(n, p, 1 - \alpha)$

	$1 - \alpha = 0,95$			$1 - \alpha = 0,99$		
n	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99
5	2,02	2,38	3,06	2,32	2,69	3,37
6	1,95	2,32	3,00	2,23	2,59	3,28
7	1,90	2,27	2,95	2,16	2,52	3,21
8	1,86	2,23	2,91	2,10	2,47	3,15
9	1,83	2,19	2,87	2,06	2,42	3,10
10	1,80	2,17	2,85	2,02	2,38	3,06
11	1,78	2,14	2,82	1,98	2,35	3,03
12	1,76	2,12	2,80	1,95	2,32	3,00
13	1,74	2,10	2,78	1,93	2,29	2,97
14	1,72	2,08	2,77	1,90	2,27	2,95
15	1,71	2,07	2,75	1,88	2,25	2,93
16	1,69	2,06	2,74	1,86	2,23	2,91
17	1,68	2,04	2,73	1,85	2,21	2,89
18	1,67	2,03	2,71	1,83	2,19	2,87
19	1,66	2,02	2,70	1,82	2,18	2,86
20	1,65	2,01	2,69	1,80	2,17	2,85
22	1,63	2,00	2,68	1,78	2,14	2,82
24	1,62	1,98	2,66	1,76	2,12	2,80
26	1,60	1,97	2,65	1,74	2,10	2,78
28	1,59	1,96	2,64	1,72	2,08	2,77
30	1,58	1,95	2,63	1,71	2,07	2,75
35	1,56	1,92	2,60	1,67	2,04	2,72
40	1,54	1,91	2,59	1,65	2,01	2,69
45	1,53	1,89	2,57	1,63	1,99	2,67
50	1,51	1,88	2,56	1,61	1,97	2,66
60	1,49	1,86	2,54	1,58	1,95	2,63
70	1,48	1,84	2,52	1,56	1,92	2,60
80	1,47	1,83	2,51	1,54	1,91	2,59
90	1,46	1,82	2,50	1,53	1,89	2,57
100	1,45	1,81	2,49	1,51	1,88	2,56
150	1,42	1,78	2,46	1,47	1,83	2,52
200	1,40	1,76	2,44	1,45	1,81	2,49
250	1,39	1,75	2,43	1,43	1,79	2,47
