

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

VLADIMIR KLEGA

## Caractéristique d'un plan de remplacement systématique

*Revue de statistique appliquée*, tome 19, n° 1 (1971), p. 41-55

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1971\\_\\_19\\_1\\_41\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1971__19_1_41_0)

© Société française de statistique, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# CARACTÉRISTIQUE D'UN PLAN DE REMPLACEMENT SYSTÉMATIQUE

Vladimir KLEGA

Institut National de Recherches  
de Constructions Mécaniques Bechovice près de Prague

## 1 - INTRODUCTION

Considérons un élément, dont le fonctionnement continu se termine par une défaillance, les temps entre défaillances étant aléatoires. Un élément défaillant est instantanément identifié et remplacé par un autre de propriétés identiques : ce processus est connu sous le nom de théorie du renouvellement. Ce processus forme une suite de variables indépendantes, non-négatives et aléatoires distribuées identiquement - dans notre cas ces variables sont des temps entre défaillances - et définies par la fonction de répartition  $F(t)$ , appelée fonction de répartition de défaillance,  $t$  étant le temps de fonctionnement.

A toute valeur de  $t$  pour laquelle  $F(t) < 1$  correspond un taux de défaillance défini par :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (1)$$

où

$$R(t) = 1 - F(t) \quad (2)$$

$f(t)$  étant la dérivée de  $F(t)$ .

Dans cet article nous n'allons considérer que des fonctions  $F(t)$  pour lesquelles  $\lambda(t)$  est une fonction croissante. De telles fonctions sont désignées sous le nom de I F R ([L 1], [L 2] I F R = Increasing Failure Rate).

Parce que la défaillance imprévue d'un élément peut être coûteuse ou peut provoquer des perturbations dans le fonctionnement, il semble rationnel, dans le cas où  $F(t)$  est une fonction I F R, de remplacer l'élément par un autre avant sa défaillance. Cette idée de plan de remplacement a conduit plusieurs auteurs (voir l'introduction, chapitre 3 de [L 1]) à définir différentes espèces de plans de remplacement. Pour apprécier ces plans du point de vue économique, les caractéristiques opérationnelles sont appliquées. Pour certains plans on réussit ensuite à trouver, à l'aide d'une caractéristique opérationnelle convenable, le plan optimum de remplacement.

L'un des plans le plus connu est le plan de remplacement à l'âge, (remplacement systématique) qui est déterminé de la façon suivante : l'élé-

ment est remplacé par un nouveau, soit après défaillance, soit quand le temps de fonctionnement atteint une valeur fixée (nous l'appellerons intervalle de remplacement). Ainsi ce processus de fonctionnement est caractérisé d'une part par les instants où l'on remplace l'élément à cause d'une défaillance, d'autre part par les instants où on le remplace parce qu'il a atteint la limite de remplacement.

En ce qui concerne la caractéristique opérationnelle de ce plan de remplacement, Barlow et Proschan [L 1], [L 3] ont calculé les coûts moyens de fonctionnement dans un intervalle fini  $(0, t)$ .

$$C(t) = c_1 E[N_1(t)] + c_2 E[N_2(t)] , \quad (3)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont respectivement les coûts de remplacement par suite de défaillance et de remplacement préventif et  $E[N_1(t)]$  et  $E[N_2(t)]$  les nombres moyens correspondants de remplacements dans l'intervalle considéré. Dans le cas du fonctionnement dans un intervalle infini, Barlow et Proschan ont proposé la caractéristique opérationnelle.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(t)}{t} \quad (4)$$

c'est-à-dire le coût moyen par unité de temps, et ont montré l'existence d'un temps optimum de remplacement. Leurs travaux furent complétés par Glasser [L 4] en ce qui concerne le calcul de l'intervalle optimum de remplacement dans le cas de la caractéristique (4) pour quelques types particuliers de la fonction de répartition de défaillance (fonction Gaussienne, normale, gamma et de Weibull).

Dans cet article nous voulons définir un plan de remplacement systématique dans des conditions différentes de celles qui ont été introduites par les auteurs mentionnés ci-dessus.

Supposons tout d'abord que le coût du remplacement préventif de l'élément est le même que les coûts du remplacement correctif, c'est-à-dire que  $c_1 = c_2$ . De plus supposons que le fonctionnement est continu, que le temps entre défaillances est le plus long possible, et que les instants planifiés de remplacement préventif de l'élément ne dérangent pratiquement pas le fonctionnement. Ainsi, l'influence de l'intervalle de remplacement sur les coûts  $c_1 + c_2$  de tous les remplacements ne perturbe pas les prévisions économiques.

