Revue de statistique appliquée

Daniel Bernoulli

Exposé d'une théorie nouvelle sur l'évaluation du risque

Revue de statistique appliquée, tome 19, n° 3 (1971), p. 5-18
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1971__19_3_5_0>

EXPOSÉ D'UNE THÉORIE NOUVELLE SUR L'ÉVALUATION DU RISQUE [1]

Daniel BERNOULLI

1. Depuis le temps où les mathématiciens se sont mis à l'étude de l'évaluation du risque, la proposition qui suit a rencontré un assentiment général : les valeurs espérées se calculent en multipliant chaque gain possible par le nombre des possibilités de l'atteindre, et en divisant la somme des produits obtenus par le nombre total des cas possibles, étant bien observé qu'il importe, dans cette théorie, que les cas considérés aient tous la même probabilité. Si l'on admet cette règle, il reste, dans le cadre de ladite théorie, à énumérer toutes les variantes possibles, à les décomposer en cas d'égale probabilité, et enfin à les distribuer suivant des classes correspondantes.

2. Un examen adéquat des nombreuses démonstrations qui ont été données de la proposition ci-dessus, fait apparaître que toutes reposent sur une même hypothèse, savoir que, dès lors qu'il n'existe pas de raison d'admettre que de deux personnes qui se trouvent en présence de risques identiques[2], chacune s'attendra à une satisfaction plus large de ses propres désirs, les risques considérés par chacune devront être regardés comme d'égale valeur.

----

(1) Traduit du Latin en Anglais par Dr. Louise Sommer, American University, Washington, D.C., de "Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis", Commentaires de l'Académie Impériale des Sciences de Petersbourg, Tome V 1738, pages 175-192. Le professeur Karl Menger, Illinois Institute of Technology a rédigé les notes 4, 9, 10 et 15.

NOTE DE L'EDITEUR : En raison de la fréquence de la mention du mémoire de Bernoulli dans les études économiques récentes, il a été jugé opportun de le rendre plus accessible en publiant une traduction en Anglais. Dans sa traduction, le professeur Sommer s'est efforcé autant que possible de conserver l'esprit XVIIIe siècle de l'original. La notation mathématique et la plupart de la ponctuation ont été reproduits sans changement. Des références à la littérature récente touchant la théorie de Bernoulli se trouvent à la fin du présent article.

NOTE DU TRADUCTEUR : J'apprécie hautement l'assistance de Karl Menger, professeur de Mathématiques, Illinois Institute of Technology, qui fait autorité au sujet du problème de Bernoulli, pour la révision de cette traduction, et son avis d'expert. J'exprime aussi ma gratitude à M. William J. Baumol, professeur de Sciences Economiques, Université de Princeton, pour sa précieuse assistance dans l'interprétation du mémoire de Bernoulli à la lumière de l'économétrie moderne. Je désire remercier aussi M. John H. Klingenfeld, économiste au Ministère du Travail, pour sa coopération à la mise au point de la présente traduction. La traduction est fondée sur le texte original en Latin, seul.

Traduction de l'anglais en français par Mr R. Mille, ancien élève de l'Ecole Polytechnique.

(2) C'est-à-dire propositions avec risques (jeux). (Traducteur).

Aucun caractère se rapportant aux personnes elles-mêmes n'est à considérer. Seuls seront à poser avec soin les éléments relevant des termes du risque. Le résultat concerné pourra alors être établi par les juges les plus élevés qu'aura désignés l'autorité publique. Cependant, dans la réalité, ce n'est pas d'un jugement que le besoin se fait sentir, mais de discernement, en d'autres termes de règles établies au moyen desquelles chacun pourrait estimer ses possibilités dans une entreprise comportant des risques, en tenant compte des conditions financières qui lui sont particulières.

§ 3. Pour la clarté de l'exposé, il sera peut-être bon de considérer l'exemple suivant. De quelque façon, une personne très pauvre est mise en possession d'un billet d'une loterie qui peut, avec une égale probabilité lui faire gagner soit rien, soit vingt mille ducats. Cette personne estimera-t-elle sa chance de gain à dix mille ducats ? N'aurait-elle pas tort de céder le billet de loterie pour neuf mille ducats ? Il me semble personnellement qu'il faudrait répondre par la négative. D'un autre côté, j'incline à penser qu'un homme riche serait mal inspiré s'il refusait d'acheter le billet pour neuf mille ducats. Si je ne me trompe, il paraît évident que tout le monde ne peut pas appliquer la règle pour évaluer le jeu. La règle du § 1 doit donc être écartée. Mais toute personne qui considérera le problème avec perspicacité et intérêt, se convaincra que le concept de VALEUR dont nous nous sommes servis dans la règle doit être défini d'une manière qui rende la méthode universellement acceptable sans réserve. Pour ce faire, la détermination de la VALEUR d'un article ne sera pas fondée sur son prix, mais sur l'UTILITE qu'il procure. Le prix d'un article ne dépend que de l'objet lui-même ; il est le même pour toute personne ; en revanche l'utilité dépend des conditions particulières où se trouve la personne qui a la charge de l'évaluation. Ainsi il n'est pas douteux que le gain de mille ducats est plus important pour un homme pauvre que pour un riche, bien que le montant soit le même pour l'un et pour l'autre.

4. L'étude est ainsi arrivée à un point où chacun pourra continuer l'enquête en développant simplement le même exemple. Néanmoins, comme l'hypothèse est entièrement nouvelle, quelques éclaircissements peuvent être opportuns. En conséquence j'ai pris le parti d'expliquer par un exemple, ce que j'ai étudié. Pour le moment nous regarderons comme fondamentale la règle ci-après : si l'utilité de chaque espérance de profit possible est multipliée par le nombre des possibilités de l'obtenir, et si l'on divise la somme des produits obtenus par le nombre total des cas possibles, une UTILITE MOYENNE

... NOTE BIOGRAPHIQUE : Daniel Bernoulli de l'illustre famille suisse de distingués mathématiciens, était né à Groningen, le 29 Janvier 1700 ; il mourut à Bâle le 17 Mars 1782. Il étudia les mathématiques et les sciences médicales à l'Université de Bâle. En 1725, il accepta une invitation à l'académie alors nouvelle de St-Petersbourg, mais revint à Bâle en 1733, pour y être nommé professeur de physique et de philosophie. Bernoulli était membre des académies de Paris, Berlin, St-Petersbourg, et de l'Académie Royale de Londres. Il fut le premier à appliquer l'analyse mathématique au problème du mouvement des corps liquides.

