REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

L. BRUYÈRE
F. DOURGNON

Efficacité de plans de contrôle à mémoire dans le cas de contrôles sévères

Revue de statistique appliquée, tome 18, nº 2 (1970), p. 45-73
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1970__18_2_45_0>

EFFICACITÉ DE PLANS DE CONTROLE A MÉMOIRE DANS LE CAS DE CONTROLES SÉVÈRES

L. BRUYÈRE et F. DOURGNON

Société Nouvelle de Roulements

Le paragraphe 1 pose le problème.

Le paragraphe 2 rappelle quelques définitions et propriétés des chaines de MARKOV. A ce titre, il n'est ni original ni nécessaire. Il a seulement pour but d'aider le lecteur peu familiarisé avec ces problèmes à lire les paragraphes suivants.

Le paragraphe 3 montre comment le problème posé peut être traité grâce à la théorie des processus de Markov.

Dans le paragraphe 4, on résout les équations obtenues. Le paragraphe 5 donne une méthode plus générale de résolution.

Le praticien qui serait seulement intéressé par les résultats pourra ainsi passer du paragraphe 1 au paragraphe 6 qui se lit sans difficulté. Il constatera la grande efficacité de la méthode proposée. Le théoricien pourra essayer d'autres modèles et sans doute en trouver de meilleurs.

Il est enfin donné un exemple d'application.

Pages

1 - RECHERCHE D'UNE METHODE ELABOREE EN REMPLACEMENT DES PLANS SIMPLES DE CONTROLE.

Dans les contrôles industriels de fabrication en série, la proportion admissible de pièces défectueuses est parfois très faible. Les méthodes classiques de contrôle de réception peuvent alors être insuffisantes parce que pas assez efficaces si on veut éviter des échantillons trop importants.

Les plans d'échantillonnage par attributs, qu'ils soient simples, doubles, multiples ou séquentiels sont utilisables dans tous les cas, même les plus défavorables. On les représente pédagogiquement par le schéma d'urne. Dans une urne (ou plus commodément une caisse) contenant N pièces, on prélève n pièces parmi lesquelles le nombre maximum de défectueuses à trouver pour accepter les N pièces est fixé à c. Sous la réserve que $10\ n < N$, la loi binomiale pourra être utilisée pour définir la probabilité P d'acceptation en fonction de la proportion p de pièces défectueuses, ce qui peut se représenter par une courbe d'efficacité.

Au besoin, on utilisera comme approximation la loi de Poisson ou la loi de Laplace - Gauss selon le cas. Les figures de cet article montrent les tracés en pointillés de quelques courbes d'efficacité déterminées au moyen de la loi de Poisson. Les plans doubles, multiples ou séquentiels n'ont d'autre but que la recherche d'une diminution des effectifs de pièces à contrôler. Toutefois, moins on contrôle de pièces pour une efficacité donnée, plus la mise en oeuvre du plan de contrôle est malcommode. Selon la nature du contrôle à effectuer, on utilise tel ou tel type de plan de contrôle.

Ces plans sont toujours valables même dans le cas où l'on se serait amusé à introduire quelques pièces défectueuses dans des lots sains ou bien lorsque la fabrication est complètement instable. Le contrôleur sait bien que ces cas ou leurs variantes sont rares ; qu'il existe des permanences statistiques, même si elles sont difficiles à définir. D'où une certaine répugnance à utiliser le schéma d'urne pour assurer la qualité finale d'un produit.

Les plans de contrôle par mesures répondent partiellement à cette préoccupation en introduisant une constante statistique : la dispersion. Encore faut-il que la loi de Laplace - Gauss s'applique et que l'on puisse faire face à une organisation relativement lourde du contrôle. Ces techniques sont utilisées assez rarement avec succès.

Le contrôleur sait par expérience que l'apparition de quelques pièces défectueuses peut être l'indice d'un déréglement de la fabrication. Aussi est-il tenté d'augmenter alors la sévérité de son contrôle. Cette situation qui est naturelle et logique n'est pourtant pas prévue en général. Notons toutefois quelques exceptions. Les normes AFNOR NF X 06 021 et MIL STD 105D précisent que des contrôles renforcés ou réduits peuvent être appliqués dans certaines circonstances. Le contrôle en continu de DODGE (RSA vol. VII n° 1. 1959) est applicable pour des fabrications où le contrôle se fait au défilé et où le nombre de contrôleurs peut varier en fonction du niveau de qualité.

Pour certaines fabrications, dont le contrôle fait l'objet de cette étude, le nombre n doit être important et le nombre c réduit, le niveau de qualité devant être élevé. Il semble toutefois qu'il faille éviter d'utiliser en permanence des plans où $c = 0$, pour des raisons aussi bien pratiques que théoriques. Pratiques : on croit ou l'on veut faire croire alors qu'aucune pièce défectueuse n'est acceptable dans un lot. Le contrôleur sérieux sait que cela n'est pas possible, même en contrôle automatique quoi qu'on en ait dit. Si pour n pièces, on n'accepte aucune pièce défectueuse, par principe, il serait plus prudent et plus logique de prélever les N pièces du lot. On trouve alors tous les inconvénients du contrôle dit à cent pour cent dont il ne sera pas question ici. Théorique : la pente de la courbe d'efficacité est relativement faible dans la zone d'indifférence du plan ; c'est-à-dire pour $0.1 < P < 0.9$ et est au contraire très forte pour P voisin de 1. Un plan correct de contrôle doit avoir une courbe d'efficacité ressemblant le plus possible à celle de la figure 1, idéalisée

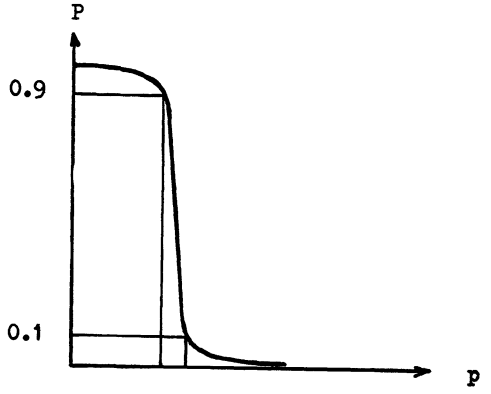


Figure 1

Un plan de contrôle avec c = 0 présente une courbe d'efficacité selon la figure 2.

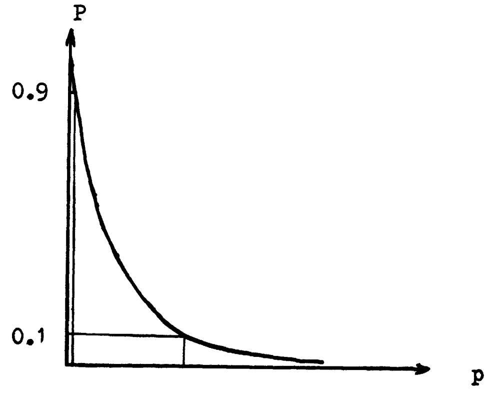


Figure 2

Dans un contrôle sévère on rencontre donc deux paradoxes.

1) c doit être petit, mais c = 0 doit être évité.
2) n doit être grand, mais alors les inconvénients du contrôle dit à cent pour cent se rencontrent.

En associant les différentes idées qui viennent d'être exprimées on arrive au schéma décrit ci-après qui est une décomposition en plusieurs schémas d'urne.

- prélever n_1, accepter $c_1 = 1$ défectueuse

- si lors des K derniers contrôles, m d'entre eux ont donné lieu à un refus, on abandonne la règle précédente pour utiliser

$$(n_2 \; ; \; c_2 = 0) \text{ avec } n_2 > n_1.$$

- après la mise en oeuvre de la seconde règle de contrôle, on revient à la première règle si lors des K' derniers contrôles aucun n'a donné lieu à un refus.

Ceci est un exemple parmi d'autres imaginables. Il a l'avantage d'être très facilement exploitable en atelier. Les calculs de probabilités paraissent au premier abord inexploitables. L'utilisation des chaînes de MARKOV permet de lever cette difficulté.

Pour l'ensemble des cas traités, on a retenu $K = K' = 5$ et $m = 2$

On pourrait évidemment envisager des schémas plus complexes utilisant trois règles

- prélever n_1, accepter $c_1 = 1$ défectueuse

a) - si lors des K derniers contrôles, m d'entre eux ont donné lieu à un refus, on abandonne la règle précédente pour utiliser (n_2 ; $c_2 = 0$) avec $n_2 > n_1$

- après la mise en oeuvre de cette seconde règle, on revient à la première si lors des K' derniers contrôles aucun n'a donné lieu à un refus.

b) - si lors des L derniers contrôles aucun n'a donné lieu à un refus, on abandonne cette première règle pour utiliser (n_3 ; $c_3 = 1$) avec $n_3 < n_1$

- après la mise en oeuvre de cette 3ème règle, on revient à la première si lors des L' derniers contrôles n d'entre eux ont donné lieu à un refus.

2 - RAPPEL DE QUELQUES DEFINITIONS ET PROPRIETES DES CHAINES DE MARKOV

2.1. Chaînes de Markov

Observons un système qui évolue dans le temps selon une suite discrète et croissante d'instants

$$\ldots \prec t_n \prec t_{n+1} \prec \ldots \qquad (1)$$

---

(1) le signe $\prec$ se lit "est avant" et définit une relation d'ordre strict.

A chacun de ces instants ce système est dans un stade

$$\ldots \quad S_n , \quad S_{n+1} , \quad \ldots$$

et pour chacun des stades, le système peut prendre un nombre fini d'états. Pour simplifier, supposons qu'il y ait trois états possibles A, B ou C.

Cette suite de stades $[S_o, S_1 \ldots S_n \ldots]$ est aléatoire.