La condition  $c_1 = c_2$  diminue d'une manière essentielle l'efficacité du plan systématique de remplacement à un point tel que ce plan devient même inefficace. Pour cette raison nous allons définir dans cet article une caractéristique opérationnelle particulière pour juger certains plans en pratique. Une propriété moins intéressante de la caractéristique opérationnelle en question est que les conditions d'existence du temps optimum de remplacement sont limitées. Pour un type particulier de fonction de répartition des défaillances il est nécessaire, pour porter un jugement sur l'efficacité du plan, d'accompagner la caractéristique opérationnelle de caractéristiques partielles qui permettent par exemple de porter aussi un jugement sur la fiabilité du processus de fonctionnement et de vérifier aussi si elle est économiquement possible dans le cas d'un plan effectif, par rapport aux coûts élevés de tous les remplacements. Ceci correspond bien à une analyse du plan de remplacement systématique dans le cas d'une fonction de répartition des défaillances du type de Weibull.

## 2 - CARACTERISTIQUES OPERATIONNELLES

Considérons le plan de remplacement à l'âge défini par les conditions suivantes :

a) Le processus de fonctionnement se situe dans un intervalle croissant infiniment  $(0, \infty)$ .

b) Les coûts de remplacement préventif d'un élément et de remplacement correctif sont identiques et constants, égaux à  $c$ .

c) La fonction de répartition de défaillance  $F$  est une fonction IFR et le taux de défaillance  $\lambda$  est une fonction infiniment croissante.

d) L'intervalle de remplacement  $t$  est fini. (L'intervalle  $t = \infty$  réduit le processus de fonctionnement à un processus sans remplacement préventif).

Désignons par

$$E(t) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{E[N(u, t)]}, \quad (5)$$

le temps moyen entre défaillances successives et par

$$C(t) = c \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[N(u, t)]}{u} \quad (6)$$

les coûts moyens de remplacement par unité de temps,  $N(u, t) = N_1(u, t) + N_2(u, t)$  étant le nombre de remplacements, ( $N_1(u, t)$  le nombre de remplacements correctifs,  $N_2(u, t)$  le nombre de remplacements préventifs) dans un intervalle fini  $(0, u)$  de l'intervalle de fonctionnement et  $E$  la valeur moyenne. Définissons la caractéristique opérationnelle par la relation :

$$Q(t) = \frac{E(t)}{C(t)} \quad (7)$$

que nous appellerons efficacité du plan systématique de remplacement. L'efficacité exprime, à proprement parler, le quotient du temps moyen de fonctionnement entre défaillances et des coûts unitaires de remplacement. L'intervalle optimum de remplacement est, s'il existe, celui qui maximise  $Q(t)$  pour  $t \in (0, \infty)$ .

Nous allons étudier tout d'abord les propriétés des caractéristiques  $E(t)$  et  $C(t)$ . Toutes deux sont des fonctions décroissantes avec  $E(0) = C(0) = \infty$ ,  $\frac{1}{E(\infty)} = \frac{1}{c}$ ,  $C(\infty) = \frac{1}{u}$  si  $E(0)$  existe pour  $f(0) = 0$ . (Dans notre article nous utilisons la relation  $g(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$  pour une fonction  $g(t)$  quelconque, qui n'est pas définie au point 0).

Selon [L 1]

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[N_1(u, t)]}{u} = \frac{F(t)}{\int_0^t R(x) dx} \quad (8)$$

et 
$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E N(u, t)}{u} = \frac{1}{\int_0^t R(x) dx} \quad (9)$$

La fonction (8) est une fonction croissante. Sa première dérivée doit donc être positive

$$\frac{f(t) \int_0^t R(x) dx - F(t) R(t)}{\left[ \int_0^t R(x) dx \right]^2} > 0 ,$$

de sorte que

$$f(t) \int_0^t R(x) dx - F(t) R(t) > 0 ,$$

ou

$$\lambda(t) \int_0^t R(x) dx - F(t) > 0. \quad (10)$$

La fonction située à gauche de l'inégalité (10) est une fonction croissante, parce que sa première dérivée  $\lambda'(t) \int_0^t R(x) dx$  est positive, et parce que sa limite pour  $t \rightarrow 0^+$  est égale à zéro, d'où il résulte que la relation (10) est valable et la fonction (8) est alors une fonction croissante. Il résulte ensuite des expressions (5) et (8), que  $E(t)$  est une fonction décroissante, et on voit directement à partir des relations (6) et (9) que  $C(t)$  possède la même propriété. Les autres propriétés de ces deux fonctions sont évidentes, si l'on utilise la notation courante

$$\mu = \int_0^{\infty} R(x) dx \quad (11)$$

exprimant la durée de vie moyenne d'un élément.