(Au sujet de Bernoulli, voir Dictionnaire manuel des Sciences Naturelles, 2e édition, 1931, pp. 800-801 : "Les mathématiciens bâlois Daniel Bernoulli et Leonhard Euler. Célébration du centenaire de leur mort par la Société d'étude de la nature", Bâle, 1884 (Annexe à la partie VII des archives de cette société) et Correspondance mathématique... édité par Paul Heinrich Fuss, 1843, contenant les lettres écrites par Daniel Bernoulli à Leonhard Euler, Nicolaus Fuss, et C. Goldbach).

ou espérance morale[3], sera obtenue, et le profit qui correspond à cette utilité constituera l'évaluation du risque considéré.

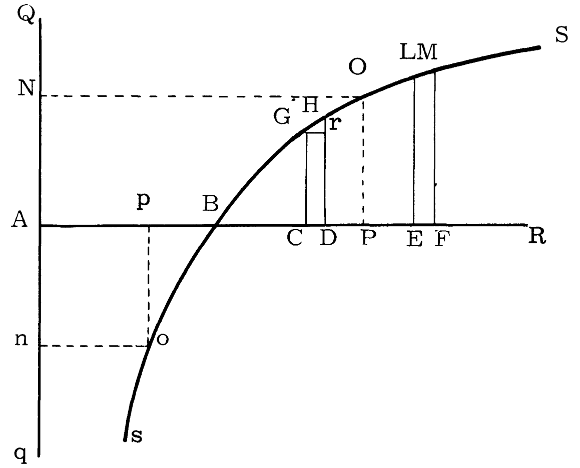
5. Il est ainsi rendu évident que nulle estimation valable d'un risque ne peut être obtenue si l'on ne tient pas compte de son utilité, autrement dit l'utilité qu'un gain, quel qu'il soit, apporte à l'individu, ou bien, réciproquement, de ce qui est désiré pour procurer une utilité donnée. Il paraît difficile d'aller plus loin dans la généralisation parce que l'utilité d'un article peut varier suivant les cas. Ainsi, bien qu'un homme pauvre trouve généralement plus d'utilité qu'un riche à un même gain, on peut cependant imaginer qu'un prisonnier riche, qui possède deux mille ducats, et à qui il faudrait encore deux mille ducats pour recouvrer sa liberté, attribuera plus d'importance à un gain de deux mille ducats qu'un autre homme qui a moins d'argent que lui. On peut imaginer d'innombrables exemples de ce genre, mais ils représentent des exceptions d'une rareté extrême. Il vaudra donc mieux, pour nous, considérer ce qui arrive ordinairement, et pour mieux saisir le problème, nous admettrons qu'il existe une croissance imperceptible dans la richesse individuelle, telle qu'elle s'effectue de manière continue par accroissements infinitesimaux. Il est hautement probable que toute augmentation de la richesse, quelque petite qu'elle soit, se traduira par une augmentation d'utilité qui est inversement proportionnelle à la quantité de biens déjà possédés. Il est nécessaire de définir ici le sens de "quantité de biens" pour expliquer cette hypothèse. Selon moi, cette expression comprend alimentation, habillement, toutes choses propres à rendre la vie plus commode, et même le luxe, et tout ce qui peut contribuer à la satisfaction appropriée de toute sorte de besoin : il n'y a aucune personne de qui on puisse dire qu'elle ne possède rien du tout, à moins qu'elle meure de privations. Pour la grande majorité, la plus estimable partie de ce qui est possédé, selon la définition qui précède, consistera en leur capacité de production, le terme s'étendant jusqu'à, y compris, le talent du mendiant ; un homme qui est capable d'acquérir dix ducats dans l'année en pratiquant la mendicité consentira difficilement à accepter une somme de 50 ducats si la condition est qu'il s'abstiendra de mendier ou de chercher à se procurer de l'argent par tout autre moyen. En effet, il aurait alors à vivre sur la somme, et quand il l'aurait dépensée, son existence viendrait à son terme. Je me demande même si ceux qui ne possèdent pas un centime et sont chargés de dettes accepteraient de se libérer de leurs dettes, ou même de recevoir un don encore plus important sous une semblable condition. Mais si le mendiant était prêt à refuser un tel contrat, à moins qu'on lui paye au minimum cent ducats et si l'homme pourchassé par ses créanciers exigeait mille ducats, nous pourrions dire que le premier est possesseur d'un avoir de cent, et le second de mille ducats, bien qu'en langage ordinaire, le premier ne possède rien, et le second moins que rien.

