

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

GERMAIN BAUMANN

Solution analytique d'un modèle économétrique

Revue de statistique appliquée, tome 19, n° 3 (1971), p. 67-72

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1971__19_3_67_0

© Société française de statistique, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION ANALYTIQUE D'UN MODÈLE ÉCONOMÉTRIQUE

Germain BAUMANN
Faculté des Sciences de Nancy

INTRODUCTION :

Nous donnons une solution analytique du modèle de SAMUELSON-HICKS ainsi que des coefficients de corrélation et du spectre de fréquences.

Le modèle de SAMUELSON-HICKS [1] est utilisé en économie pour étudier les fluctuations du revenu national autour d'une situation d'équilibre et pour faire des calculs de prévision d'avenir à partir d'une économie en équilibre. C'est un modèle très simple qui donne des calculs faciles [2].

Un autre avantage de ce modèle est la possibilité d'avoir une solution analytique ce qui permet de vérifier les calculs numériques. C'est principalement le cas lorsqu'on utilise ce modèle pour la simulation numérique. On peut alors travailler sur des séries très longues à condition de rester dans les limites de stabilité du modèle [3]

I - MODELE DE SAMUELSON-HICKS.

C'est un modèle économique macrodynamique à accélérateur et à multiplicateur qui permet de calculer le revenu national Y_t pour la période t à partir des valeurs du revenu national Y_{t-1} et Y_{t-2} correspondant respectivement aux périodes $t-1$ et $t-2$. Pour la période t on a, en appelant C_t la consommation, I_t l'investissement et G_t la dépense publique.

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

On introduit le coefficient d'accélération b par l'investissement induit par la relation

$$I_t = b(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + v_t$$

et tenant alors compte des équations économétriques bien connues

$$C_t = c_1 Y_{t-1} + c_2 Y_{t-2} + u_t$$

$$G_t = g Y_{t-1}$$

c_1 , c_2 et g étant des constantes positives,

u_t , v_t des variables aléatoires de distribution connues, de valeur moyenne nulle et ayant une variance constante.

On obtient alors l'équation de SAMUELSON-HICKS

$$(1) \quad Y_t = a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + w_t$$

a_1 , a_2 étant des constantes

w_t variable aléatoire, de valeur moyenne nulle et de variance constante.

donc

$$\sum_{t=1}^n w_t = \langle w_t \rangle = 0$$

$$\sum_{t=1}^n \langle w_t^2 \rangle = \langle w_t^2 \rangle = \sigma^2$$

On peut donc calculer les moyennes :

$$\langle Y_t \rangle = a_1 \langle Y_{t-1} \rangle + a_2 \langle Y_{t-2} \rangle$$

puis décrire successivement les différents termes de la série en fonction des constantes a_1 , a_2 et des termes aléatoires W_t .

On a :

$$Y_0 = w_0$$

$$Y_1 = a_1 w_0 + w_1$$

$$Y_2 = (a_1^2 + a_2) w_0 + a_1 w_1 + w_2$$

$$Y_3 = (a_1^3 + 2 a_1 a_2) w_0 + (a_1 + a_2) w_1 + a_1 w_2 + w_3$$

et d'une façon générale

$$(2) \quad Y_t = b_t w_0 + b_{t-1} w_1 + \dots + b_1 w_{t-1} + b_0 w_t$$

ou les coefficients b_t ont les valeurs

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_1^2 + a_2$$

$$b_3 = a_1^3 + 2 a_1 a_2$$

ce qui conduit à une loi de récurrence pour b_t

$$(3) \quad b_{t+1} = a_1 b_t + a_2 b_{t-1}$$

Cette relation peut se mettre sous la forme

$$\begin{pmatrix} b_{t+1} \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_t \\ b_{t-1} \end{pmatrix}$$

Les solutions de l'équation (3) sont donc données par les valeurs propres X_1 et X_2 de la matrice, soit :

$$\begin{vmatrix} a_1 - X & a_2 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 - a_1 X - a_2 = 0$$

donc

$$b_t = \lambda_1 X_1^t + \lambda_2 X_2^t$$

si

$$a_1^2 + 4 a_2 \neq 0$$

et

$$b_t = (\lambda_1 + t \lambda_2) X^t$$

si

$$a_1^2 + 4 a_2 = 0$$

Les constantes λ_1 , λ_2 sont déterminées par les conditions initiales, à savoir ici :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = b_0 = 1$$

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = b_1 = a_1$$

donc

$$\lambda_1 = \frac{X_1}{X_1 - X_2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{X_2}{X_2 - X_1}$$

Conditions de stabilité :

Pour que le modèle puisse être utilisé pour des problèmes économiques, il faut qu'il remplisse en plus des conditions de stabilité. Nous avons déterminé la région de stabilité [3]. Elle est donnée par la figure 1 [3].

Les racines X_1 et X_2 peuvent donc être réelles ou imaginaires pourvu que le couple a_1 , a_2 soit choisi dans le triangle de stabilité de la figure 1 [3].