On voit donc que pour un intervalle de remplacement décroissant, la durée moyenne entre défaillances augmente infiniment, mais à condition que les coûts moyens unitaires de remplacement croissent infiniment. L'importance de l'efficacité  $Q(t)$  est ainsi mise en évidence.

Etudions maintenant les propriétés de  $Q(t)$ .

Il faut que :

A - L'efficacité  $Q(t)$  possède un nombre pair (zéro compris) ou impair d'extrêmes dans l'intervalle  $(0, \infty)$ , dans le cas où, dans un certain voisinage à droite du point 0, l'inégalité

$$\lambda(t) > s(t) \quad (12)$$

ou

$$\lambda(t) < s(t) , \quad (13)$$

est satisfaite, et si la relation

$$s(t) = 2 \frac{F(t)}{\int_0^t R(x) dx} \quad (14)$$

existe.

Pour que l'inégalité (12) ou (13) soit satisfaite, il suffit que

$$f(t) > s(t) , \quad (15)$$

ou

$$\lambda(t) < 2 \frac{F(t)}{t} \quad (16)$$

B - Si  $\lambda(0) > 0$ ,  $Q(t)$ , avec  $Q(0) = 0$ , possède dans l'intervalle  $(0, \infty)$  un nombre impair d'extrêmes.

Si  $\lambda(0) = 0$ , nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} Q(0) = \infty \text{ quand } \lambda'(0) = 0 \\ Q(0) \in (0, \infty) \text{ quand } \lambda'(0) \in (0, \infty) \\ Q(0) = 0 \quad \text{''} \quad \lambda'(0) = \infty \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

et les courbes  $\lambda(t)$  et  $s(t)$  possèdent au point 0 un point de contact au moins de premier ordre.

C - L'efficacité  $Q(t)$  possède dans l'intervalle  $(0, \infty)$  un nombre pair (impair) d'extrêmes dans le cas où  $\lambda(0) = 0$ ,  $f(t)$  et ses dérivées sont finies dans un certain voisinage à droite du point 0 et les courbes  $\lambda(t)$  et  $s(t)$  ont au point 0 un point de contact du premier ordre si

$$f''(0) \left( \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \right) 0 , \quad (18)$$

ou un point de contact du deuxième ordre si

$$f'''(0) + 4[f'(0)]^2 \left( \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \right) 0 . \quad (19)$$

### Démonstration

L'extremum de l'efficacité  $Q(t)$  est donné par la solution de l'équation  $Q'(t) = 0$  qui peut être mise sous la forme

$$\lambda(k) = 2 \frac{F(t)}{\int_0^t R(x) dx} \quad (20)$$

La partie droite de l'équation (20) est égale au double de la fonction (8), de sorte que c'est une fonction croissante sensiblement limitée dans l'intervalle  $(0, \infty)$ . Puisque, selon l'hypothèse (C),  $\lambda(t)$  est une fonction infiniment croissante, il en résulte la première partie de l'hypothèse (A). La validité de l'autre partie de l'hypothèse (A) résulte de ce que d'une part  $\lambda(t) > f(t)$  est sensiblement valable pour  $t > 0$ . D'autre part d'après le théorème de la moyenne.

$$\int_0^t R(x) dx = t R(u), \quad 0 < u < t,$$

D'où résulte, pour  $t > 0$ , l'inégalité

$$\int_0^t R(x) dx < t,$$

de sorte que

$$2 \frac{F(t)}{t} < s(t) .$$

Dans la suite nous écrirons en abrégé  $\lim$  pour  $\lim_{t \rightarrow 0^+}$  et nous poserons :

$$V(t) = \int_0^t R(x) dx . \quad (21)$$

Soit maintenant  $\lambda(0) > 0$ . D'après les relations (5) à (9)

$$Q(t) = \frac{\left[ \int_0^t R(x) dx \right]^2}{F(t)} , \quad (22)$$

est vraie, de sorte que

$$\lim Q(t) = 2 \frac{V(0)}{\lambda(0)} = 0 ,$$

et à partir de la relation (14) nous obtenons

$$\lim s(t) = 2 \lambda(0) ,$$

d'où il résulte, que  $s(0) > \lambda(0)$  et que  $Q(t)$  possède un nombre impair d'extrêmes.