6. Cette définition étant posée, je reviens à la proposition faite dans le paragraphe précédent, selon laquelle, en l'absence d'éléments insolites, l'utilité résultant de tout petits accroissements de la richesse, est inversement proportionnelle à la quantité de biens possédée antérieurement. Tenant compte de la nature de l'homme, il me semble que l'hypothèse qui précède aurait une validité convenable pour beaucoup de personnes à qui cette comparaison

----

(3) Traduction libre de "emolumentum medium" dans Bernoulli, littéralement utilité moyenne.

peut être appliquée. Peu de personnes seulement ne dépensent pas la totalité de leur revenu annuel. Mais si parmi elles, l'une a une fortune de cent mille ducats, et une autre, une fortune du même nombre de demi-ducats, si la première tire de sa fortune un revenu annuel de cinq mille ducats, pendant que la seconde tire de la sienne le même nombre de demi-ducats, il est clair que pour la première, un ducat a exactement la même importance qu'un demi-ducat pour la seconde, et que par conséquent, le gain d'un ducat n'aura pour la première pas de valeur supérieure au gain d'un demi-ducat pour la seconde. En conséquence, si chacune réalise un gain de un ducat, la deuxième en tire une utilité double, parce qu'elle a été enrichie de deux demi-ducats. Le même raisonnement est applicable à beaucoup d'autres cas, pour lesquels il n'y aura donc pas à en discuter séparément. La proposition est d'autant plus valable pour la majorité des hommes qui n'ont d'autre fortune que leur capacité de travail qui est la source de leur subsistance. A la vérité, il y a des hommes pour qui un ducat a plus d'importance que beaucoup de ducats pour d'autres qui sont moins riches, mais plus généreux qu'eux-mêmes. Des singularités de cette nature ne sont pas à considérer, attendu que nous ne considérons que des cas individuels plus ou moins fréquents. L'homme qui est personnellement moins sensible à un gain supportera plus patiemment une perte. Cependant, il peut en être autrement dans des cas particuliers ; je traiterai donc le cas le plus général, et développerai ensuite notre hypothèse particulière afin de donner satisfaction à chacun.



7. Représentons par AB la quantité de biens initialement possédée. Ayant porté AB, il faut construire une courbe BGLS, dont les ordonnées CG, DH, EL, FM représentent les utilités correspondant aux abscisses BC, BD, BE, BF qui représentent les gains en fortune. En outre, posons m, n, p, q, etc, les nombres des voies par lesquelles les gains en fortune BC, BD, BE, BF, peuvent être obtenus. Alors l'espérance "morale" de la proposition avec risques dont il est question est donnée par

$$PO = \frac{m \cdot CG + n \cdot DH + p \cdot EL + q \cdot FM + \dots}{m + n + p + q + \dots}$$

Elevons AQ perpendiculaire à AR et portons sur cet axe AN = PO. La longueur NO − AB représente le gain qui peut être convenablement espéré, autrement dit la valeur de la proposition en question. Si de plus nous voulons savoir quel enjeu une personne inclinera à risquer sur la proposition avec risques, notre courbe doit s'étendre en direction opposée de telle sorte que l'abscisse Bp corresponde à une perte, et que l'ordonnée po représente la perte correspondante d'utilité. Dans un jeu loyal, la désutilité résultant de la perte doit être égale à l'utilité résultant du gain : nous devons donc admettre que An = AN ou po = PO. Ainsi Bp représentera l'enjeu que ne devront pas dépasser les personnes qui tiendront compte de leur propre position financière.

COROLLAIRE I

8. Jusqu'à présent les scientifiques ont ordinairement fondé leurs hypothèses en considérant que tous les gains doivent être évalués en fonction d'eux-mêmes, autrement dit de leurs qualités intrinsèques, et en considérant que ces gains produiront toujours une utilité proportionnelle au gain. Dans cette hypothèse, la courbe BS devient une droite. Si nous reprenons donc

$$PO = \frac{m \,.\, CG + n \,.\, DH + p \,.\, EL + q \,.\, FM + \ldots}{m + n + m + q + \ldots}$$

et si l'on introduit de part et d'autre les facteurs respectifs, il s'ensuit que :

$$BP = \frac{m \,.\, BC + n \,.\, BD + p \,.\, BE + q \,.\, BF + \ldots}{m + n + p + q + \ldots}$$

ce qui est en conformité avec la règle ordinairement acceptée.

COROLLAIRE II

9. Si AB était infiniment grand, même par rapport à BF, le plus grand gain possible, l'arc BM pourrait être assimilé à un segment de droite infiniment petit. Dans ce cas encore, on peut appliquer la règle ordinaire pour l'évaluation des propositions avec risques, et on peut continuer à la regarder comme approximativement valide, dans les jeux de peu d'importance.

10. Le problème a été ainsi traité de la manière la plus générale. Nous nous tournerons maintenant vers l'hypothèse ci-dessus mentionnée parce qu'elle mérite d'être examinée avant les autres. Tout d'abord il faut rechercher la nature de la courbe sBS dans le cas des conditions posées au paragraphe 7. Nous avons dû considérer des gains infiniment petits, nous regarderons des gains BC et BD à peu près égaux, leur différence CD étant alors infiniment petite. Si nous traçons Gr parallèle à BR, rH représentera le gain d'utilité infiniment petit pour une personne dont la fortune est AC et qui obtient le petit gain CD. Cependant cette utilité est à rapporter non seulement au minuscule gain CD, auquel elle est, toutes autres choses restant égales, proportionnelle, mais encore à AC, fortune préalablement possédée, à laquelle elle est inversement proportionnelle. Nous posons donc AC = x, CD = dx, CG = y, rH = dy et AB = α. Nous obtenons, b désignant une constante $dy = \frac{bdx}{x}$ ou $y = b \log \frac{x}{\alpha}$. La courbe sBS est donc une courbe logarith-

mique, dont la subtangente(4) (définition spéciale à Bernoulli) est en tous points b, et dont l'asymptote est Qq.

11. Comparons maintenant ce résultat avec ce qui a été dit dans le paragraphe 7 : il apparaît que PO = b log AP/AB, CG = b log AC/AB, DH = b log AD/AB, etc. Mais nous avons

$$PO = \frac{m \,.\, CG + n \,.\, DH + p \,.\, EL + q \,.\, FM + \dots}{m + n + p + q + \dots}$$

il s'ensuit que

$$b \log \frac{AP}{AB} = \frac{\left(mb \log \frac{AC}{AB} + nb \log \frac{AD}{AB} + pb \log \frac{AE}{AB} + qb \log \frac{AF}{AB} + \dots\right) :}{(m + n + p + q + \dots)}$$

et par suite, que

$$AP = (AC \,.\, AD \,.\, AE \,.\, AF \,\dots .)$$

et si nous retranchons AB de ceci, la grandeur résiduelle BP représentera la valeur de la proposition avec risques, qui est en question.