300	1,38	1,74	2,42	1,42	1,78	2,46
400	1,36	1,73	2,41	1,40	1,76	2,46
500	1,36	1,72	2,40	1,39	1,75	2,43
1000	1,33	1,70	2,38	1,36	1,72	2,40
∞	1,28	1,64	2,33	1,28	1,64	2,33

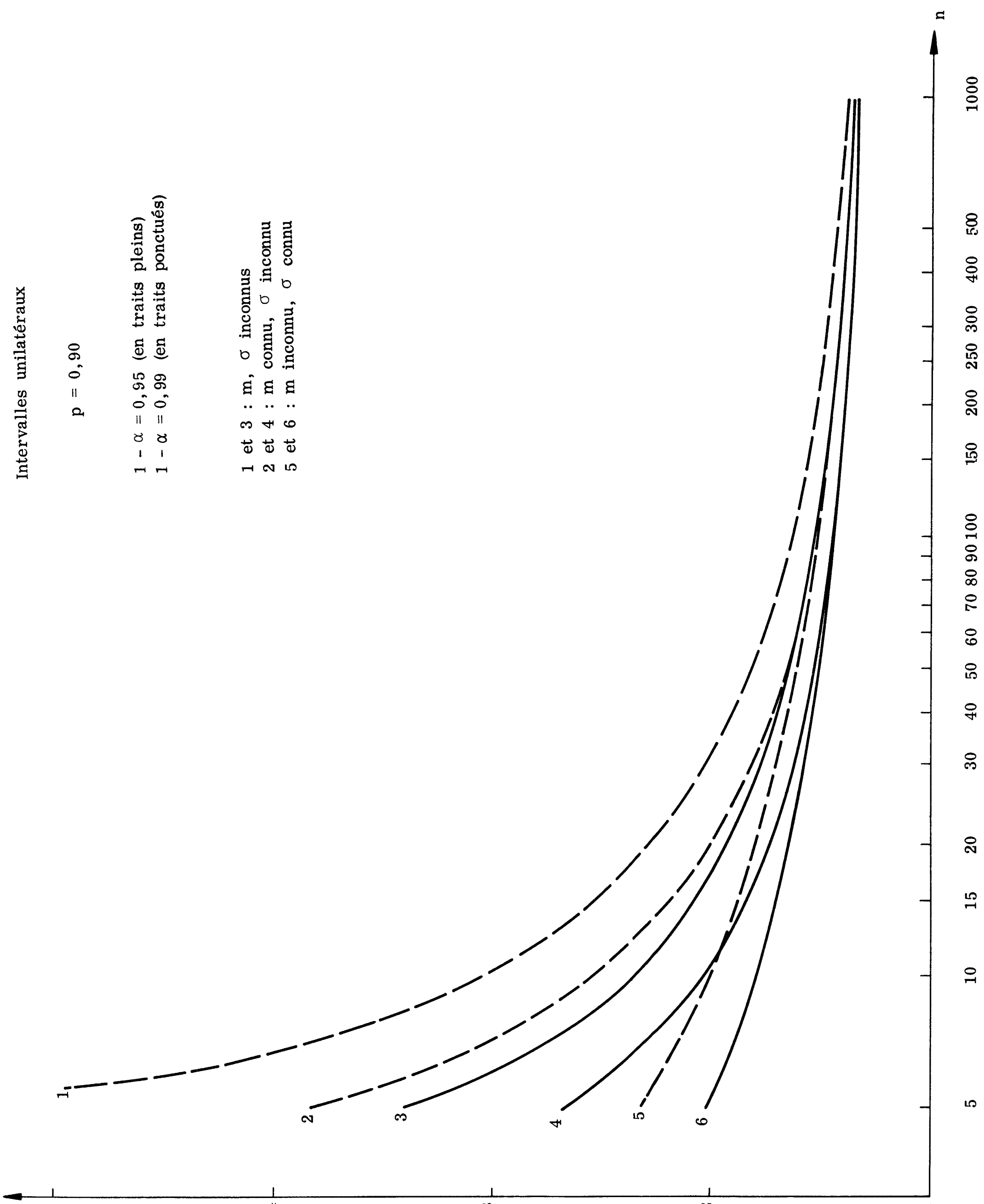
Table 6

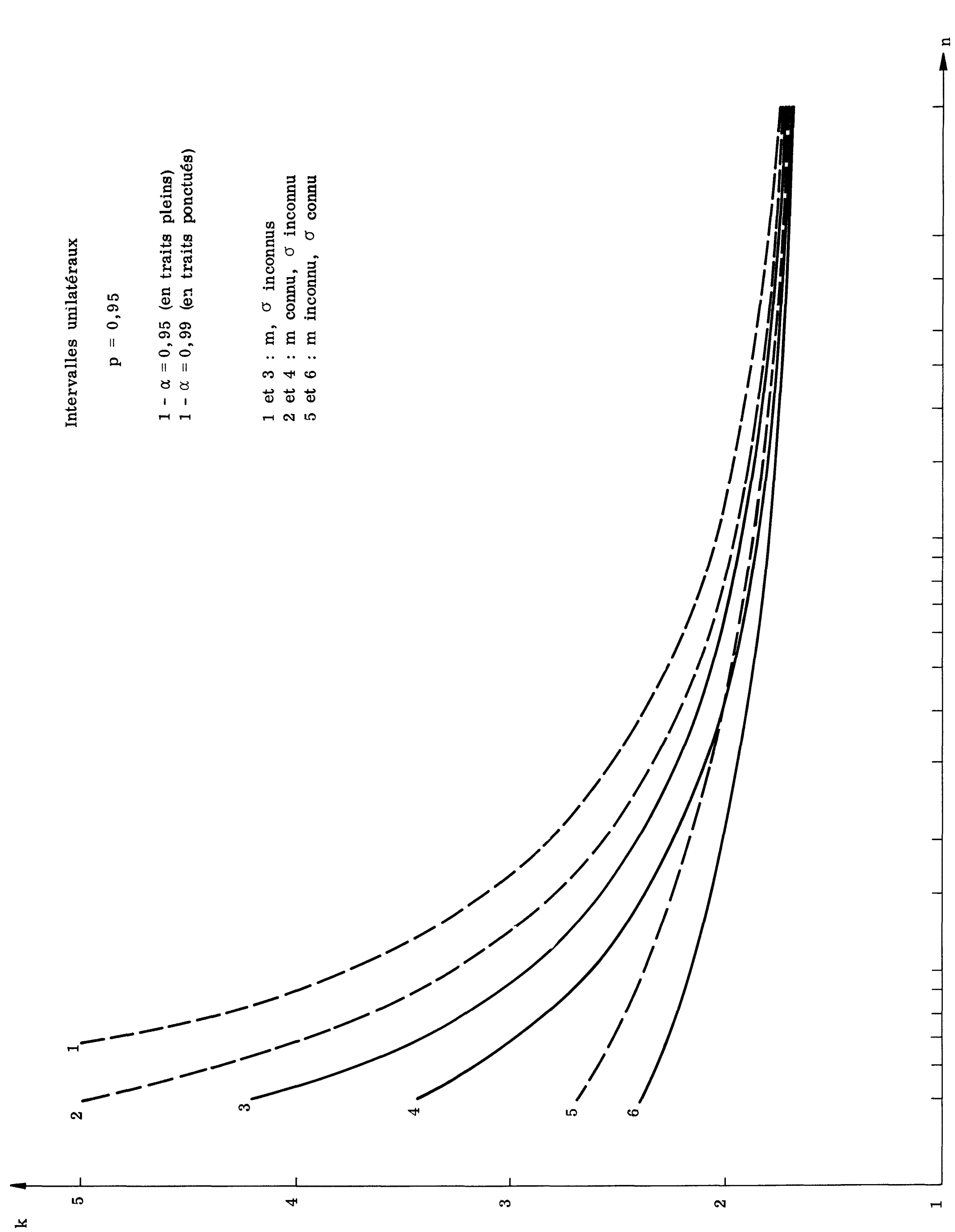
Intervalle statistique de dispersion bilatéral, m inconnu, σ connu

$\bar{x} \pm k\sigma$

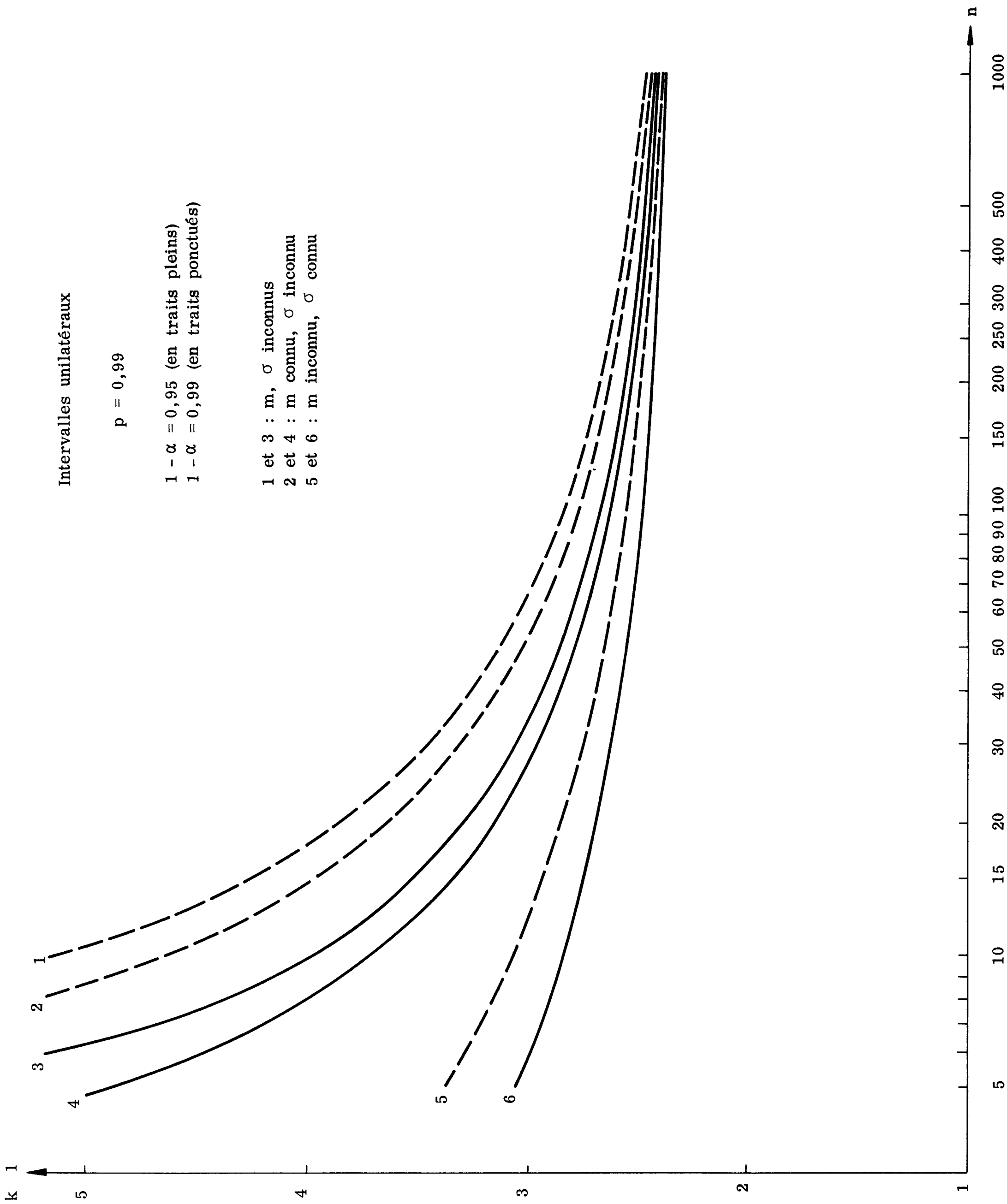
valeurs du coefficient $k(n, p, 1 - \alpha)$

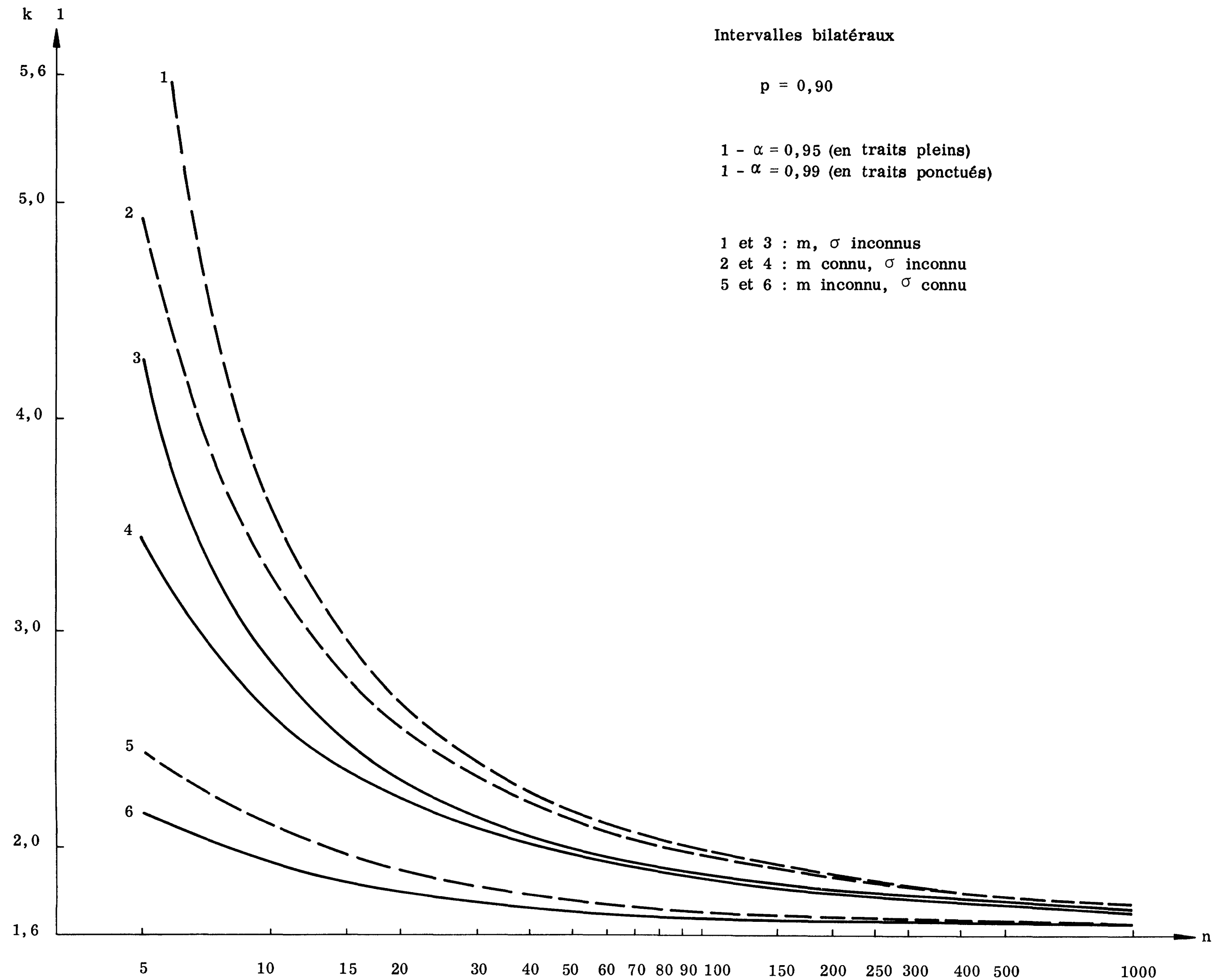
	$1 - \alpha = 0,95$			$1 - \alpha = 0,99$		
n	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99