Soit  $\lambda(0) = 0$ . A partir de la relation (22), nous obtenons :

$$\lim Q(t) = \frac{2}{\lambda'(0)} \quad (23)$$

Puisque  $\lambda(0) = f(0)$ , il vient :

$$\lim \lambda'(t) = \lim (f^1 R^{-1} + f^2 R^{-2}) = f^1(0) ,$$

et

$$\lim s'(t) = \lim \frac{2}{V^2} (fV - FR) = f^1(0) ,$$

de sorte que  $\lambda'(0) = s'(0)$  et l'hypothèse (B) est alors valable.

Soient maintenant  $\lambda(t)$  et  $s(t)$  les fonctions du premier ordre au point 0, les conditions (C) étant vraies. Puisque

$$\lim \lambda''(t) = \lim (f''R^{-1} + 3 f'fR^{-2} + 2 f^3R^{-3}) = f''(0) \quad (24)$$

$$\lim s''(t) = \lim \frac{2}{V^3} (f'V^2 + fFV + 2 fRV + 2 FR^2) = \frac{2}{3} f''(0) , \quad (25)$$

$\lambda''(0) - s''(0) = \frac{1}{3} f''(0)$  est vraie, et il résulte de l'inégalité (18) que dans un certain voisinage à droite du point 0 l'inégalité (12) ou (13) est satisfaite. De la même manière on va démontrer pour le second ordre des  $\lambda(t)$  et  $s(t)$  la validité de l'hypothèse (C). En effet les relations

$$\left. \begin{aligned} \lim \lambda''(t) &= f''(0) + 3 [f'(0)]^2 \\ \lim s''(t) &= \frac{1}{2} f''(0) + [f'(0)]^2 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

sont valables et par conséquent toutes les propriétés de l'efficacité  $Q(t)$ , mentionnées plus haut, sont démontrées.

### 3 - EFFICACITE DU PLAN

En tenant compte des propriétés (A) à (C) de l'efficacité  $Q(t)$ , il est évident que les variations de  $Q(t)$  seront bien hétérogènes et qu'il sera nécessaire d'introduire une classification. Nous allons introduire la notion d'efficacité relative

$$Q_t = \frac{Q(t)}{Q(\infty)} \quad (27)$$

où  $Q(\infty)$  est l'efficacité du processus de fonctionnement sans remplacement systématique (voir la condition d) du §2), et pour la classification nous allons utiliser les notions suivantes.

**Définition.** Soit  $t \in (0, t_1)$  l'intervalle de remplacement pour  $t_1 < \infty$ . Appelons plan de remplacement systématique, efficace ou inefficace celui pour lequel  $Q_t \begin{pmatrix} < \\ > \end{pmatrix} 1$  pour toutes valeurs de  $t$  telles que  $t < t_1$  et efficace à l'extrémité gauche (droite)  $t_0 < t_1$ , où  $Q_t \begin{pmatrix} < \\ > \end{pmatrix} 1$  avec  $t > t_0$ , et  $Q \begin{pmatrix} < \\ > \end{pmatrix} t$  avec  $t < t_0$ .

Si l'on pose  $t_1 = \infty$  et si l'on considère le cas où  $Q(t)$  possède un extrême au plus (ce qui est le cas pour les fonctions de répartition de défaillances les plus courantes), les propriétés (A) à (C) de l'efficacité  $Q(t)$  fournissent ensuite un critère pour la classification des plans suivant la définition introduite. Dans la table 1 la classification des plans est donnée selon les critères  $\lambda(0)$ ,  $\lambda'(0)$  et  $Q_0$ , qui résultent des propriétés (B). Pour  $\lambda(0) = 0$  on décide sur le nombre des extrêmes  $Q_t$  selon les propriétés (A) ou (C). L'intervalle optimum de remplacement existe de toute évidence pour un plan efficace, ou efficace à l'extrémité gauche avec un nombre d'extrêmes  $Q_t$  égal à 1.