12. Le paragraphe qui précède suggère ainsi la règle suivante : tout gain doit être ajouté à la fortune préalable, puis la somme doit être élevée à la puissance correspondant au nombre des voies possibles par lesquelles le gain peut être obtenu ; on fait le produit des termes trouvés. Ensuite on extrait de ce produit une racine dont le degré est donné par le nombre de tous les cas possibles, enfin on retranche du résultat obtenu la fortune préalable ; le résidu représente la valeur de la proposition avec risques qui est en question. Ce principe est essentiel pour l'évaluation de propositions risquées dans des cas variés. Je souhaiterais tirer de là une théorie complète comme cela a été fait pour l'analyse traditionnelle, si des obligations antérieures ne m'empêchaient pas d'entreprendre ce travail si utile et original qu'il soit cependant. Je me contenterai donc, pour le moment, de faire état des points les plus importants parmi ceux qu'un premier coup d'œil m'a rendus perceptibles.

----

(4) La tangente à la courbe $y = b \log \frac{x}{\alpha}$ au point $\left(x_0 , \log \frac{x_0}{\alpha}\right)$ est la droite $y - b \log \frac{x_0}{\alpha} = b/x\ (x - x\ )$. Cette tangente coupe l'axe de $Y (x = 0)$ au point d'ordonnée $b \log \frac{x_0}{\alpha} - b$. Le point de contact de la tangente avec la courbe a l'ordonnée $b \log \frac{x_0}{\alpha}$, comme la projection de ce point sur l'axe des Y. Le segment entre les deux points indiqués sur l'axe Y a la longueur b. Ce segment est la projection du segment de la tangente entre son intersection avec l'axe Y et le point de contact. La longueur de cette projection (égale à b) est ce que Bernoulli appelle ici la "subtangente". De nos jours on entend par sous-tangente de la courbe $y = f(x)$ au point $(x_0 , f(x_0))$ la longueur du segment comptée sur l'axe des X (non des Y) entre son intersection avec la tangente et la projection du point de contact. Cette longueur est $f(x_0)/f'(x_0)$. Dans le cas de la courbe logarithmique, elle est égale à $x_0 \log \frac{x_0}{\alpha}$. (Karl Menger).

13. En premier lieu, il semble que dans beaucoup de jeux, même les plus absolument loyaux, les deux joueurs puissent s'attendre à souffrir d'une perte : c'est là un avertissement de la nature pour détourner du jeu. Ceci résulte de la concavité de la courbe sBS vers BR. En effet, en faisant l'enjeu Bp égal au gain espéré BP, il est clair que la désutilité po qui résulte d'une perte sera toujours supérieure à l'utilité du gain espéré PO. Bien que ce résultat soit évident pour un mathématicien, je l'expliquerai cependant par un exemple, de sorte que tout le monde comprendra. Imaginons donc deux joueurs disposant l'un et l'autre de cent ducats ; chacun mise la moitié de son avoir comme enjeu dans un jeu qui offre les mêmes probabilités aux deux joueurs. Dans cette hypothèse, chacun aura cinquante ducats, plus l'espérance de gagner encore cent ducats en plus. Cependant la somme des valeurs de ces deux valeurs ne s'élève, d'après la règle du paragraphe 12, qu'à $(50 \,.\, 150)^{1/2}$ ou $\sqrt{50 \,.\, 150}$, autrement dit moins de 87 ducats, de sorte que, bien que le jeu soit conduit dans des conditions parfaitement égales pour les deux joueurs, chacun supportera une perte espérée de plus de 13 ducats. Nous devons bien souligner cette vérité, bien qu'elle soit évidente : l'imprudence d'un joueur sera d'autant plus grande que sera grande la part de sa fortune qu'il met en jeu dans un jeu de hasard. Nous allons donc modifier l'exemple précédent en supposant que l'un des joueurs, avant de miser ses cinquante ducats, est possesseur de 200 ducats. Ce joueur a une perte espérée de $200 - \sqrt{150 \,.\, 250}$, un peu plus de 6 ducats.

§ 14. Ainsi, celui qui parie une part de sa fortune, si petite soit-elle, dans un jeu de hasard mathématiquement loyal, se comporte irrationnellement : il peut donc y avoir intérêt à rechercher ce que doit être l'importance de l'avantage dont un joueur doit disposer par rapport à son adversaire, pour éviter toute perte espérée. Considérons un jeu qui soit aussi simple que possible, et défini par deux issues également probables, dont l'une est favorable et l'autre défavorable. Soit a le gain qui sera gagné si l'issue est favorable, et soit x l'enjeu qui sera perdu si le cas est défavorable. Si la quantité initiale de biens possédés est α nous aurons $AB = \alpha$, $BP = a$, $PO = b \log \frac{a + \alpha}{a}$ (voir § 10) et puisque (d'après le paragraphe 7) $po = PO$, il résulte de la nature logarithmique de la courbe que $Bp = \frac{\alpha a}{\alpha + a}$. Mais Bp représente l'enjeu x, donc $x = \frac{\alpha a}{\alpha + a}$ grandeur qui est toujours inférieure à a, gain espéré. Il découle de ceci qu'une personne qui risque toute sa fortune agit en simple d'esprit, quelque élevé que puisse être le gain. Personne n'aura de difficulté à se persuader de ceci, s'il a étudié avec soin les définitions que nous avons données plus haut. En outre, ce résultat éclaire une proposition qui, dans la pratique, est universellement admise : il se peut qu'il soit raisonnable pour certains individus d'investir de l'argent dans une entreprise douteuse, sans ainsi empêcher que ce soit chose déraisonnable pour d'autres.