La définition en probabilité de la suite $[S_o, S_1 \ldots S_n \ldots]$ se fait de la façon suivante :

a) Stade initial S_o

S_o est l'un des états A, B ou C avec la probabilité

$$p_a^{(o)} , \ p_b^{(o)} , \ p_c^{(o)}$$

attachée à A, B ou C.

b) Loi d'évolution

La loi S_{n+1} est entièrement définie par la connaissance de l'état du système au stade S_n.

Si au stade S_n le système se trouve dans l'état A : au stade S_{n+1} le système peut prendre l'un des états A, B ou C avec la probabilité p_{aa}, p_{ab} ou p_{ac}. On a :

$$p_{aa} + p_{ab} + p_{ac} = 1$$

Si au stade S_n le système se trouve dans l'état B : au stade S_{n+1} le système peut prendre l'un des états A, B ou C avec la probabilité p_{ba}, p_{bb}, ou p_{bc}. On a :

$$p_{ba} + p_{bb} + p_{bc} = 1$$

Si au stade S_n le système se trouve dans l'état C : au stade S_{n+1} le système peut prendre l'un des états A, B ou C avec la probabilité p_{ca}, p_{cb} ou p_{cc}. On a :

$$p_{ca} + p_{cb} + p_{cc} = 1$$

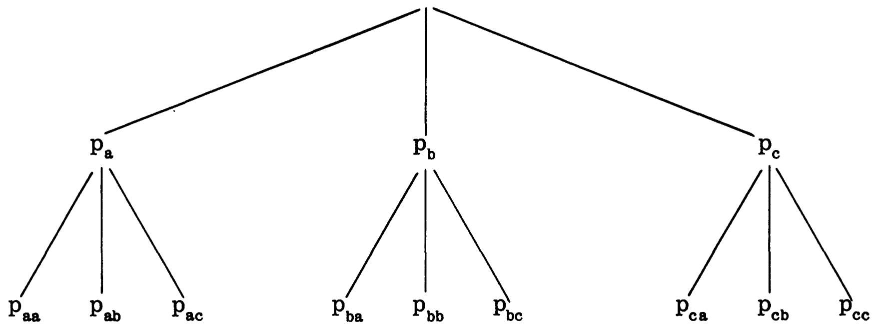
Ces trois lois de probabilité définissent l'évolution du système.

Remarque sur les notations :

p_{ab}, par exemple, désigne la probabilité de passer de l'état A à l'état B lorsque le système évolue d'un stade au stade suivant (passage de S_n à S_{n+1}) ; cette probabilité est indépendante de n. De même pour les autres symboles p_{aa}, p_{ba}, ...

On désigne par $p_a{}^{(n)}$ la probabilité pour le système d'être à l'état A au stade S_n ; de même pour $p_b{}^{(n)}$ et $p_c{}^{(n)}$.

On peut décrire les éventualités par un arbre exponentiel.



ou par une matrice :

$$M = \begin{bmatrix} p_{aa} & p_{ab} & p_{ac} \\ p_{ba} & p_{bb} & p_{bc} \\ p_{ca} & p_{cb} & p_{cc} \end{bmatrix}$$

M est dite matrice des probabilités de transition

2.2. Calcul matriciel

A toute chaîne de MARKOV correspond une matrice.

Exemple : soit les états initiaux A, B ou C, on a

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{aa} & p_{ab} & p_{ac} \\ p_{ba} & p_{bb} & p_{bc} \\ p_{ca} & p_{cb} & p_{cc} \end{bmatrix} \end{array}$$

Cette matrice est la matrice de transition d'une chaîne de MARKOV. La somme des éléments (probabilités) de chaque ligne est égale à 1 et ces éléments sont non négatifs.

Pour obtenir une chaîne de MARKOV[1], on définit un état initial par un vecteur probabilité, soit dans le cas de 3 états :

$$p^{(o)} = (p_a^{(o)}, p_b^{(o)}, p_c^{(o)})$$

Après n sauts, la probabilité sera

$$p^{(n)} = (p_a^{(n)}, p_b^{(n)}, p_c^{(n)})$$

$p^{(o)}$ et $p^{(n)}$ étant des vecteurs probabilité, la somme de leurs composantes est égale à 1 et les termes sont non négatifs.

----

(1) Il s'agit d'un cas particulier des processus markoviens qui se définissent d'une façon plus générale : le processus étudié ici est un processus dénombrable (nombre d'états dénombrables) discret (changement d'état à des instants particuliers) et homogène (la loi de passage de S_n à S_{n+1} ne dépend pas de n).

Les lignes d'une matrice de transition sont aussi des vecteurs probabilité. Ces probabilités vérifient les équations suivantes :

$$p_a^{(n)} = p_a^{(n-1)} \cdot p_{aa} + p_b^{(n-1)} \cdot p_{ba} + p_c^{(n-1)} \cdot p_{ca}$$

$$p_b^{(n)} = p_a^{(n-1)} \cdot p_{ab} + p_b^{(n-1)} \cdot p_{bb} + p_c^{(n-1)} \cdot p_{cb}$$

$$p_c^{(n)} = p_a^{(n-1)} \cdot p_{ac} + p_b^{(n-1)} \cdot p_{bc} + p_c^{(n-1)} \cdot p_{cc}$$

Interprétation de la 1ère équation par exemple : la probabilité de se trouver dans l'état A après n sauts est la somme des probabilités de se trouver dans l'un des 3 états possibles A, B ou C après n - 1 sauts multipliée par la probabilité de passer ensuite à l'état A au nième saut.

D'après la définition de la multiplication d'un vecteur par une matrice, on peut écrire les équations précédentes sous la forme

$$p^{(n)} = p^{(n-1)} \cdot M$$

Si l'on substitue à n la valeur des entiers successifs on a :

$$p^{(1)} = p^{(0)} \cdot M$$

$$p^{(2)} = p^{(1)} \cdot M = p^{(0)} \cdot M^2$$

$$p^{(3)} = p^{(2)} \cdot M = p^{(1)} \cdot M^2 = p^{(0)} \cdot M^3$$

En généralisant

$$p^{(n)} = p^{(0)} \cdot M^n$$

Analyse de ce résultat : en multipliant le vecteur $p^{(o)}$ des probabilités initiales par la n ième puissance de la matrice de transition M on obtient le vecteur $p^{(n)}$ dont les composantes donnent les probabilités d'être dans chacun des états après n sauts.

Les éléments de la 1ère ligne de la matrice M^n donnent les probabilités qu'après n sauts le processus soit dans un état donné, en supposant qu'il est parti de l'état A. De même, la 2e ligne de la matrice M^n donne les probabilités que le processus soit dans l'un des différents états après n sauts, sachant qu'il est parti de l'état B.

L'étude des chaînes de MARKOV conduit à celle des puissances de la matrice M.

Exemple

$$M = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad M^2 = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{vmatrix}$$

$$M^3 = \begin{vmatrix} 3/8 & 4/8 & 1/8 \\ 4/8 & 1/8 & 3/8 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \lim_{n \to \infty} M^n = w = \begin{vmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{vmatrix}$$

On démontre que la matrice M^n tend vers une matrice limite W lorsque n augmente indéfiniment.

M^n tendant vers W, il résulte de la relation

$$p^{(n)} = p^{(o)}M^n$$

que $p^{(n)}$ tend aussi vers une limite w. Comme on a

$$p^{(n+1)} = p^{(o)}M^n$$

on aura à la limite

$$\boxed{w.M = w} \quad (2)$$

Cette relation définit le vecteur limite w des probabilités de se trouver dans les états A, B, C.

w est un vecteur propre de la matrice M. Cela signifie que la probabilité d'être dans un état quelconque tend à être la même à chaque instant, et ce, quel que soit l'état initial (par exemple, la probabilité d'être dans l'état A tend à être la même quel que soit l'instant considéré, et quel que soit l'état initial A, B ou C).

Le processus est alors dit stationnaire.

3 - EFFICACITE DES PLANS A MEMOIRE

Choix des plans :

On a recherché à priori un certain nombre de plans à mémoire pouvant être adoptés lorsqu'on désire un contrôle sévère. Les plans suivants ont été retenus. Un même plan est la mise en oeuvre de deux règles (tableau 1).

TABLEAU 1

	Contrôle normal		Contrôle renforcé	
	n_1	c_1	n_2	c_2
plan 1	200	1	400	0
plan 2	200	1	500	0
plan 3	200	1	1 000	0
plan 4	200	1	1 500	0
plan 5	300	1	400	0
plan 6	300	1	500	0
plan 7	300	1	1 000	0
plan 8	300	1	1 500	0
plan 9	400	1	400	0
plan 10	400	1	500	0
plan 11	400	1	1 000	0
plan 12	400	1	1 500	0
plan 13	500	1	500	0
plan 14	500	1	1 000	0
plan 15	500	1	1 500	0
plan 16	1 000	1	1 000	0
plan 17	1 000	1	1 500	0
plan 18	1 000	1	2 000	0