5	2,16	2,52	3,20	2,44	2,80	3,48
6	2,09	2,45	3,13	2,34	2,70	3,38
7	2,04	2,40	3,07	2,26	2,62	3,30
8	2,00	2,35	3,02	2,20	2,56	3,24
9	1,96	2,31	2,98	2,15	2,51	3,19
10	1,93	2,28	2,95	2,11	2,47	3,14
11	1,91	2,26	2,93	2,07	2,43	3,10
12	1,89	2,24	2,90	2,04	2,40	3,07
13	1,87	2,22	2,88	2,02	2,37	3,04
14	1,86	2,20	2,86	1,99	2,35	3,02
15	1,84	2,19	2,85	1,97	2,33	3,00
16	1,83	2,17	2,83	1,95	2,31	2,98
17	1,82	2,16	2,82	1,94	2,29	2,96
18	1,81	2,15	2,81	1,92	2,27	2,94
19	1,80	2,14	2,80	1,91	2,26	2,93
20	1,80	2,13	2,79	1,90	2,25	2,91
22	1,78	2,12	2,77	1,88	2,22	2,89
24	1,77	2,11	2,76	1,86	2,20	2,87
26	1,76	2,10	2,74	1,84	2,19	2,85
28	1,75	2,09	2,73	1,83	2,17	2,83
30	1,75	2,08	2,72	1,82	2,16	2,82
35	1,73	2,06	2,71	1,79	2,13	2,79
40	1,72	2,05	2,69	1,78	2,11	2,76
45	1,71	2,04	2,68	1,76	2,10	2,74
50	1,71	2,03	2,67	1,75	2,08	2,73
60	1,70	2,02	2,65	1,73	2,06	2,71
70	1,69	2,01	2,64	1,72	2,05	2,69
80	1,68	2,01	2,63	1,71	2,04	2,68
90	1,68	2,00	2,63	1,70	2,03	2,67
100	1,68	2,00	2,62	1,70	2,02	2,66
150	1,67	1,98	2,61	1,68	2,00	2,63
200	1,66	1,98	2,60	1,67	1,99	2,62
250	1,66	1,97	2,60	1,67	1,99	2,61
300	1,66	1,97	2,59	1,66	1,98	2,60
400	1,65	1,97	2,59	1,66	1,98	2,60
500	1,65	1,97	2,59	1,66	1,97	2,59