15. La méthode traditionnellement suivie par des marchands pour s'assurer dans le transport maritime de marchandises semble mériter une attention particulière. Ceci sera de nouveau expliqué par un exemple. Supposons

que Caius(5), marchand de St Petersbourg, a acheté à Amsterdam des marchandises qu'il pourrait vendre pour dix mille roubles s'il en disposait à St Petersbourg. Il donne donc l'ordre de les expédier par mer, et se demande s'il va les assurer ou non. Il est bien informé de ce fait, qu'à cette époque de l'année, sur cent navires qui font route d'Amsterdam à St Petersbourg, la tradition est que cinq se perdent. Cependant il n'y a pas d'assurance disponible à moins de 800 roubles par chargement : c'est un tarif qu'il juge abusivement élevé. La question est alors la suivante : quelle fortune doit posséder Caius, en dehors des marchandises considérées, pour qu'il se persuade de ne pas assurer. Si x représente sa fortune, celle-ci, ajoutée à la valeur de l'espérance de bonne arrivée de ses marchandises est $\sqrt[100]{(x + 10000)^{95} x^5} = \sqrt[20]{(x + 10000)^{19} x}$ dans le cas où il s'abstient. Avec l'assurance sa fortune deviendra avec certitude x + 9200. En égalant ces deux grandeurs nous avons $(x + 10000)^{19} x = (x + 9200)^{20}$ ou, approximativement $x = 5043$. Si donc Caius, en dehors de l'espérance de recevoir ses marchandises, possède une somme supérieure à 5043 roubles, il fera bien de ne pas souscrire d'assurance. Au contraire si sa fortune est moindre que cette somme, il fera bien d'assurer son chargement. Si la question avait été : "Quelle fortune minimum doit être en la possession de l'homme qui propose d'assurer, pour que son comportement soit raisonnable ? Nous devrions répondre comme suit : soit y la fortune cherchée alors

$$y = \sqrt[20]{(y + 800)^{19} . (y - 9200)}$$

approximativement, y = 14243, chiffre qui est tiré de ce qui précède sans calcul supplémentaire. Un homme moins riche serait fou de proposer l'assurance, mais un homme plus riche pourrait être raisonnable en le faisant. Ce qui précède fait clairement voir que l'introduction de cette sorte d'assurance a été utile en ce qu'elle offre des avantages à toutes les personnes intéressées. De même si Caius avait pu obtenir l'assurance pour six cents roubles, il aurait été déraisonnable de refuser si sa fortune était de moins de 20478 roubles, mais il aurait agi trop précautionneusement s'il avait assuré ses marchandises au tarif offert, si sa fortune avait été supérieure à ce montant. D'autre part, un homme agirait en étourdi s'il offrait de garantir ladite assurance pour six cents roubles s'il possède lui-même moins de 29878 roubles. Mais aucun homme, quelque fortuné qu'il soit, ne conduirait convenablement ses affaires s'il assumait personnellement l'assurance pour moins de cinq cents roubles.

16. On peut tirer de cette théorie une autre règle qui peut être utile. C'est la règle selon laquelle il est recommandable de diviser les biens qui sont exposés à un danger en plusieurs parties, plutôt que de les risquer ensemble en totalité. Cette fois encore, je donnerai un exemple. Sempronius possède chez lui des biens valant au total 4000 ducats ; il possède en outre pour 8000 ducats de marchandises en pays étrangers, d'où il n'est possible de les transporter que par mer. L'expérience montre cependant que sur dix navires, un périt. Dans ces conditions, je prétends que si Sempronius confie les 8000 ducats de ses marchandises à un seul navire, l'espérance de ses marchandises vaut 6751 ou $\sqrt[10]{12000^9 . 4000^1} - 4000$.

----

(5) Caius est la forme plus ancienne ; à l'arrière-période romaine on orthographiait Gaius.

Cependant, s'il confiait des parties égales de ses marchandises à deux navires, la valeur de son espérance serait

$$\sqrt[100]{12000^{81} \,.\, 8000^{18} \,.\, 4000} - 4000 = 7033 \text{ ducats .}$$

De cette manière, la valeur des perspectives de succès de Sempronius deviendra d'autant plus favorable que sera plus petite la partie confiée à chaque navire. Toutefois l'espérance ne dépassera jamais 7200 ducats. Cet avis peut également rendre service à ceux qui investissent leur fortune dans des titres étrangers ou autres entreprises risquées.

17. Je suis dans l'obligation de passer sous silence certaines remarques nouvelles, bien qu'elles ne soient pas sans utilité. Bien qu'il soit à la portée d'une personne passablement judicieuse par nature de prendre conscience de beaucoup de choses que j'ai ici expliquées et de les appliquer de sa propre initiative, on ne croira guère qu'il soit possible de résoudre ces problèmes avec la précision dont témoignent nos exemples. Nos propositions s'accordant parfaitement avec l'expérience, il serait erroné d'en faire peu de cas comme si elles n'étaient que des abstractions reposant sur des hypothèses précaires. Ceci est encore confirmé par l'exemple suivant qui a inspiré les réflexions qui précèdent, et dont l'histoire est la suivante. Mon très honorable cousin, l'illustre Nicolas Bernoulli, professeur de l'un et l'autre droits(6) à l'Université de Bâle, soumit un jour cinq problèmes au très distingué mathématicien(7) Montmort(8). Lesdits problèmes sont reproduits dans l'ouvrage "L'analyse sur les jeux de hasard" de M. de Montmort, p. 402. Le dernier desdits problèmes s'énonce comme suit : Pierre lance une pièce et la relance jusqu'à ce qu'elle montre "face" quand elle est au sol. Il convient de donner à Paul un ducat s'il tire "face" au premier jet, deux ducats s'il tire "face" au second jet, quatre au troisième, huit au quatrième et ainsi de suite, de telle manière qu'à chaque jet supplémentaire, soit doublé le nombre de ducats qu'il doit payer. Supposons que nous voulions déterminer l'espérance de Paul. Mon susdit cousin a discuté ce problème dans une lettre adressée à moi pour connaître mon opinion. Bien que le calcul habituel indique(9) que la valeur de l'espérance de Paul est infiniment grande, il y a lieu, disait-il, d'admettre que toute personne à peu près raisonnable serait contente de céder sa chance pour vingt ducats. La méthode de calcul admise

----

(6) Les facultés de Droit des universités européennes continentales délivraient jusqu'à présent le titre de Docteur utriusque juris : Docteur dans l'un et l'autre Droits, droit Romain, et droit canon. (Traducteur).