Modalités de passage d'un contrôle à un autre

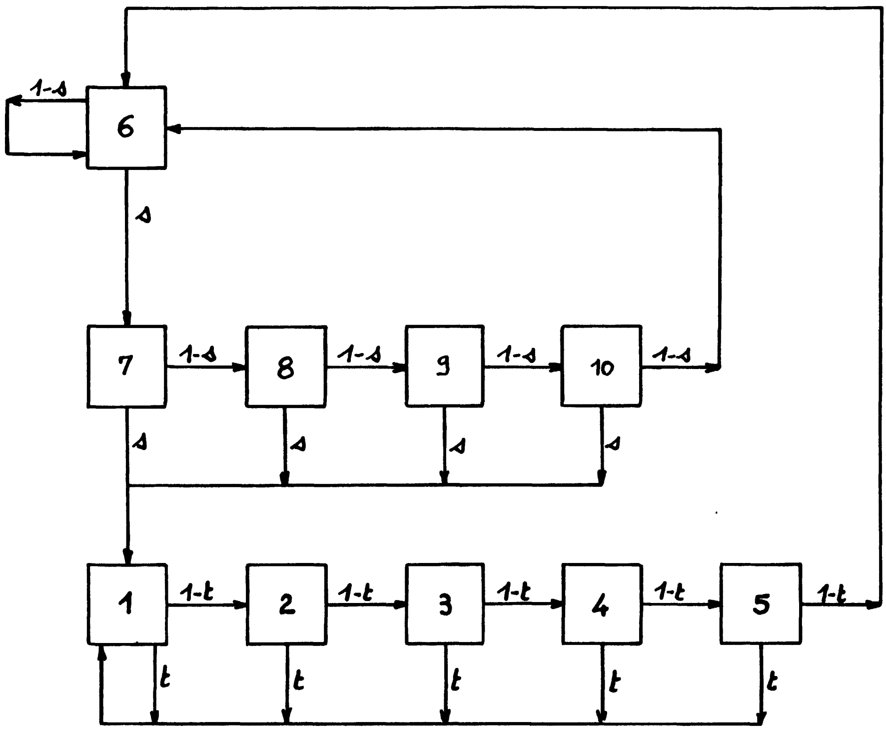
a) Passage du contrôle normal au contrôle renforcé : si 2 lots sur 5 sont rejetés.

b) Passage du contrôle renforcé au contrôle normal : si 5 lots consécutifs sont acceptés.

Le problème consiste maintenant à calculer l'efficacité de tels plans.

Organigramme des états d'un plan

Tous les plans indiqués précédemment avec les modalités de passage choisies se ramènent au même organigramme (figure 3)



ORGANIGRAMME - Figure 3

t = probabilité de refus en contrôle renforcé.
s = probabilité de refus en contrôle normal.

états 1 à 5 : contrôle renforcé
états 6 à 10 : contrôle normal.

Appelons :

t la probabilité de refus en contrôle renforcé.
(1 - t) la probabilité d'accepter le lot.

s la probabilité de refus en contrôle normal.
(1 - s) la probabilité d'accepter le lot.

Interprétation de l'organigramme :

On a 10 états E_1 à E_{10} avec les probabilités de passage $(t, 1 - t ; s, 1 - s)$ de l'état i à l'état j.
5 états E_1 à E_5 correspondent au contrôle renforcé.
5 états E_6 à E_{10} correspondent au contrôle normal.

Exemple : Plaçons-nous en contrôle renforcé à l'état E_5. Les 4 contrôles précédents ont été effectués en contrôle renforcé. Prélevons un échantillon :

a) Nous avons la probabilité t de refuser le lot. Dans ce cas, nous nous retrouvons dans la situation où nous étions à l'état E_1, c'est-à-dire qu'il va falloir accepter 5 lots consécutifs pour passer en contrôle normal (états E_1 à E_5).

b) Nous avons aussi la probabilité $(1 - t)$ d'accepter le lot. Dans ce cas, nous avons accepté 5 lots consécutifs (états E_1 à E_5) et au prochain contrôle (état E_6) nous adopterons le contrôle normal.

Matrice de transition M

On peut traduire l'organigramme sous la forme d'une matrice de transition M de 10 lignes par 10 colonnes.

$$
M = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
t & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
t & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s & s & 0 & 0 & 0 \\
s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s & 0 & 0 \\
s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s & 0 \\
s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s \\
s & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Cette matrice donne les probabilités de passage p_{ij} d'un état i à un état j. Si les deux états ne sont pas reliés entre eux $p_{ij} = 0$.

Calcul de l'efficacité d'un plan :

On appelle :

P la probabilité d'accepter le lot pour un plan donné.

p_i la probabilité d'être à l'état E_i.

b_i la probabilité d'accepter le lot quand on est à l'état E_i ($b_i = 1 - s$ en contrôle normal et $b_i = 1 - t$ en contrôle renforcé).

i variant de 1 à 10 états.

P et b_i sont fonction de la proportion p de défectueux dans le lot,

On a :

$$\boxed{P = \sum_{i=1}^{10} p_i \, b_i} \qquad (3)$$

C'est-à-dire que la probabilité d'accepter le lot pour un plan donné est égale à la probabilité d'être à l'état E_i multipliée par la probabilité d'accepter le lot quand on est à l'état E_i, et ce, pour l'ensemble des états. Ce résultats est fonction de la proportion de défectueux dans le lot.

En régime de stabilité de fabrication (processus stationnaire),

p_i est donné par le vecteur probabilité

$$w = (p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_{10})$$

obtenu à l'aide de la relation (2) : $w \cdot M = w$

La résolution de cette équation est indiquée dans le paragraphe suivant.

Calcul des probabilités d'acceptation b_i pour les différents états

$b_i = 1 - t$ en contrôle renforcé (états E_1 à E_5)

$b_i = 1 - s$ en contrôle normal (états E_6 à E_{10})

Rigoureusement, les probabilités d'acceptation b_i se calculent par la loi binomiale.

Contrôle normal :

$$b_i = 1 - s = \sum_{k=0}^{1} C_{n_1}^{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n_1 - k}$$

Contrôle renforcé :

$$b_i = 1 - t = C_{n_2}^{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{n_2 - 0} = (1-p)^{n_2}$$

En pratique on utilisera la loi de Poisson car l'approximation est très bonne.

Contrôle normal :

$$b_i = 1 - s = \sum_{k=0}^{1} e^{-m_1} \cdot \frac{m_1^k}{k\,!}$$

$$= e^{-m_1}(1 + m_1) \qquad \text{avec } m_1 = n_1 p$$

Contrôle renforcé :

$$b_i = 1 - t = e^{-m_2} \qquad \text{avec } m_2 = n_2 \cdot p$$

p étant la proportion de défectueux dans le lot.
p a été choisi de 0.0002 à 0.001 avec un pas de 2
et de 0.001 à 0.01 avec un pas de 1.

Pour chacun des plans, on obtient un tableau du type suivant :

p	$m_1 = n_1 p$	b_i = 1-s	$m_2 = n_2 p$	b_i = 1-t
0.0002 .... 0.001 .... 0.01				

Ces différentes valeurs de b_i seront ensuite injectées dans la matrice de transition M pour chaque plan et pour chaque valeur de p, ce qui permettra de calculer le vecteur probabilité w.

Nombre de pièces à prélever

On appelle $\bar{n}$ le nombre moyen de pièces prélevées dans le lot pour un plan donné.

Soit c_i le nombre de pièces prélevées à l'état E_i
($c_i = n_1$ en contrôle normal et $c_i = n_2$ en contrôle renforcé).
p_i la probabilité d'être à l'état E_i
i variant de 1 à 10 états.
$\bar{n}$ est fonction de p, la proportion de défectueux dans le lot. On a :

$$\boxed{\bar{n} = \sum_{i=1}^{10} p_i\, c_i} \tag{4}$$

4 - METHODE DIRECTE DE RESOLUTION

On peut rechercher la solution de l'équation matricielle (2)

$$w\,M = w$$

en résolvant un système d'équations linéaires, c'est-à-dire en exprimant p_1, $p_2 \dots p_{10}$ en fonction de s et de t, compte tenu de la condition

$$\sum p_i = 1$$

En partant de la matrice de transition, on peut écrire les équations

$$(p_{1-1} - 1)\, p_1 + p_{2-1} \cdot p_2 + \dots + p_{10-1} \cdot p_{10} = 0$$

$$p_{1-2} \cdot p_1 + (p_{2-2} - 1)\, p_2 + \dots + p_{10-2} \cdot p_{10} = 0$$

....

$$p_{1-10} \cdot p_1 + p_{2-10} \cdot p_2 + \dots + (p_{10-10} - 1)\, p_{10} = 0 \quad (1)$$

ainsi que l'équation

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{10} = 1$$

----

(1) p_{1-10} par exemple est la probabilité donnée par la matrice de transition de passer de l'état 1 à l'état 10.

On peut alors, par substitutions successives, calculer la probabilité de se trouver en contrôle renforcé

$$Pr = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$$

On trouve tous calculs faits

$$\boxed{\frac{1}{Pr} = 1 + \frac{t(1-t)^5\ [2 - (1-s)^4]}{s[1 - (1-t)^5]\ [1 - (1-s)^4]}} \qquad (5)$$

La probabilité de se trouver en contrôle normal étant $P_n = 1 - Pr$

L'équation (3)

$$P = \sum_{i=1}^{10} p_i\, b_i$$

donnant la probabilité d'acceptation du lot devient

$$P = (1-t)\ Pr + (1-s)\ Pn$$

ou, en exprimant P en fonction de Pr seulement

$$\boxed{P = (1-s) - (t-s)\ Pr} \qquad (6)$$

L'équation (4)

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{10} p_i\, c_i$$

donnant le nombre moyen de pièces contrôlées devient

$$\bar{n} = n_2\, Pr + n_1\, Pn$$

ou, en exprimant $\bar{n}$ en fonction de Pr seulement

$$\boxed{\bar{n} = n_1 + (n_2 - n_1)\ Pr} \qquad (7)$$

Le calcul de Pr, P et $\bar{n}$ est effectué pour tous les plans choisis, et, pour chacun des plans, ce calcul est répété pour diverses valeurs de p (proportion de pièces défectueuses)

p de 0.0002 à 0.001 avec un pas de 2
p de 0.001 à 0.01 avec un pas de 1

On obtient alors un tableau du type suivant pour chaque plan

p	$\bar{n}$	P

5 - METHODE GENERALE DE RESOLUTION

La méthode précédente offre l'intérêt pour le lecteur de pouvoir calculer facilement l'efficacité de plans autres que ceux proposés, en recherchant Pr, P et $\bar{n}$ à partir des relations 5 - 6 et 7, les valeurs s et t étant relevées sur une table de la loi de Poisson ou éventuellement sur une table de la loi binomiale pour un certain nombre de valeurs de p (proportion de défectueux).