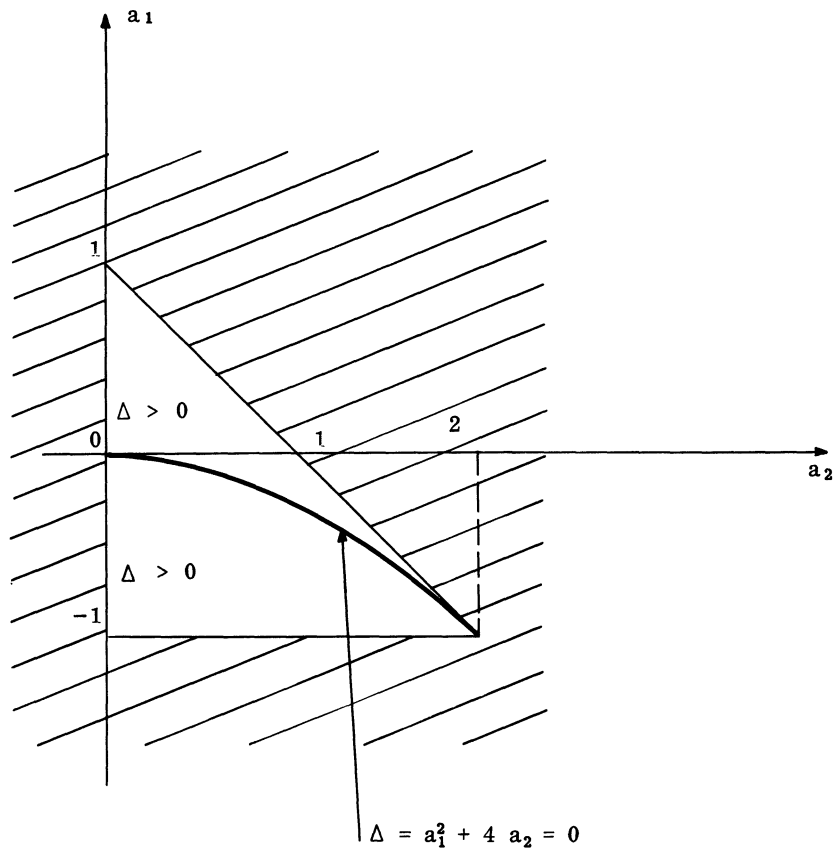


Figure 1 - Triangle de stabilité

La région $\Delta > 0$ correspond aux 2 racines réelles

La région $\Delta < 0$ correspond aux 2 racines imaginaires

La courbe $\Delta = 0$ correspond aux racines doubles

II - COEFFICIENTS DE CORRELATION :

Connaissant la solution analytique pour Y_t , nous pouvons maintenant également calculer les coefficients de corrélation C_T

On a par définition :

$$C_T = \langle Y_{t-T} Y_t \rangle$$

ce qui donne, en remplaçant les Y_t :

$$C_T = (b_0 w_t + b_1 w_{t-1} + \dots + b_{t-1} w_0) (b_0 w_{t-T} + b_1 w_{t-T-1} + \dots + b_{t-T} w_0)$$

Dans le cas $\langle w_t w_s \rangle = 0$ si $s \neq t$, on obtient :

$$C_\tau = \sigma^2 \sum_{k=0}^{k=n-\tau} b_k b_{k+\tau}$$

donc

$$C_\tau = \sigma^2 \sum_{k=0}^{k=n-\tau} (\lambda_1 X_1^k + \lambda_2 X_2^k) (\lambda_1 X_1^{k+\tau} + \lambda_2 X_2^{k+\tau})$$

Dans le cas particulier d'une série infinie la relation donnant C_τ devient, en utilisant l'égalité,

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_1^k X_2^k = \frac{1}{1 - X_1 X_2}$$

$$C_\tau = \sigma^2 [K_1 X_1^\tau + K_2 X_2^\tau]$$

avec

$$K_1 = \frac{\lambda_1^2}{1 - X_1^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{1 - X_1 X_2}$$

$$K_2 = \frac{\lambda_2^2}{1 - X_2^2} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{1 - X_1 X_2}$$

Cette dernière relation peut également être utilisée pour des séries réelles ayant un nombre de termes important. On peut déterminer, dans chaque cas particulier, et en fonction de la valeur des constantes, avec quelle approximation ce remplacement peut être effectué.

III - SPECTRE DE FREQUENCES :

L'analyse d'une série chronologique peut se faire également par l'étude du spectre de fréquence [4], c'est-à-dire :

$$g(\omega) = 2 \sum_{\tau=0}^m C_\tau \exp(-i\omega\tau)$$

ce qui donne pour notre série :

$$g(\omega) = 2 \sigma^2 \sum_{\tau=0}^m \sum_{k=0}^{k=n-\tau} (\lambda_1 X_1^k + \lambda_2 X_2^k) (\lambda_1 X_1^{k+\tau} + \lambda_2 X_2^{k+\tau}) \exp(-i\omega\tau)$$

et pour une série infinie :

$$\int(\omega) = 2 \sigma^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} (K_1 X_1^\tau + K_2 X_2^\tau) \exp(-i\omega\tau)$$

et comme la série est convergente, nous avons :

$$\int(\omega) = \frac{2 \sigma^2 K_1}{1 - X_1 \exp(-i\omega)} + \frac{2 \sigma^2 K_2}{1 - X_2 \exp(-i\omega)}$$

Le cas particulier de la série infinie est très intéressant puisqu'il donne des formules très simples. C'est le cas si on utilise le modèle de SAMUELSON-HICKS pour obtenir des séries chronologiques par simulation numérique, car, avec les ordinateurs actuels, il est aisé d'obtenir et de travailler sur des séries de 500 termes et plus, donc l'approximation est réalisée avec une grande précision.

REFERENCES

- [1] SAMUELSON P.A. - Review of economic statistics XXI p. 75-78 (1939).
HICKS J.R. - Econometrica 5 p. 147-159 (1937).
- [2] NAYLOR T.H. WERTZ K. WONNACOT T.H. - Econometrica 37 p. 333
352 (1969)
- [3] BAUMANN G. - Faculté des Sciences - 54 - NANCY (1970)
- [4] GRANGER C.W.J. HATANAKA H. - "Spectral analysis of economic time series". Princeton University - Princeton (1964).