(7) Cl. = vir Clarissimus, titre de respect. (Traducteur).

(8) Montmort, Pierre Rémond de (1678-1719). Il est ici question de "L'essai d'analyse sur les jeux de hasard", Paris 1708. En annexe à la deuxième édition publiée en 1713, se trouve la correspondance de Montmort avec Jean et Nicolas Bernoulli au sujet des problèmes de chance et de probabilités. (Traducteur).

(9) La probabilité que face tourne au premier jet est 1/2. Comme alors Paul reçoit un ducat, cette probabilité apporte $1/2.1 = 1/2$ ducat à l'espérance. La probabilité que face tourne au second jet est de 1/4. Comme Paul reçoit alors 2 ducats, l'apport à l'espérance est de $1/4.2 = 1/2$. De même pour chaque entier n, la possibilité de face tournant au nème jet apporte $1/2 \,.\, 2^{n-1} = 1/2$ ducat à l'espérance. L'espérance totale de Paul est alors $1/2 + 1/2 + \ldots + 1/2 + \ldots$ indéfiniment. (Karl Menger).

évalue en fait les perspectives de Paul à l'infini, bien que personne ne soit disposé à l'acheter pour un prix raisonnablement élevé. Cependant si nous appliquons notre nouvelle règle à ce problème, nous pouvons voir la solution et démêler le nœud. La solution du problème, d'après nos principes, est la suivante.

18. Le nombre de cas à considérer ici est infini. Dans la moitié des cas, le jeu prendra fin au premier jet, dans un quart des cas il finira au second jet, dans un huitième des cas au troisième, dans un seizième au quatrième, et ainsi de suite(10). Si nous désignons le nombre des cas jusqu'à l'infini par N, il est clair que dans 1/2 N cas, Paul gagnera un ducat, 1/4 N cas où il gagnera deux ducats, 1/8 N cas quatre ducats, 1/16 N cas huit ducats et ainsi de suite indéfiniment. Appelons α la fortune de Paul. La proposition en question aura pour valeur

$$\sqrt[N]{(\alpha + 1)^{N/2} . (\alpha + 2)^{N/4} . (\alpha + 4)^{N/8} . (\alpha + 8)^{N/16} \ldots} - \alpha$$

$$= \sqrt{(\alpha + 1)} . \sqrt[4]{(\alpha + 2)} . \sqrt[8]{(\alpha + 4)} . \sqrt[16]{(\alpha + 8)} \ldots - \alpha .$$

§ 19. D'après cette formule qui évalue le gain espéré de Paul, il résulte que cette valeur augmentera avec la dimension de la fortune de Paul et n'atteindra jamais une valeur infinie, à moins que la fortune de Paul devienne en même temps infinie. Nous déduisons en outre les corollaires suivants. Si Paul n'avait aucune fortune, la valeur de son espérance serait

$$\sqrt[2]{1} . \sqrt[4]{2} . \sqrt[8]{4} . \sqrt[16]{8} \ldots$$

ce qui est précisément égal à deux ducats. S'il possédait dix ducats, sa chance vaudrait à peu près trois ducats ; elle en vaudrait à peu près quatre si sa fortune était de 100 ducats, et six si elle était de mille ducats. Nous voyons ainsi aisément quelle énorme fortune il faudrait à un homme pour

----

(10) Le nombre de cas est infini : on ne peut donc pas partir de la moitié ou du quart des cas, la lettre N dans le raisonnement de Bernoulli n'a pas de sens. Cependant l'espérance de Paul dans l'hypothèse de Bernoulli sur l'évaluation peut être trouvée par la même méthode par laquelle, dans la note 9, l'espérance classique de Paul a été déterminée. Si la fortune de Paul est α ducats, alors selon Bernoulli, il attribue à un gain de 2^{n-1} ducats la valeur $b \log \frac{\alpha + 2^{n-1}}{\alpha}$. Si la probabilité de ce gain est $1/2^n$, son espérance est $b/2^n \log \frac{\alpha + 2^{n-1}}{\alpha}$. L'espérance de Paul résultant du jeu est ainsi

$$\frac{b}{2} \log \frac{\alpha + 1}{\alpha} + \frac{b}{4} \log \frac{\alpha + 2}{\alpha} + \ldots + \frac{b}{2^n} \log \frac{\alpha + 2^{n-1}}{\alpha} + \ldots$$

$$= b \log [(\alpha + 1)^{1/2} (\alpha + 2)^{1/4} \ldots (\alpha + 2^{n-1})^{1/2n} \ldots] - b \log \alpha .$$

Quelle addition D à la fortune de Paul a la même valeur pour lui ? Evidemment $b \log \frac{\alpha + D}{\alpha}$ doit être égal à la susdite donnée. D'où

$$D = (\alpha + 1)^{1/2} (\alpha + 2)^{1/4} \ldots (\alpha + 2^{n-1})^{1/2n} \ldots - \alpha .$$ (Karl Menger)

acheter la chance de Paul pour vingt ducats. Le montant que l'acheteur devrait payer pour cette proposition diffère quelque peu du montant qu'elle vaudrait pour lui s'il en était déjà en possession. Cette différence est extrêmement petite si α (fortune de Paul) est grand, nous pouvons donc considérer les deux termes comme égaux. En désignant le prix d'achat par x, sa valeur peut se déterminer au moyen de l'équation

$$x = \sqrt[2]{(\alpha + 1 - x)} \cdot \sqrt[4]{(\alpha + 2 - x)} \cdot \sqrt[8]{(\alpha + 4 - x)} \cdot \sqrt[16]{(\alpha + 8 - x)} \ldots - \alpha$$