Toutefois, pour pouvoir utiliser ces relations, il est nécessaire que les règles de contrôle soient les mêmes que celles choisies dans cette étude, c'est-à-dire que le schéma se ramène au même organigramme.

Si l'on désire calculer l'efficacité de schémas plus complexes, utilisant trois règles par exemple

contrôle normal (n_1, c_1)
contrôle renforcé (n_2, c_2)
contrôle allégé (n_3, c_3)

la méthode de résolution précédente deviendra difficile à appliquer en raison du format important des matrices de transition qui pourraient être obtenues.

La méthode suivante est applicable dans tous les cas.

Ecrivons la relation (2)

$$w \cdot M = w$$

M est la matrice de transition $n \times n$

w est le point invariant de la matrice M, ou le vecteur probabilité de $1 \times n$ dont les composants sont les probabilités de se trouver dans les états E_1 à E_n

Il s'agit de calculer les composantes du vecteur w.

w est le vecteur propre de la matrice M, correspondant à la valeur propre 1 (une matrice de transition a toujours 1 pour valeur propre).

On peut écrire l'équation (2) sous la forme

$$w\, M = w\, [1]$$

[1] est une matrice unité, ou matrice diagonale de $n \times n$

$$w \cdot M - w\, [1] = [0]$$

[0] est une matrice $1 \times n$ où tous les éléments ont pour valeur 0

$$w(M - [1]) = [0] \tag{8}$$

on sait que $w = (p_1, p_2, \ldots p_i, \ldots p_n)$

$$\text{et } \sum p_i = 1$$

on peut donc écrire l'équation matricielle exprimant la relation précédente

$$w\,U = 1$$

U est une matrice de $n \times 1$ où tous les éléments ont pour valeur 1

1 est un scalaire

Formons les matrices

$$A = \begin{bmatrix} (M - [1]) \\ U \end{bmatrix}$$

A est une matrice de $n \times n + 1$. Elle est formée de la matrice $(M - 1)$ à laquelle on a juxtaposé la matrice colonne U.

$$B = \begin{bmatrix} [0] \\ 1 \end{bmatrix}$$

B est une matrice ligne de $1 \times n + 1$. Elle est formée de la matrice ligne [0] à laquelle on a ajouté le scalaire 1.

On peut écrire l'équation (8) sous la forme

$$w\,A = B \tag{9}$$

La dernière colonne de A multipliée par w donne $\Sigma\, p_i = 1$ et $w(M - [1])$ donne [0]

La matrice A est rectangulaire. Elle n'a pas d'inverse. Recherchons la matrice A^T transposée de la matrice A.

A^T est obtenue en interchangeant lignes et colonnes

$$[Aij] = [A\,ji]^T$$

Par suite $A.\ A^T$ est une matrice carrée de $n \times n$. On peut calculer son inverse.

L'équation (9)

$$w \cdot A = B$$

peut s'écrire en multipliant les deux membres par A^T

$$w \cdot A \cdot A^T = B \cdot A^T$$

et par suite

$$\boxed{w = B \cdot A^T\, [A \cdot A \cdot^T]^{-1}} \tag{10}$$

$$w = (p_1,\ p_2,\ \ldots\ ,\ p_i,\ \ldots\ p_n)$$

ce qui permet de calculer les équations du paragraphe 3

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot c_i$$

et

$$P = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot b_i$$

La programmation peut être effectuée en FORTRAN pour obtenir w, $\bar{n}$ et P

Pour chaque plan, le calcul est répété pour diverses valeurs de p.

6 - RESULTATS ET OBSERVATIONS

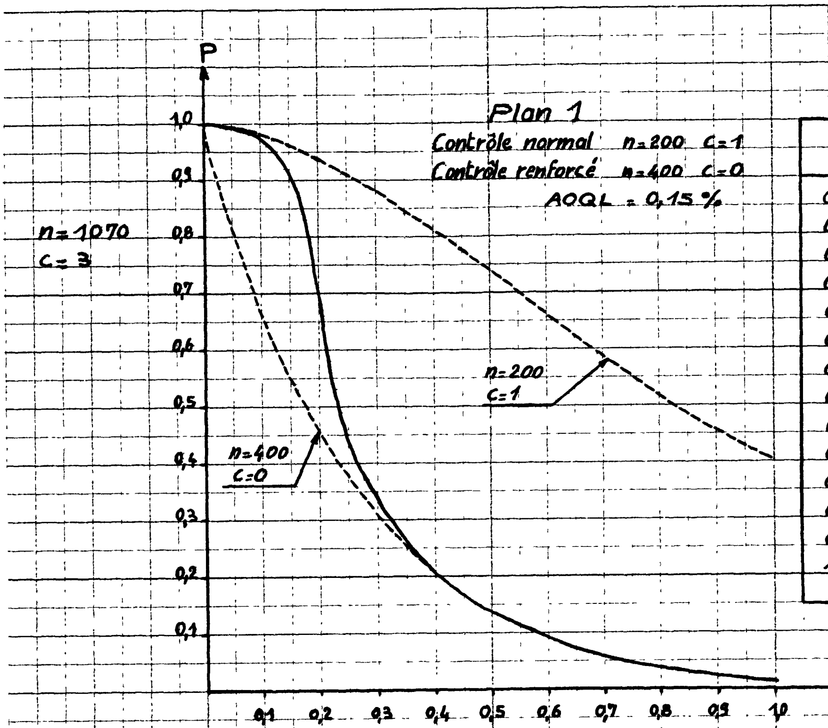
Les figures qui suivent donnent les courbes d'efficacité pour les différents plans proposés. Le tracé en traits pleins résulte des calculs des paragraphes 3 et 5. Les tracés en pointillés correspondent aux plans simples soit pour le contrôle normal, soit pour le contrôle renforcé.

On constate partout le gain d'efficacité de la méthode proposée. Dans chaque cas on a recherché le plan simple correspondant à la courbe en trait plein (ou tout au moins ayant même valeur de p pour les probabilités d'acceptation 0.1 et 0.9). Ces plans simples sont indiqués à gauche des courbes. Les deux colonnes de droite donnent le nombre moyen de pièces contrôlées en fonction de p. Par comparaison avec les plans simples dont il vient d'être question on peut juger de l'économie de contrôle. A cela il faut ajouter, comme il a déjà été dit, que moins on contrôle de pièces, mieux on les contrôle. Enfin, à titre indicatif, l'AOQL est indiqué.

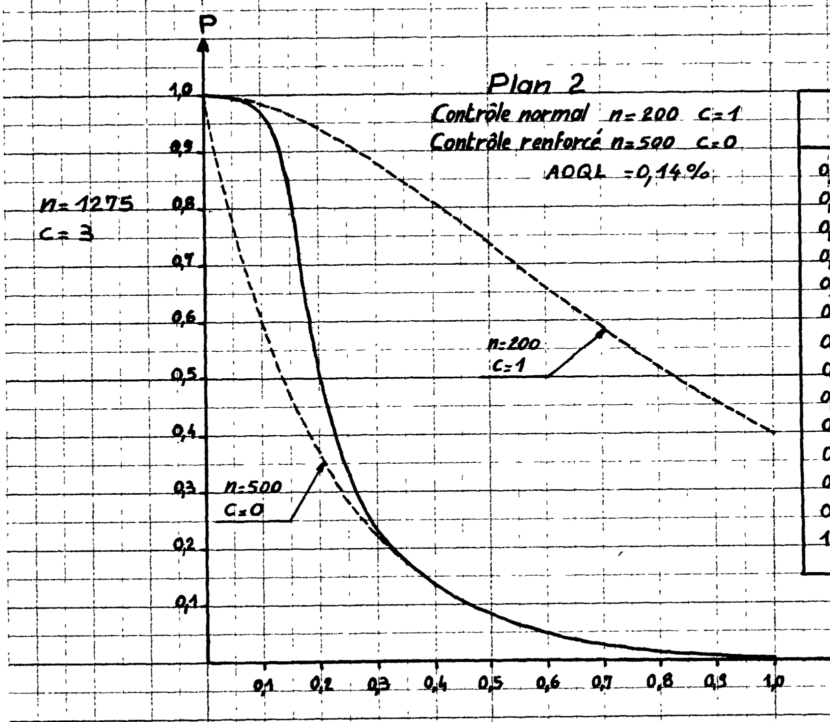
Bien entendu, tous les plans ne présentent pas le même intérêt. On pourra retenir par exemple le plan :

contrôle normal $n = 200$, $c = 1$
contrôle renforcé $n = 1\,000$, $c = 0$
qui correspond à un plan simple
$n = 3\,200$, $c = 5$

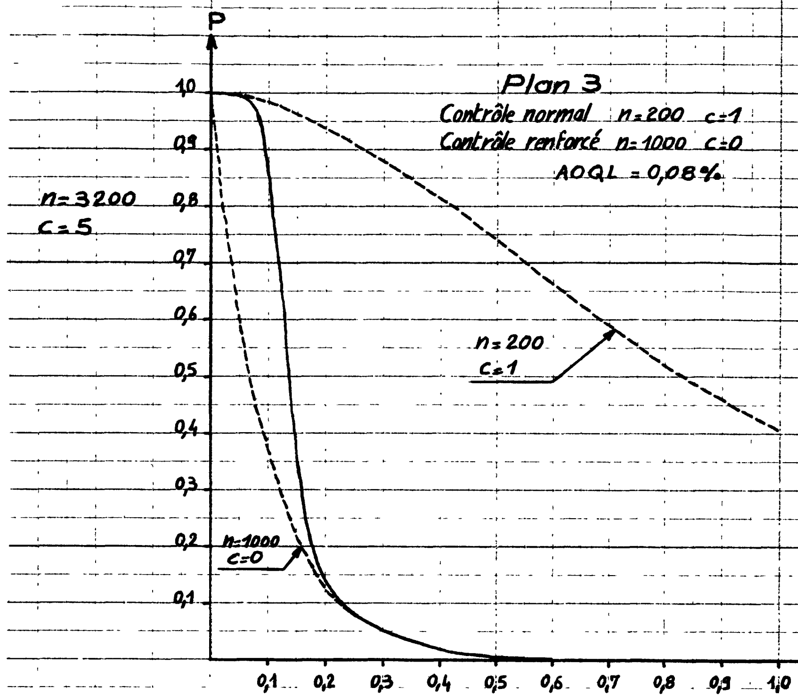
alors que le nombre moyen de pièces contrôlées sera inférieur à 400 si $p < 0.1\ \%$, et au plus égal à 1000.