1000	1,65	1,96	2,58	1,65	1,96	2,58
∞	1,64	1,96	2,58	1,64	1,96	2,58

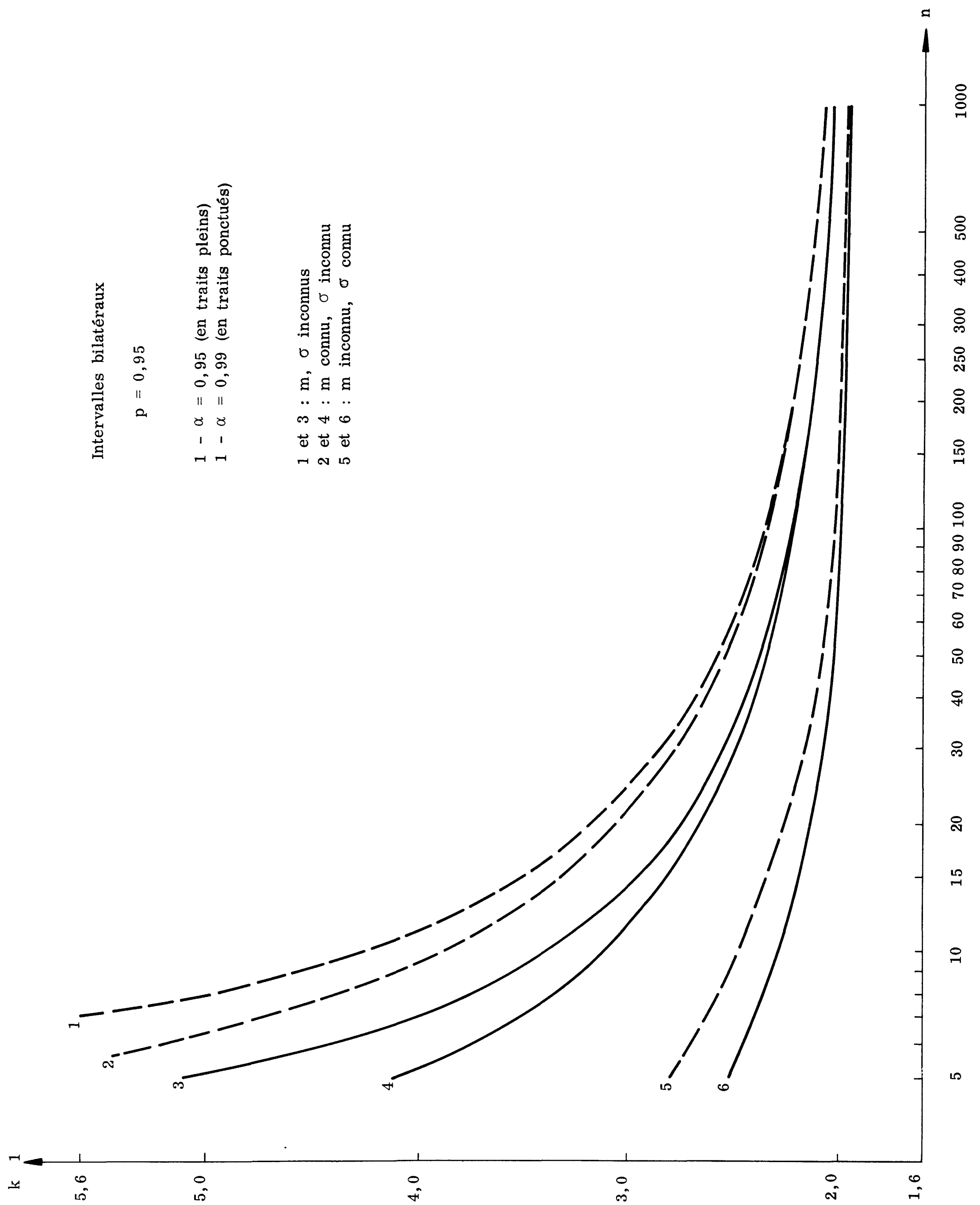

Intervalles unilatéraux
p = 0,90
1 - α = 0,95 (en traits pleins)
1 - α = 0,99 (en traits ponctués)
1 et 3 : m, σ inconnus
2 et 4 : m connu, σ inconnu
5 et 6 : m inconnu, σ connu
k
5
4
3
2
1
n
5
10
15
20
30
40
50
60
70
80
90
100
150
200
250
300
400
500
1000
1
2
3
4
5
6

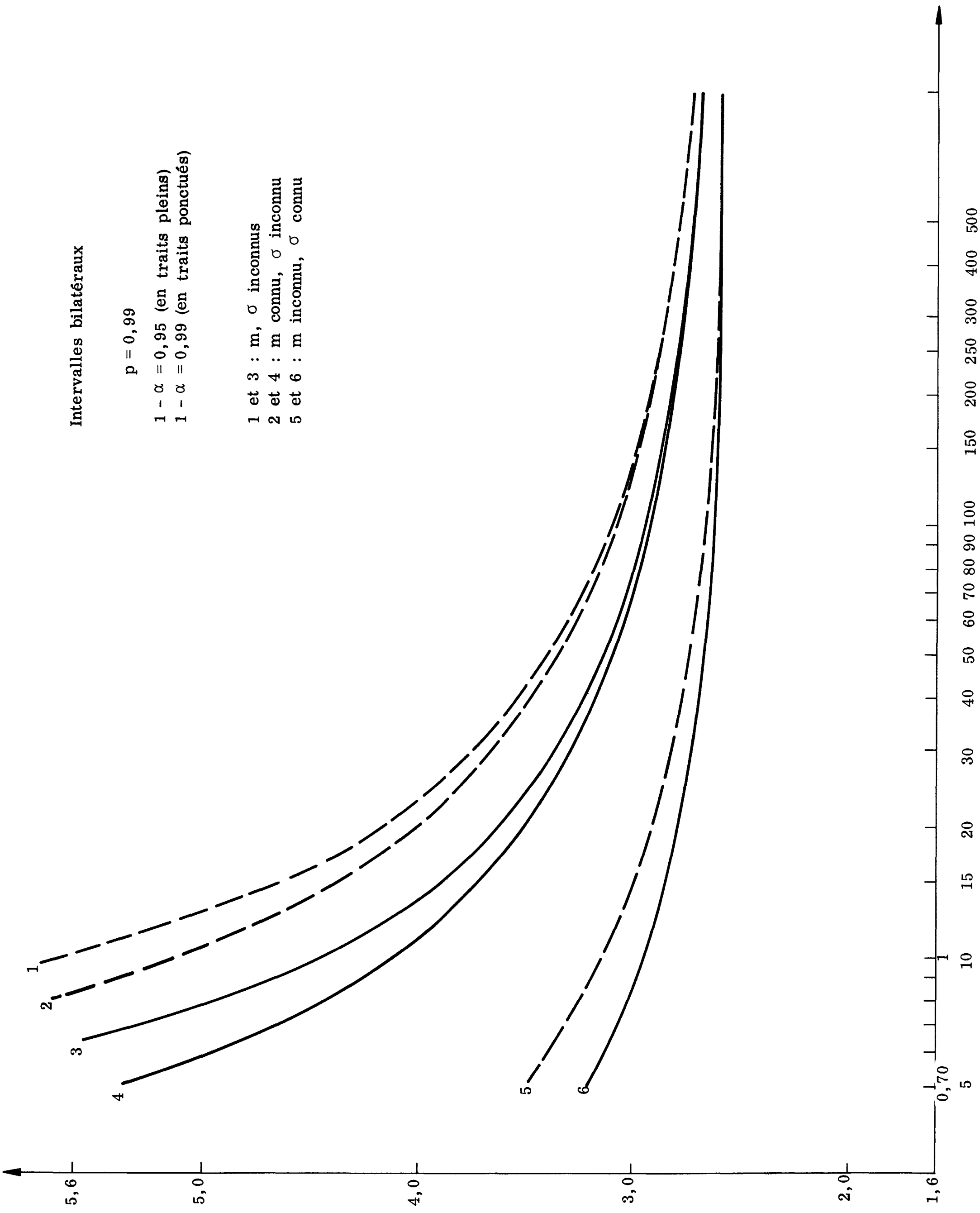


Intervalles unilatéraux
p = 0,95
1 - α = 0,95 (en traits pleins)
1 - α = 0,99 (en traits ponctués)
1 et 3 : m, σ inconnus
2 et 4 : m connu, σ inconnu
5 et 6 : m inconnu, σ connu
k
1