Si α est un grand nombre, une solution à peu près satisfaisante sera donnée par

$$x = \sqrt[2]{\alpha + 1} \cdot \sqrt[4]{\alpha + 2} \cdot \sqrt[8]{\alpha + 4} \cdot \sqrt[16]{\alpha + 8} \ldots - \alpha .$$

Après lecture de ce mémoire à la Société(11) (Académie Impériale des Sciences de Saint Petersbourg) j'en ai adressé une copie à M. Nicolas Bernoulli, afin de connaître son opinion sur la solution que je proposais à la difficulté qu'il signalait. Dans une lettre qu'il m'écrivit en 1732, il m'indiqua qu'il n'était pas mécontent de ma proposition d'évaluation des propositions avec risques, supposée appliquée au cas d'une personne qui a à évaluer ses propres chances. Il pensait toutefois que le cas est différent lorsqu'il s'agit d'une tierce personne qui, à peu près dans la position d'un juge, a à évaluer les chances du participant conformément à l'équité et à la justice. J'ai moi-même examiné ce problème dans le paragraphe 2. Par la suite ce distingué universitaire m'informa que l'illustre mathématicien Cramer(12) avait exposé une théorie sur le même sujet plusieurs années avant la publication de mon mémoire. En effet j'ai trouvé sa théorie tellement semblable à la mienne, que je regarde comme un miracle que nous ayons indépendamment réalisé un accord si étroit sur un sujet de cette sorte. Je crois donc utile de citer les termes dans lesquels Cramer a décrit sa théorie dans une lettre à mon cousin en 1728 ; les voici(13).

"Peut-être me suis-je trompé, mais je crois avoir résolu le problème extraordinaire que vous avez soumis à M. de Montmort par votre lettre du 9 septembre 1713 (problème 5 page 402). Pour simplifier je supposerai que A lance une pièce en l'air et que B s'engage à donner à A un ducat si, au premier jet, la pièce tombe, pile en-dessus ; deux ducats si ceci n'arrive qu'au second jet, 4 ducats au troisième, 8 ducats au quatrième et ainsi de suite. Le paradoxe consiste en ceci, que le calcul indique pour l'équivalent que A doit payer à B une somme infinie. Ceci paraît absurde parce que nulle personne raisonnable ne consentirait à payer 20 ducats comme équivalent. Vous désirez que le désaccord entre le calcul mathématique et l'évaluation vulgaire vous soit expliqué. Je crois que ceci vient du fait que, dans leur théorie, les mathématiciens évaluent l'argent proportionnellement à la quantité, tandis que dans la pratique, les gens de sens commun évaluent l'argent en proportion de l'utilité qu'ils peuvent en tirer. L'espérance mathéma-

----

(11) Le mémoire de Bernoulli a été présenté à l'Académie Impériale des Sciences de Saint Petersbourg. (Traducteur).

(12) Cramer, Gabriel, illustre mathématicien, né à Genève, Suisse, 1704-1752. (Traducteur).

(13) Le passage suivant est en Français dans le texte original. (Traducteur).

tique est rendue infinie par les montants énormes que je puis gagner si la pièce ne tombe pas pile en dessus, sinon tardivement, disons vers le centième ou le millième jet. C'est un fait, si je raisonne en homme de bon sens, que cette somme n'a pas plus d'intérêt pour moi, ne me cause pas plus de plaisir, ne m'incite pas plus à accepter le jeu que ne le ferait une somme ne s'élevant qu'à dix ou vingt millions de ducats. Supposons alors que toute somme supérieure à 10 millions ou, pour simplifier, à 2^{24} = 166777216 ducats peut être regardée comme de valeur égale à 2^{24} ducats, ou, mieux encore, que je ne voudrai jamais gagner plus que cette somme, quelque long que soit le temps qu'il faudra avant que la pièce tombe pile. Dans ce cas, mon espérance est de $1/2.1 + 1/4.2 + 1/8.4 \ldots + \frac{1}{2^{25}}.2^{24} + \frac{1}{2^{26}}.2^{24} + \frac{1}{2^{27}}.2^{24} + \ldots = 1/2 + 1/2 + \ldots + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 12 + 1 = 13$. Ainsi mon espérance morale se réduit à 13 ducats et l'équivalent à payer se réduit dans la même proportion : ce résultat paraît beaucoup plus raisonnable que celui qui le rendrait infini".

Jusque là(14), l'exposé garde quelque chose de vague qui le rend sujet à des arguments contraires. S'il était vrai que le montant 2^{25} apparaisse comme non supérieur à 2^{24}, il ne faudrait pas être attentif au montant qui pourrait être gagné après le 24ème jet : en effet, immédiatement avant de procéder au 25ème jet, j'ai la certitude de ne pas gagner au moins $2^{24} - 1$, (15), montant que d'après la théorie, on peut regarder comme équivalent à 2^{24}. On peut donc dire en toute correction que mon espérance ne vaut que 12 ducats et non pas 13. Cependant, du point de vue de la coïncidence entre le principe de base exposé par l'auteur cité et le mien, ce qui précède n'a évidemment pas pour objet de priver ce principe de toute valeur. J'en reviens à la proposition selon laquelle des personnes raisonnables évalueraient l'argent à raison de l'utilité qu'elles en tirent. Je déclare ceci pour éviter que l'ensemble de la théorie soit erroné. C'est exactement ce que déclare Cramer(16) lorsqu'il exprime, dans ce qui suit, ce que serait précisément notre conclusion. Il continue en ces termes(17) :

"L'équivalent peut se révéler plus petit encore si nous admettons quelque autre hypothèse sur la valeur morale de la richesse. Ce que je viens d'admettre n'est pas entièrement valable, puisque, s'il est vrai que 100 millions procurent plus de satisfaction que ne le font 10, ils n'en donnent pas 10 fois plus. Si, pour l'exemple, nous supposons que la valeur morale de biens est directement proportionnelle à la racine carrée de leur quantité mathématique, par exemple, que la satisfaction procurée par 4 millions est le double de celle que procurent 10 millions, mon espérance psychologique sera

$$1/2\sqrt{1} + 1/4\sqrt{2} + 1/8\sqrt{4} + 1/16\sqrt{8} + \ldots = \frac{1}{2-\sqrt{2}}.$$

----

(14) A partir d'ici le texte est de nouveau traduit du Latin. (Traducteur).