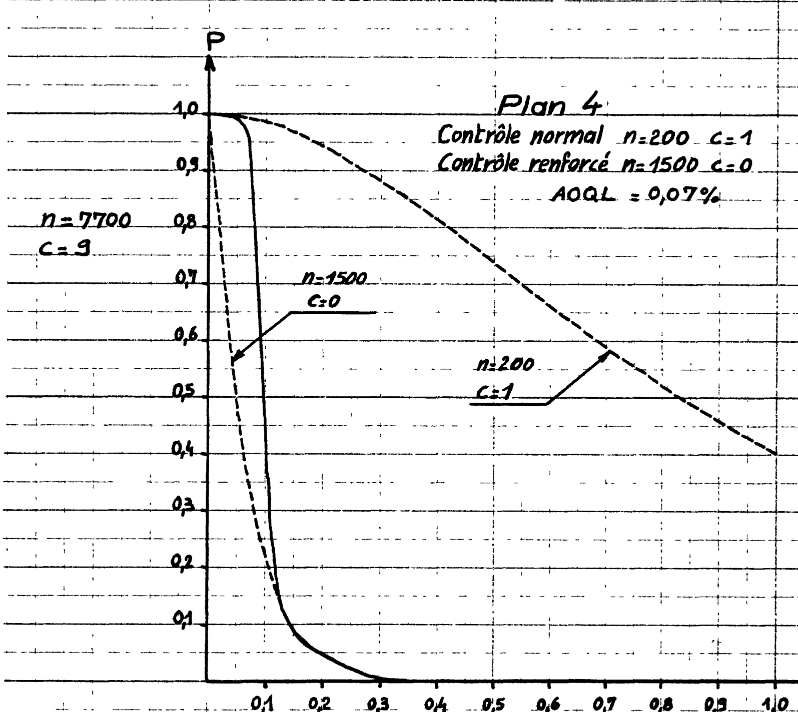
p%	$\bar{n}$
0,02	200
0,04	200
0,06	200
0,08	201
0,1	204
0,2	304
0,3	390
0,4	399
0,5	400
0,6	400
0,7	400
0,8	400
0,9	400
1	400



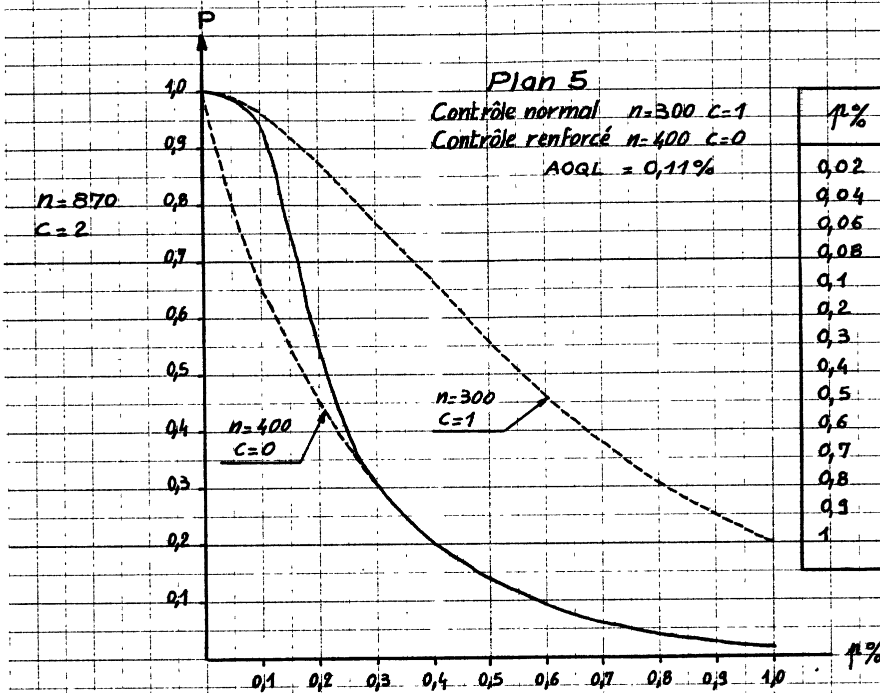
p%	$\bar{n}$
0,02	200
0,04	200
0,06	201
0,08	203
0,1	209
0,2	417
0,3	496
0,4	500
0,5	500
0,6	500
0,7	500
0,8	500
0,9	500
1	500



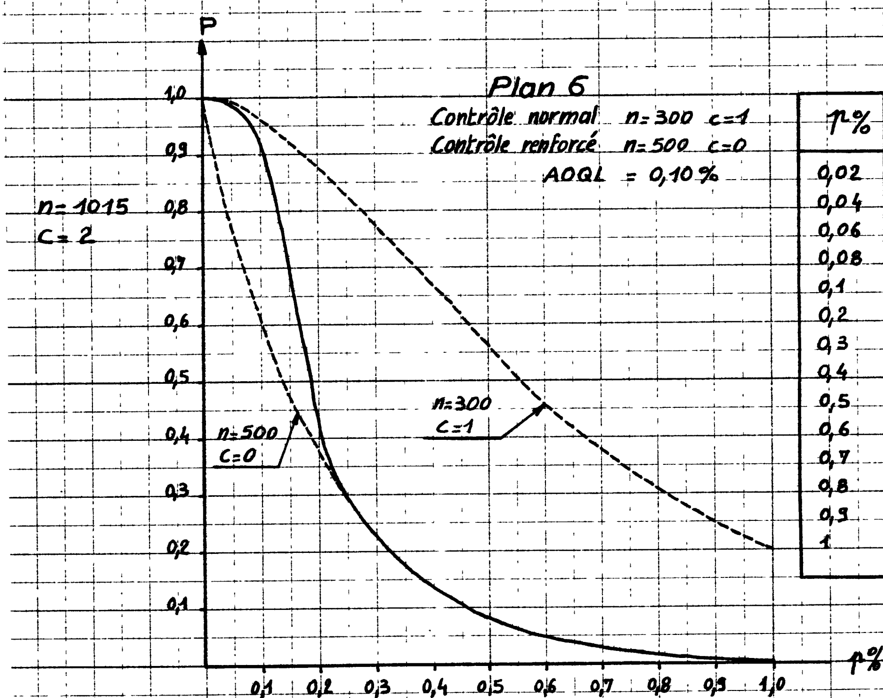
p %	$\bar{n}$
0,02	200
0,04	201
0,06	206
0,08	237
0,1	366
0,2	997
0,3	1000
0,4	1000
0,5	1000
0,6	1000
0,7	1000
0,8	1000
0,9	1000
1	1000



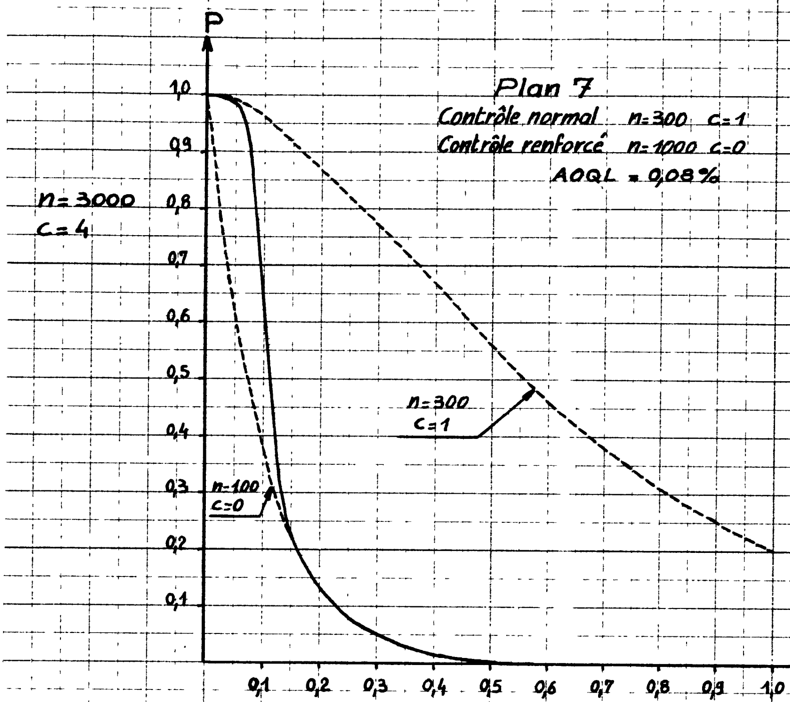
p %	$\bar{n}$
0,02	200
0,04	202
0,06	232
0,08	490
0,1	1139
0,2	1500
0,3	1500
0,4	1500
0,5	1500
0,6	1500
0,7	1500
0,8	1500
0,9	1500
1	1500