Dans la pratique on s'intéresse normalement au plan de remplacement pour  $t_1 < \infty$  seulement (par exemple sur la figure 2,  $t_1$  est le double de la valeur moyenne des défaillances  $\mu$ ), et pour cette raison nous pouvons, dans la classification des plans, appliquer souvent les définitions introduites, surtout lorsque  $t_1$  est convenablement choisi.

### 4 - PLAN DE REMPLACEMENT DE L'AGE DANS LE CAS D'UNE FONCTION DE WEIBULL

La fonction de répartition de défaillances la plus souvent utilisée est la fonction de répartition de Weibull :

$$F(t) = 1 - e^{-\alpha t^\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 1. \quad (28)$$

Tableau 1

Plan	$\lambda(0)$	$\lambda'(0)$	$Q_0$	Nombre d'extrêmes $Q_t$
Efficace	0	0	$\infty$	0
	0	$\in(0, \infty)$	$>1$	0
	0	$\in(0, \infty)$	$\geq 1$	1, maximum
Efficace à l'extrémité droite	0	0	$\infty$	1
	0	$\in(0, \infty)$	$>1$	1
Efficace à l'extrémité gauche	$>0$	-	0	1
	0	$\infty$	0	1
	0	$\in(0, \infty)$	$<1$	1
Non-efficace	0	$\infty$	0	0
	0	$\in(0, \infty)$	$<1$	0
	0	$\in(0, \infty)$	$\leq 1$	1, minimum

Etudions maintenant les variations des caractéristiques opérationnelles du plan de remplacement systématique dans le cas de cette fonction de répartition. On détermine les propriétés de l'efficacité  $Q(t)$  à l'aide des propriétés (A) à (C) dont les résultats sont indiqués dans la table 2. Nous allons tout d'abord déterminer le nombre d'extrêmes :

Tableau 2

$\beta$	$Q(0)$	Nombre d'extrêmes	Nombre d'extrêmes supposé	Intervalle optimum de remplacement dans l'intervalle $(0, \infty)$
$\beta < 2$	0	impair	1	existe
$\beta = 2$	$\frac{1}{\alpha}$	pair	0	n'existe pas
$\beta > 2$	$\infty$	pair	0	n'existe pas

1 -  $\beta < 2$

La dérivée de la fonction de répartition (28) est déterminée par

$$f(t) = \alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta}, \quad (29)$$

et le taux de défaillance

$$\lambda(t) = \alpha \beta t^{\beta-1} \quad (30)$$

Supposons que  $Q(t)$  possède un nombre impair d'extrêmes lorsque l'inégalité (16) est satisfaite. Il en résulte que, dans un certain voisinage à droite du point 0, l'inégalité

$$\alpha \beta t^{\beta-1} < \frac{2}{t} (1 - e^{-\alpha t^\beta})$$

ou

$$\alpha \beta < 2 \frac{1 - e^{-\alpha t^\beta}}{t^\beta} \quad (31)$$

doit être satisfaite. Parce que l'égalité

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-\alpha t^\beta}}{t^\beta} = \alpha,$$

est vraie, on obtient, pour  $t \rightarrow 0^+$ , l'inégalité (31) avec  $\beta < 2$ . Pour cette raison, avec  $\beta < 2$ , en tenant compte de (32), les inégalités (31) et donc aussi (16) sont vraies au voisinage à droite du point 0.

### 2 - $\beta > 2$

Supposons que  $Q(t)$  possède un nombre pair d'extrêmes lorsque l'inégalité (12) est satisfaite. Dans un certain voisinage à droite du point 0 l'inégalité

$$\alpha \beta t^{\beta-1} > 2 \frac{1 - e^{-\alpha t^\beta}}{V(t)},$$

ou

$$\alpha \beta > 2 \frac{1 - e^{-\alpha t^\beta}}{t^{\beta-1} V(t)} \quad (33)$$

doit être satisfaite. Parce que l'égalité

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-\alpha t^\beta}}{t^{\beta-1} V(t)} = \alpha, \quad (34)$$

est vraie, on obtient pour  $t \rightarrow 0^+$  l'inégalité (33) avec  $\beta > 2$ . Pour cette raison avec  $\beta > 2$  en tenant compte de (34), les relations (33) et donc aussi (12) sont vraies au voisinage à droite du point 0.