(15) Cette remarque de Bernoulli n'est pas claire. Dans les conditions du jeu, un gain de $2^{24} - 1$, ducats est impossible. Karl Menger.

(16) A traduire par l'éminent Gabriel. (Traducteur).

(17) Le texte ultérieur est en Français. (Traducteur).

Cependant cette grandeur n'est pas l'équivalent que nous cherchons parce que cet équivalent ne serait pas égal à mon espérance morale, mais serait plutôt d'une grandeur telle que l'ennui que me causerait sa perte soit égal à l'espérance morale du plaisir que j'espère tirer de mon gain. Par suite, dans notre hypothèse, l'équivalent doit s'élever à $\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{6-4\sqrt{2}}\right) = 2.9$ ..., ce qui est inférieur à 3, un montant dérisoire, mais que je crois néanmoins plus proche de l'estimation vulgaire que ne l'est la valeur 13".

REFERENCES

Il n'existe qu'une autre traduction du mémoire de Bernoulli.

PRINGSHEIM, Alfred - "Les principes de la théorie moderne de la valeur, Daniel Bernoulli. Essai d'une nouvelle théorie de la détermination de la valeur dans les cas aléatoires" (Specimen Theoriae novae de Mensura Sortis). Traduit du Latin avec commentaires par Alfred Pringsheim, Leipzig, Duncker et Humblot, 1896, Collection de documents anciens et récents des sciences statistiques en tous pays, éditée par L. Brentano et E. Leser, n° 9.

Etudes antérieures du problème de Bernoulli, se reporter à

MALFATTI, Jean-François - "Examen critique d'un problème de probabilité de M. Daniel Bernoulli, et solution d'un autre problème analogue", dans "Mémoires de Mathématiques et Physique de la Société italienne", Vol. I, Vérone 1782, p. 768-824.

Pour études sur le "Paradoxe de Saint Petersbourg", y compris notes sur les discussions ultérieures, voir

MENGER, Karl - "Influence de l'incertitude dans la théorie de la valeur. Considérations annexes à ce que l'on appelle le jeu de Saint Petersbourg". Revue d'Economie Nationale, Vol. 5, 1934.

Ce mémoire du Professeur Menger est l'étude la plus extensive sur la littérature du problème et sur le problème lui-même.

Récemment, l'intérêt pour l'hypothèse de Bernoulli a été excité par sa publication dans

VON NEUMANN, Joh, et OSKAR MORGENSTERN - "Théorie des jeux et Comportement économique", deuxième édition, Princeton, Edition de l'Université de Princeton, 1947, Ch. III et Appendice : "Traitement axiomatique de l'utilité".

Nombreuses références contemporaines et étude sur l'hypothèse de la maximisation de l'utilité, voir

Arrow, KENNETH J. - "Autres approches de la théorie du choix dans les situations avec risques", Econometrica, Vol. 19, Octobre 1951.

Publications plus récentes dans le même domaine.

ALCHIAN, A.A. - "Signification de l'évaluation de l'utilité", American Economic Review, Vol. XLIII, Mars 1953.

FRIEDMAN, M. et SAVAGE L.J. - "L'hypothèse de l'utilité espérée et la possibilité d'évaluer l'utilité", Journal d'Economie Politique, Vol. LX, Décembre 1952.

HERSTEIN I.N., et John MILNOR - "Approche axiomatique à l'évaluation de l'utilité", Econometrica, Vol. 21, Avril 1953.

MARSCHAK J. - "Pourquoi les statisticiens et hommes d'affaires devraient-ils maximiser l'espérance morale ? "Deuxième symposium de Berkeley sur la Statistique Mathématique et la Probabilité, 1953.

MOSTELLER Frederick, et Philip NOGEE - "Evaluation expérimentale de l'utilité", Journal d'Economie Politique, LIX, 5 Octobre 1951.

SAMUELSON Paul A. - "Probabilité, Utilité, et Axiome d'Indépendance", Econometrica, Vol. 20, Octobre 1952.

STROTZ Robert H. - "Utilité Cardinale", Documents et mémoires du soixante cinquième séminaire de l'Association Economique Américaine, Revue économique américaine, Vol. 43, Mai 1953, et commentaire par J. Baumol.

Vues divergentes :

ALLAIS M. - "Les théories de la psychologie du risque de l'Ecole américaine", Revue d'Economie Politique, Vol. 63, 1953.

ALLAIS M. - "Le comportement de l'homme rationnel devant le risque, critique des postulats et axiomes de l'Ecole américaine", Econometrica, Octobre 1953.

Edwards, WARD - "Préférences pour des probabilités dans les jeux", American Journal of Psychology, Vol. 66, Juillet 1953.

Ouvrages se rapportant à Bernoulli :

ANDERSON O. - "Introduction à la statistique mathématique" Wien, J. Springer 1935.

DAVIS H. - "Théorie de l'Econométrie", Bloomington, Ind. Principia Press 1941.

LORIA Gino - "Histoire des mathématiques, de l'aurore de la civilisation au XIXe siècle", seconde édition révisée, Milan U. Hopli, 1950.