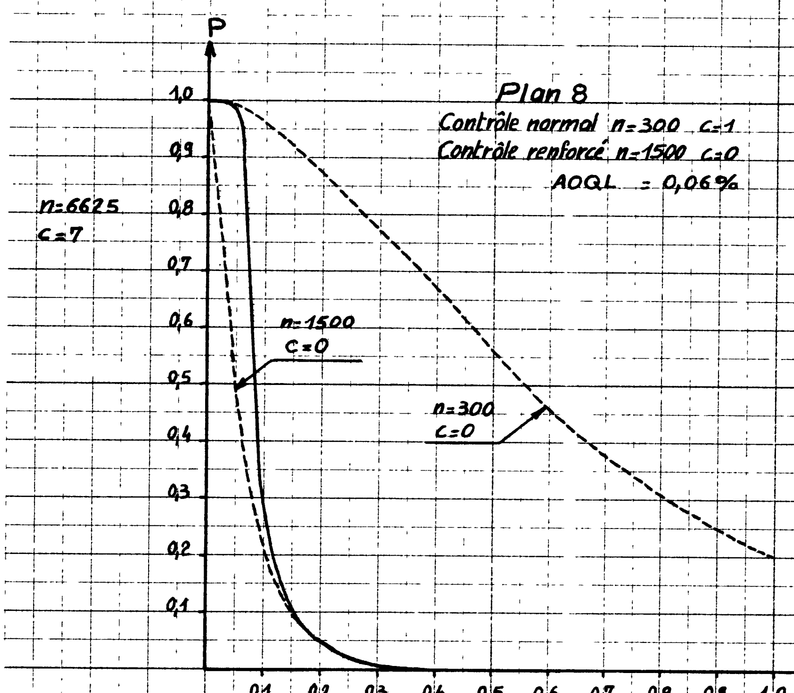
p%	$\bar{n}$
0,02	300
0,04	300
0,06	301
0,08	303
0,1	308
0,2	377
0,3	398
0,4	400
0,5	400
0,6	400
0,7	400
0,8	400
0,9	400
1	400



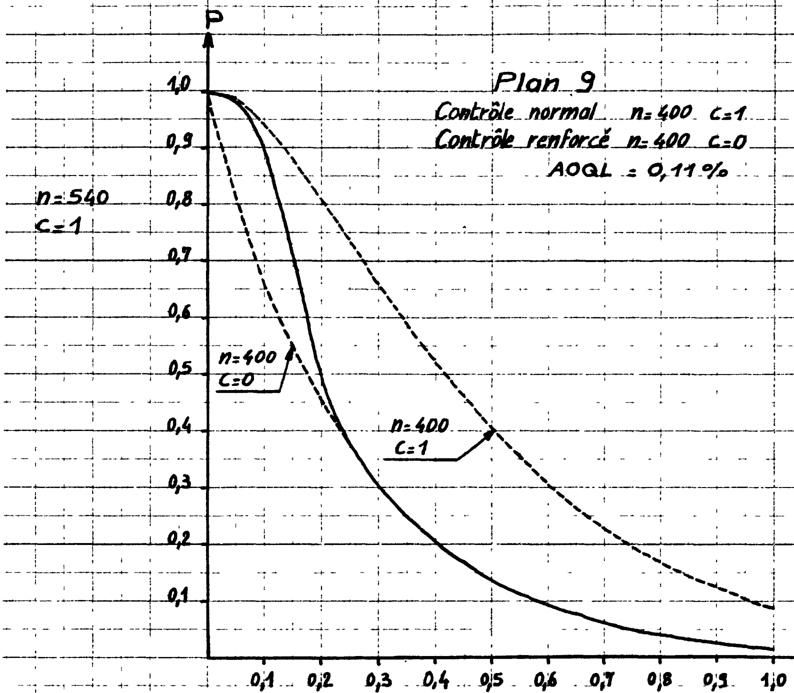
p%	$\bar{n}$
0,02	300
0,04	300
0,06	302
0,08	308
0,1	323
0,2	478
0,3	499
0,4	500
0,5	500
0,6	500
0,7	500
0,8	500
0,9	500
1	500



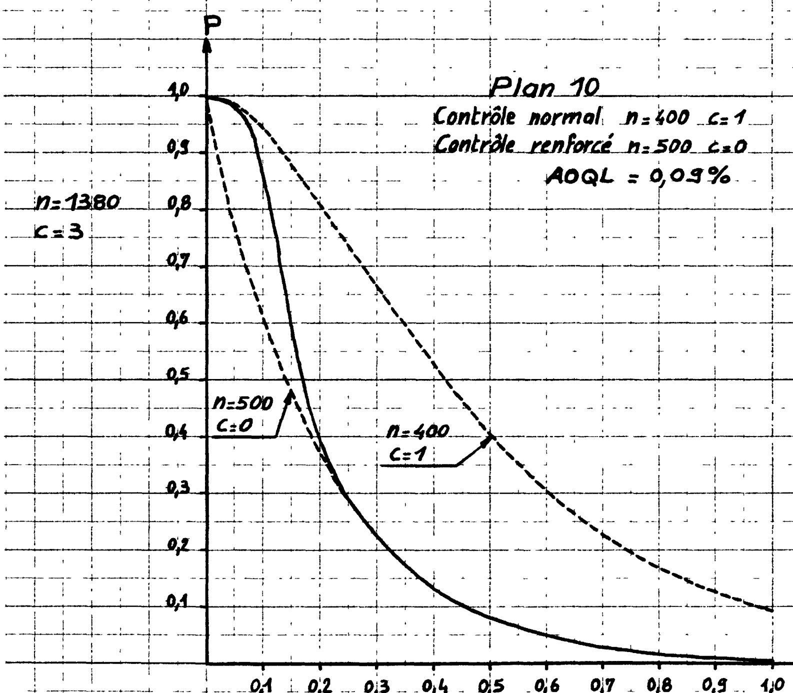
p%	$\bar{n}$
0,02	300
0,04	302
0,06	322
0,08	420
0,1	660
0,2	999
0,3	1000
0,4	1000
0,5	1000
0,6	1000
0,7	1000
0,8	1000
0,9	1000
1	1000



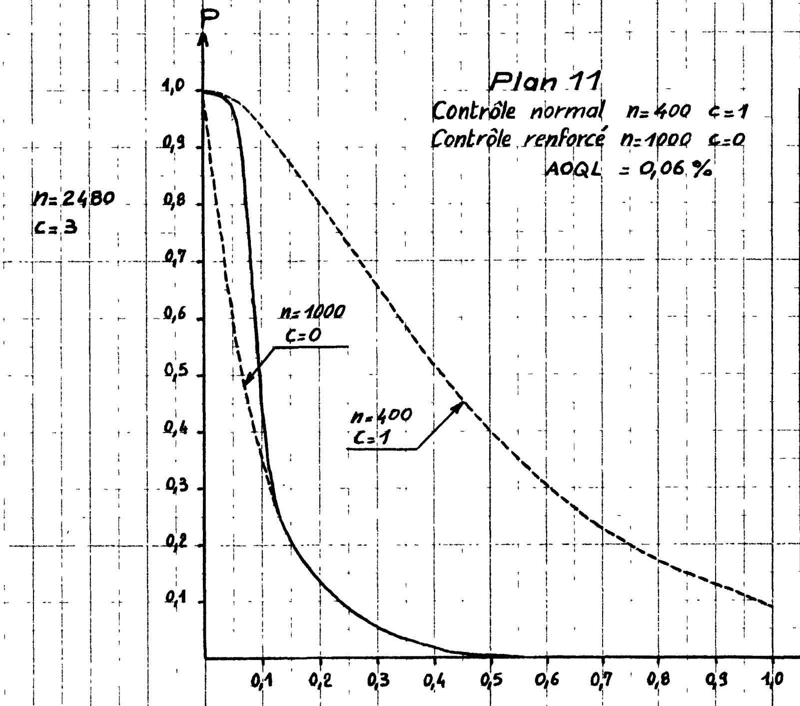
p%	$\bar{n}$
0,02	300
0,04	309
0,06	424
0,08	961
0,1	1396
0,2	1500
0,3	1500
0,4	1500
0,5	1500
0,6	1500
0,7	1500
0,8	1500
0,9	1500
1	1500



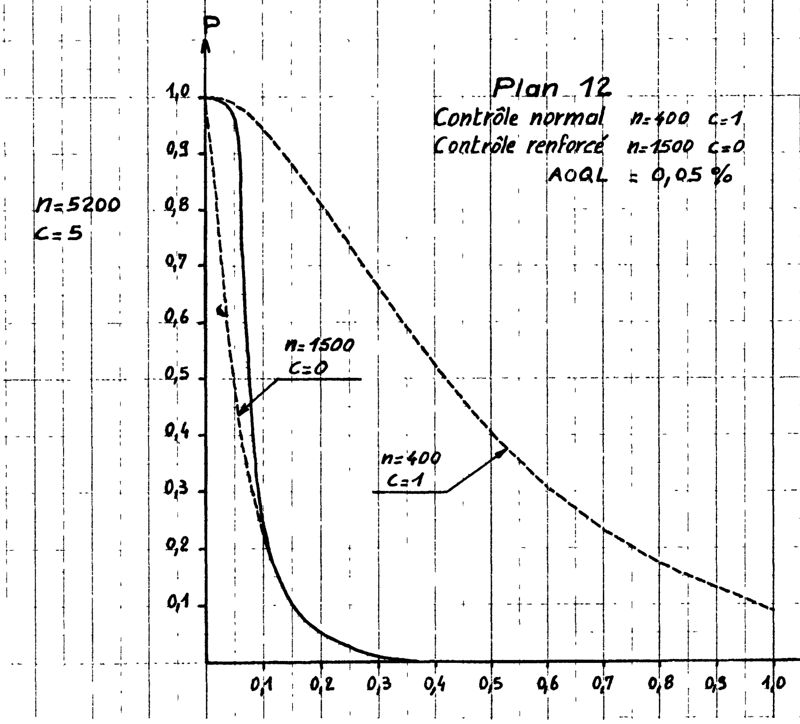
p %	$\bar{n}$
0,02	400
0,04	400
0,06	400
0,08	400
0,1	400
0,2	400
0,3	400
0,4	400
0,5	400
0,6	400
0,7	400
0,8	400
0,9	400
1	400