2
3
4
5
n
5
10
15
20
30
40
50
60
70
80
90
100
150
200
250
300
400
500
1000
1
2
3
4
5
6


Intervalles unilatéraux
p = 0,99
1 - α = 0,95 (en traits pleins)
1 - α = 0,99 (en traits ponctués)
1 et 3 : m, σ inconnus
2 et 4 : m connu, σ inconnu
5 et 6 : m inconnu, σ connu
k
n
1
2
3
4
5
6
5
10
15
20
30
40
50
60 70 80 90 100
150
200
250
300
400
500
1000


k 1
5,6
5,0
4,0
3,0
2,0
1,6
1
2
3
4
5
6
5
10
15
20
30
40
50
60
70
80
90
100
150
200
250
300
400
500
1000
n
Intervalles bilatéraux
p = 0,90
1 - α = 0,95 (en traits pleins)
1 - α = 0,99 (en traits ponctués)
1 et 3 : m, σ inconnus
2 et 4 : m connu, σ inconnu
5 et 6 : m inconnu, σ connu


Intervalles bilatéraux
p = 0,95
1 - α = 0,95 (en traits pleins)
1 - α = 0,99 (en traits ponctués)
1 et 3 : m, σ inconnus
2 et 4 : m connu, σ inconnu
5 et 6 : m inconnu, σ connu
k
5,6
5,0
4,0
3,0
2,0
1,6
n
5
10
15
20
30
40
50
60
70
80
90
100
150
200
250
300
400
500
1000
1
2
3
4
5
6


Intervalles bilatéraux
p = 0,99
1 - α = 0,95 (en traits pleins)
1 - α = 0,99 (en traits ponctués)
1 et 3 : m, σ inconnus
2 et 4 : m connu, σ inconnu
5 et 6 : m inconnu, σ connu
1
2
3
4
5
6
5,6
5,0
4,0
3,0
2,0
1,6
0,70
5
10
15
20
30
40
50
60
70
80
90
100
150
200
250
300
400
500