### 3 - $\beta = 2$

Dans ce cas on constate que  $\lambda(0) = 0$ ,  $f'(0) = 2\alpha$ ,  $f''(0) = 0$ ,  $f'''(0) = -3(2\alpha)^2$ . A partir des propriétés (C), l'inégalité (19) définit le nombre d'extrêmes de  $Q(t)$ , ce qui donne dans le cas considéré :

$$(2\alpha)^2 > 0$$

de sorte que  $Q(t)$  possède un nombre pair d'extrêmes.

La relation (23) donne les valeurs de  $Q(t)$  consignées dans la table 2 , avec

$$\lambda'(t) = \alpha \beta (\beta - 1)t^{\beta-2} \quad (35)$$

En supposant que le nombre pair (impair) est égal à zéro (à un),  $Q(t)$  prend la forme des courbes représentées sur la figure 1, d'où il résulte aussi l'existence d'un intervalle optimum de remplacement dans l'intervalle  $(0, \infty)$ .

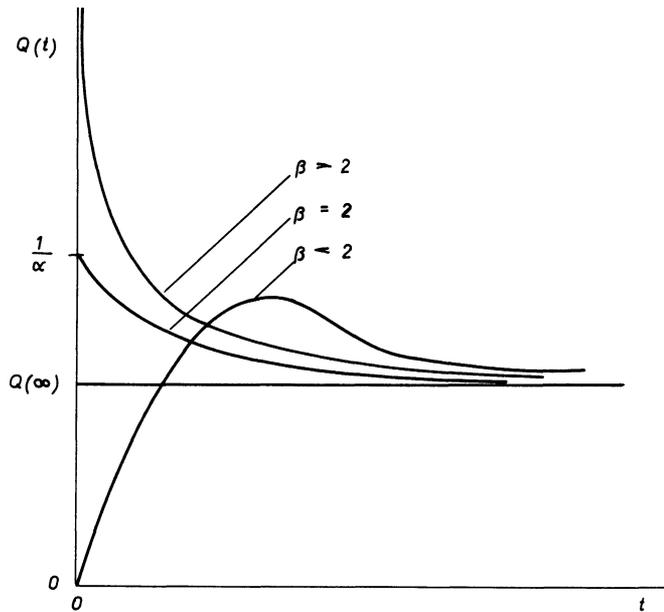


Figure 1

On détermine l'efficacité du plan par l'efficacité relative  $Q(t)$  à l'aide des tables 1 et 2 des relations (30) et (35) (ainsi qu'à l'aide de la figure 1). Le plan est efficace pour  $\beta \geq 2$ . Pour  $1 < \beta < 2$  il est efficace à l'extrémité gauche.

Compte tenu des relations (11), (21), (22) et (27), l'efficacité relative s'écrit :

$$Q_t = \frac{V^2(t)}{\mu^2 F(t)} \quad (36)$$

En utilisant l'expression (28), la relation (21) devient :

$$V(t) = \frac{1}{\beta \alpha^{1/\beta}} \int_0^{\alpha t^\beta} u^{\frac{1}{\beta}-1} e^{-u} du$$

Puisque

$$\mu = V(\infty) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta \alpha^{1/\beta}},$$

est vraie, on obtient :

$$\alpha = \left[ \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{u} \right]^\beta$$

et par conséquent

$$\alpha t^\beta = a_\beta y^\beta, \quad (37)$$

où

$$y = \frac{t}{\mu} \quad (38)$$

est le quotient de l'intervalle de remplacement par la durée de vie moyenne d'un élément, et

$$a_\beta = \Gamma^\beta\left(1 + \frac{1}{\beta}\right),$$

de sorte que

$$V(t) = \mu \Gamma_{a_\beta y^\beta} \left(\frac{1}{\beta}\right) = \mu I_y \quad (39)$$

où

$$I_y = \Gamma_{a_\beta y^\beta} \left(\frac{1}{\beta}\right). \quad (40)$$

En tenant compte de la relation (37), l'expression (28) devient :

$$F_y = 1 - e^{-a_\beta y^\beta} \quad (41)$$

l'efficacité relative, exprimée en fonction de la nouvelle variable  $y$  (voir (38)) est alors donnée par

$$Q_y = \frac{I_y^2}{F_y} \quad (42)$$

La courbe représentative de la fonction (42) est tracée pour  $y \in (0, 2)$  et pour les valeurs du paramètre  $1/\beta = 0,4 ; 0,5 ; 0,55 ; 0,6 ; 0,7 ; 0,8$ , sur la figure 2 et justifie dans le domaine considéré les conclusions trouvées à l'aide du graphique de la figure 1. L'utilisation de la fonction (42) est pratique puisque  $100 Q_y \%$  représente le pourcentage d'élévation, ou de réduction, de l'efficacité du processus de fonctionnement défini par l'usage du plan de remplacement systématique.