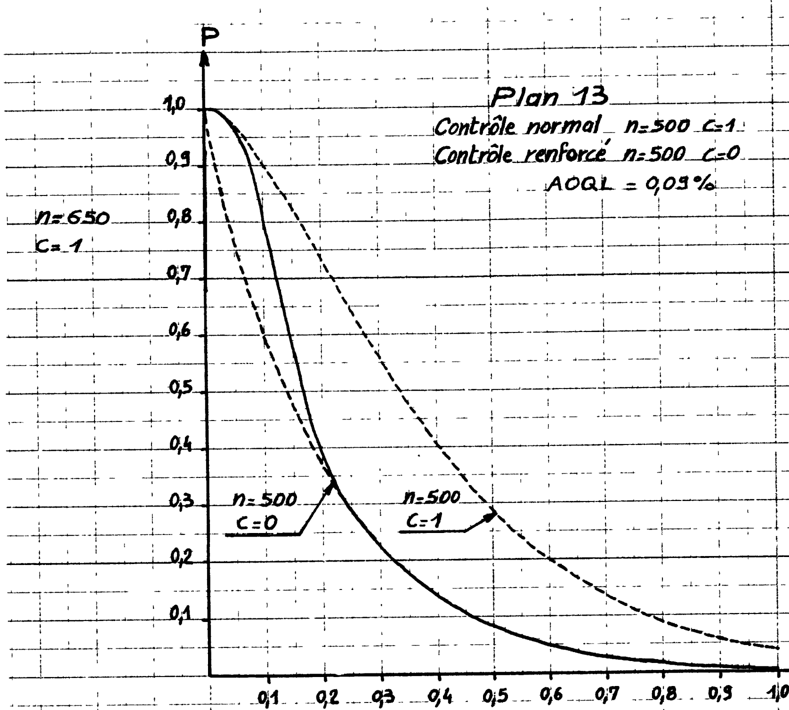
p %	$\bar{n}$
0,02	400
0,04	400
0,06	403
0,08	410
0,1	424
0,2	494
0,3	500
0,4	500
0,5	500
0,6	500
0,7	500
0,8	500
0,9	500
1	500



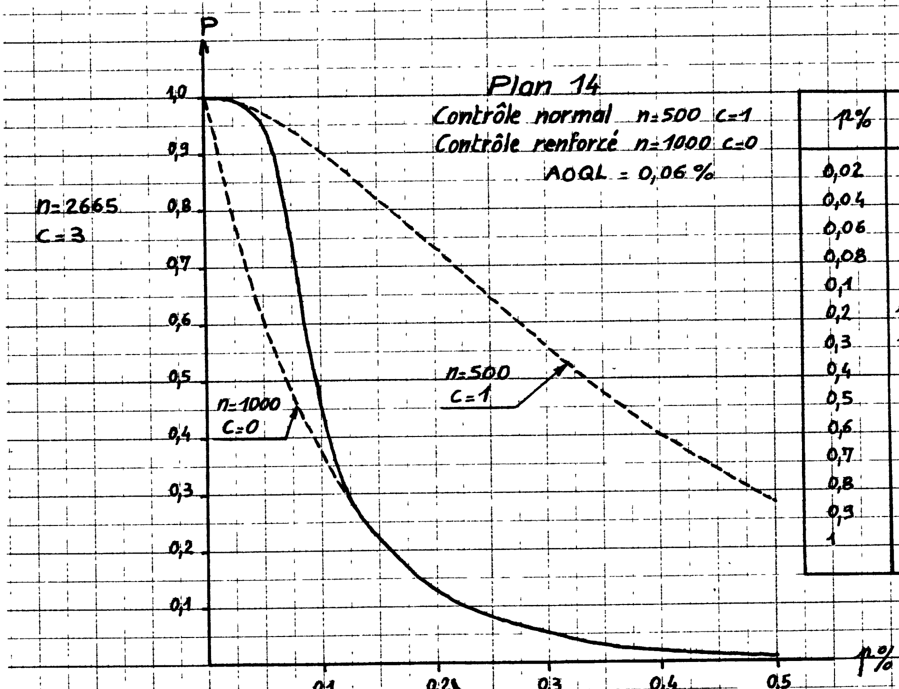
p%	$\bar{n}$
0,02	400
0,04	406
0,06	450
0,08	612
0,1	835
0,2	1000
0,3	1000
0,4	1000
0,5	1000
0,6	1000
0,7	1000
0,8	1000
0,9	1000
1	1000



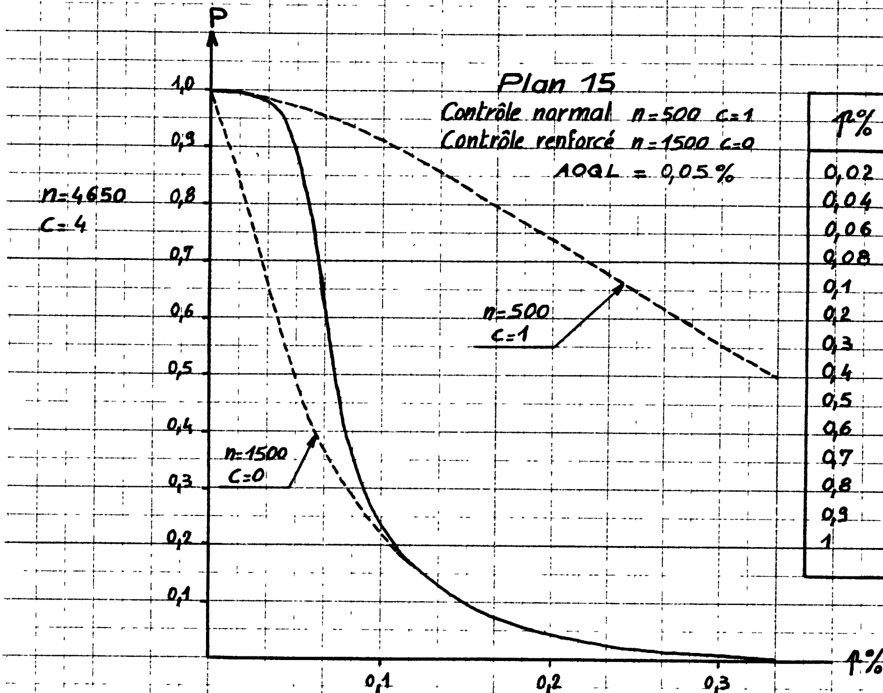
p%	$\bar{n}$
0,02	401
0,04	423
0,06	661
0,08	1239
0,1	1460
0,2	1500
0,3	1500
0,4	1500
0,5	1500
0,6	1500
0,7	1500
0,8	1500
0,9	1500
1	1500



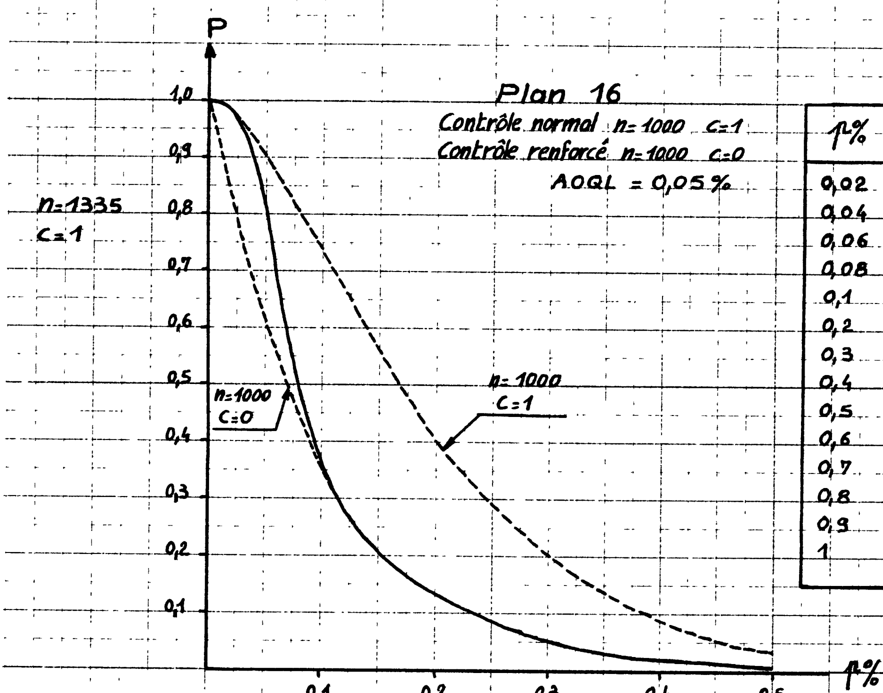
p%	$\bar{n}$
0,02	500
0,04	500
0,06	500
0,08	500
0,1	500
0,2	500
0,3	500
0,4	500
0,5	500
0,6	500
0,7	500
0,8	500
0,9	500
1	500