Si l'intervalle optimum de remplacement existe, c'est la solution de l'équation (20). Transformons le taux de défaillance défini par la relation (30) à l'aide des formules (37) et (38) :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{t} \alpha t^\beta = \frac{\beta}{\mu} \frac{1}{y} a_\beta y^\beta$$

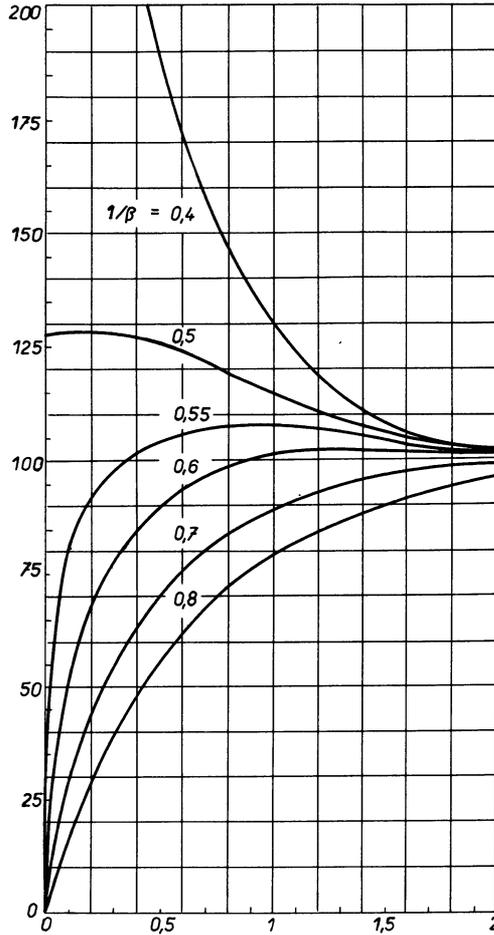


figure 2

et introduisons une nouvelle variable

$$z = a_{\beta} y^{\beta}$$

En conséquence l'équation (20) peut être écrite en fonction de la variable  $z$ , en tenant compte des relation (37) à (41), sous la forme :

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) z^{1-1/\beta} = \frac{F_z}{I_z}$$

Comme nous l'avons déjà indiqué, l'efficacité relative ne donne pas toujours à elle seule, au point de vue pratique, la possibilité de prendre une décision univoque sur le choix de l'intervalle de remplacement. Si l'intervalle optimum de remplacement existe, la situation est simple, tant qu'il ne déprécie pratiquement pas le plan de remplacement, c'est-à-dire quand  $y$  est très proche de zéro ou  $>2$ . Si l'intervalle optimum n'existe pas ou s'il

est pratiquement irréalisable, le choix final se fait à l'aide des caractéristiques partielles, c'est-à-dire à l'aide du temps moyen entre défaillances  $E(t)$  et des coûts de remplacement  $C(t)$  par unité de temps.

Les relations concernant le temps moyen relatif entre défaillances et les temps relatifs de remplacement par unité de temps sont obtenues de la même manière que dans (27), à partir des relations (5), (6), (8), (9) et (37) à (41),

$$E_y = \frac{I_y}{F_y}, \quad C_y = \frac{1}{I_y}, \quad (43)$$

où  $y$  est la variable définie par la relation (38). Les variations de ces fonctions sont représentées pour  $y \in (0, 2)$  et pour les valeurs du paramètre  $1/\beta = 0,4 ; 0,5 ; 0,6 ; 0,7 ; 0,8$  sur les figures 3 et 4. La fonction (43) exprime évidemment le pourcentage de la prolongation du temps moyen entre défaillances et le pourcentage d'élévation des coûts moyens de remplacement par unité de temps dans le cas du processus de remplacement systématique.

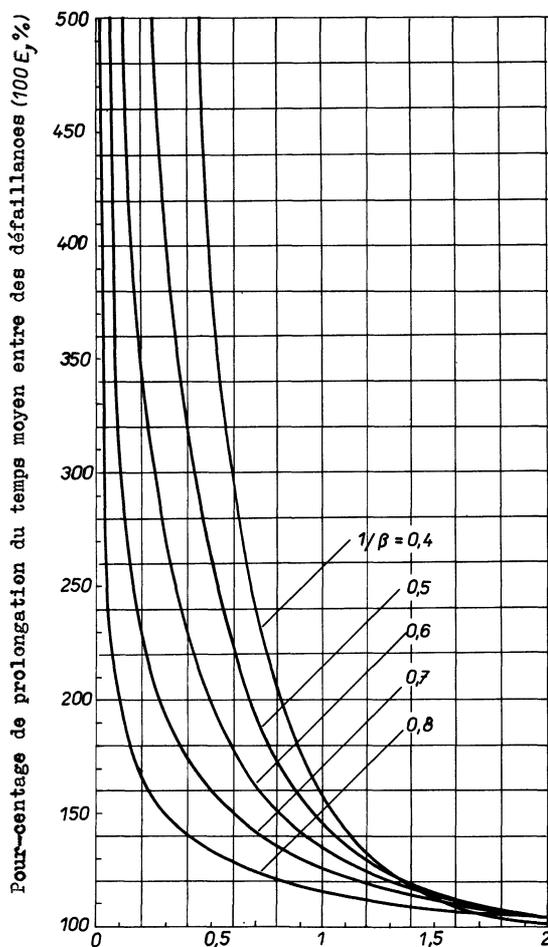


Figure 3

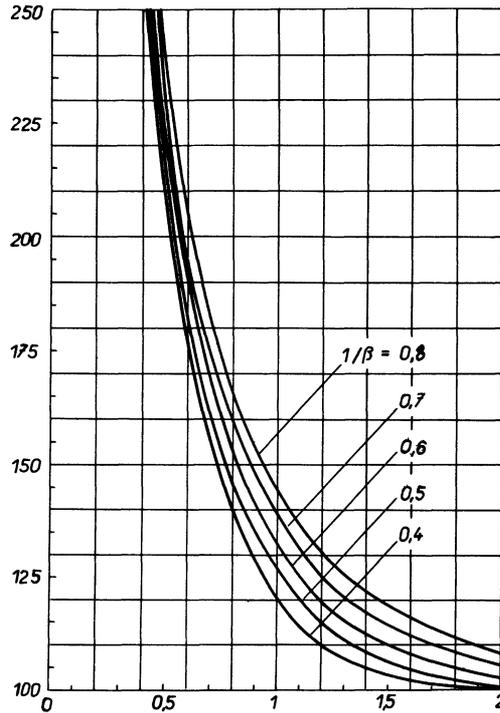


Figure 4

Il est évident, à partir des figures 3 et 4, que le choix de l'intervalle convenable de remplacement est le plus souvent limité dans la pratique à des valeurs proches de l'âge moyen de l'élément  $\mu$ , correspondant à la valeur  $y = 1$ .

#### ANNEXE

Les coûts du remplacement de l'élément sans défaillance sont les mêmes que les coûts du remplacement lors d'une défaillance dans le cas des équipements mécaniques. Par exemple, on peut vérifier que la fonction de répartition de défaillance des pièces mécaniques d'une automobile est dans beaucoup de cas du type de Weibull dont le paramètre  $\beta$  se situe dans un voisinage à gauche de 2. Dans ce cas on réussit souvent à trouver un plan optimum de remplacement des défaillances mécaniques en utilisant la méthode proposée dans cet article.

## BIBLIOGRAPHIE

- [ L 1 ] BARLOW, PROSCHAN - Mathematical theory of reliability, John Wiley, 1965.
- [ L 2 ] ZELEN - Statistical theory of reliability, The University of Wisconsin Press, 1963
- [ L 3 ] BARLOW, PROSCHAN - Planned replacement, Studies in applied probability and management science, kap. 4, Stanford University Press, 1962
- [ L 4 ] GLASSER - The age replacement problem, Technometrics, 9 (1967), 83 - 92
- [ L 5 ] BARLOW, HUNTER - Optimum preventive maintenance policies, Operations research 8(1960), 90 - 100
- [ L 6 ] PAGUROVA - Tablicy nepolnoj gammafunkcii, AN SSSR, 1963
- [ L 7 ] KLEGA - Statistická metoda stanovení optimálního systému údržby, (Une méthode statistique de la détermination de maintenance optimum - en tchèque)  
Rapport de recherche SVÚSS-67-01025