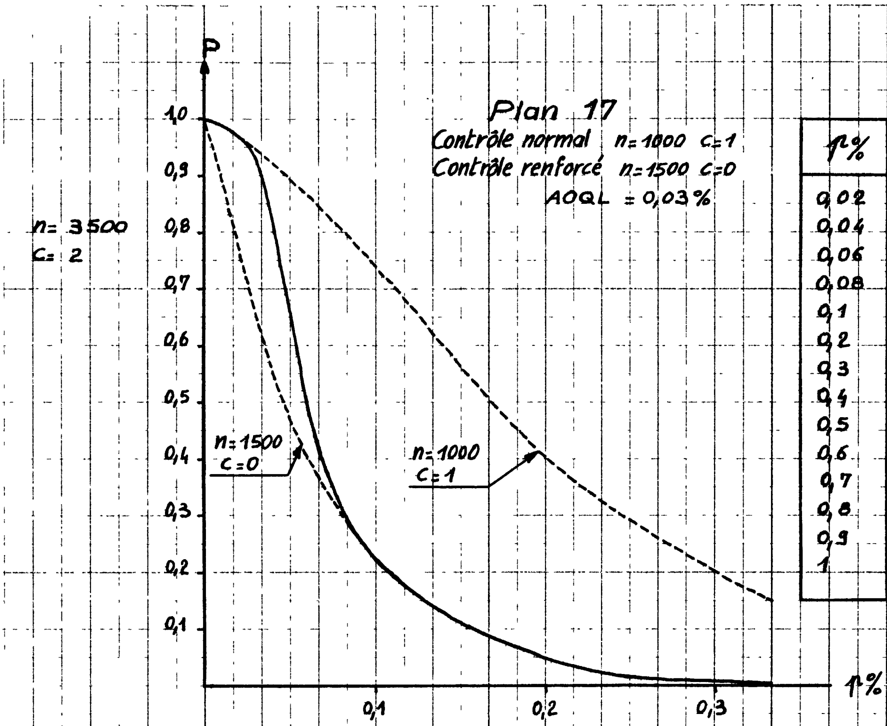
p%	$\bar{n}$
0,02	504
0,04	511
0,06	580
0,08	762
0,1	917
0,2	1000
0,3	1000
0,4	1000
0,5	1000
0,6	1000
0,7	1000
0,8	1000
0,9	1000
1	1000



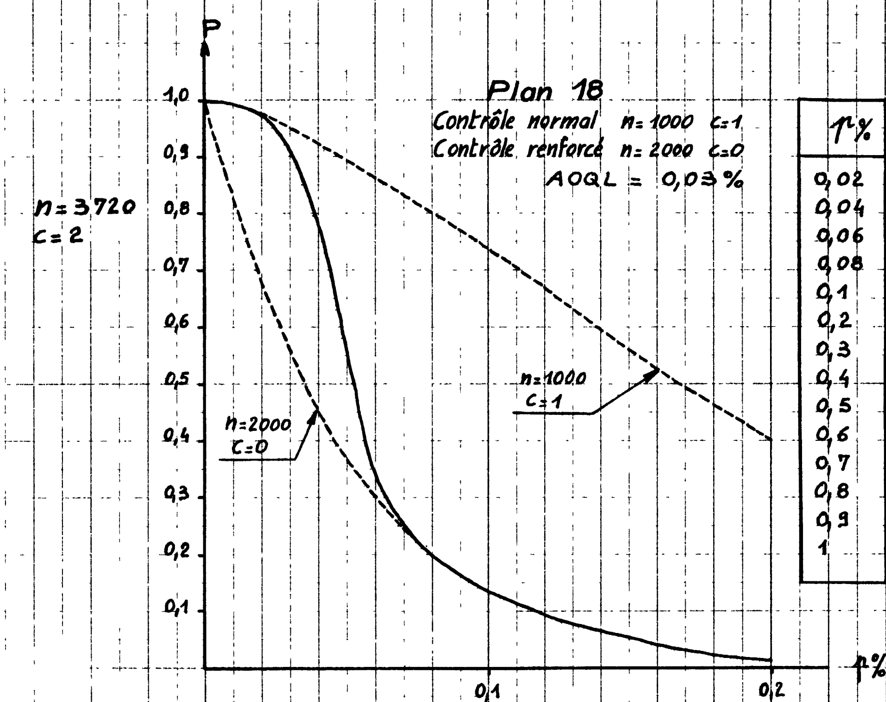
p%	$\bar{n}$
0,02	501
0,04	545
0,06	905
0,08	1366
0,1	1481
0,2	1500
0,3	1500
0,4	1500
0,5	1500
0,6	1500
0,7	1500
0,8	1500
0,9	1500
1	1500



p%	$\bar{n}$
0,02	1000
0,04	1000
0,06	1000
0,08	1000
0,1	1000
0,2	1000
0,3	1000
0,4	1000
0,5	1000
0,6	1000
0,7	1000
0,8	1000
0,9	1000
1	1000



p %	$\overline{n}$
0,02	1007
0,04	1161
0,06	1420
0,08	1487
0,1	1498
0,2	1500
0,3	1500
0,4	1500
0,5	1500
0,6	1500
0,7	1500
0,8	1500
0,9	1500
1	1500



p %	$\overline{n}$
0,02	1021
0,04	1523
0,06	1953
0,08	1996
0,1	2000
0,2	2000
0,3	2000
0,4	2000
0,5	2000
0,6	2000
0,7	2000
0,8	2000
0,9	2000
1	2000

Choix d'un plan en fonction du niveau de qualité

La difficulté consiste à choisir un plan de contrôle connaissant la proportion moyenne de pièces défectueuses dans une fabrication. A cette fin, il faut connaître l'efficacité des différents plans en fonction de la sévérité désirée pour le contrôle.

La sévérité du contrôle est donnée ici par la proportion de défectueux p correspondant à la probabilité d'acceptation P = 0.9. Le choix de la valeur 0.9 se justifie par le fait que la fabrication ne désire pas se voir refuser un lot dont le niveau de qualité serait acceptable.

La puissance du contrôle peut être donnée par le rapport de la proportion de défectueux p_1 correspondant à la probabilité d'acceptation P = 0.1 à la proportion de défectueux p_2 correspondant à la probabilité d'acceptation P = 0.9.

Le tableau 2 résume ces informations.

Tableau 2

	Sévérité du contrôle (probabilité d'acceptation = 0.9)										
Puissance des plans	0.03 %	0.04 %	0.05 %	0.06 %	0.07 %	0.08 %	0.09 %	0.10 %	0.11 %	0.13 %	0.15 %
2					4						
2.5				8 12			3				
3			15		7						
3.5					11					2	1
4	18			14					6		
5							10				
5.5	17					13			5		
6		16						9			

Les numéros de ce tableau sont ceux des plans de contrôle.

On constate par exemple que si la sévérité du contrôle est de 0.06 % (ce qui correspond à la proportion moyenne de pièces défectueuses dans la fabrication) on a le choix entre trois plans

- Les plans 8 : (n_1 = 300 c_1 = 1, n_2 = 1 500 c_2 = 0)
  et 12 : (n_1 = 400 c_1 = 1, n_2 = 1 500 c_2 = 0)
  de puissance 2.5
- et le plan 14 : (n_1 = 500 c_1 = 1, n_2 = 1 000 c_2 = 0)
  de puissance 4.

Les plans 8 et 12 ont une puissance de 2.5 alors que le plan 14 a une puissance de 4. Cela signifie que la pente des courbes d'efficacité 8 et 12 est plus raide que la pente du plan 14.

On retiendra donc les plans 8 et 12.

De plus, pour p = 0.06 %, le plan 8 fait prélever en moyenne $\bar{n}$ = 424 pièces et le plan 12 fait prélever $\bar{n}$ = 661 pièces.

L'intérêt étant de prélever le moins de pièces possible tout en conservant la même sévérité et la même puissance on adoptera le plan 8

$$(n_1 = 300 \quad c_1 = 1, \quad n_2 = 1\,500 \quad c_2 = 0)$$

En tenant compte des considérations précédentes, on peut, dans l'ensemble des plans calculés, en sélectionner un certain nombre présentant le plus d'intérêt.

Ces plans sont indiqués dans le tableau suivant (tableau 3).

Tableau 3 - tableau d'utilisation d'après la sévérité du contrôle.

Niveau moyen de qualité p	Numéro des plans	Contrôle normal		Contrôle renforcé	
		n_1	c_1	n_2	c_2
0.03 %	18	1 000	1	2 000	0
0.05 %	15	500	1	1 500	0
0.06 %	8	300	1	1 500	0
0.07 %	4	200	1	1 500	0
0.09 %	3	200	1	1 000	0
0.11 %	6	300	1	500	0
0.13 %	2	200	1	500	0
0.15 %	1	200	1	400	0

Utilisation de ce tableau :

a) la qualité moyenne de la fabrication est plus mauvaise que la valeur p correspondant à P = 0.9 : le plan n'est pas adapté. D'où l'option :

1. Améliorer la qualité.

2. Changer de plan de contrôle.

b) la qualité moyenne de la fabrication est sensiblement meilleure que la valeur p correspondant à P = 0.9 :

1. Le niveau de qualité doit être suivi de très près : il faut changer de plan de contrôle.

2. Le niveau de qualité donne satisfaction : on conserve l'ancien plan.

7 - UN EXEMPLE D'APPLICATION

L'exemple qui suit concerne le contrôle des corps roulants (billes), éléments constitutifs d'un roulement.

Ces corps roulants sont exécutés en grande série et par charges, ou lots de fabrication. Chaque charge subit successivement les différentes phases d'usinage. Après certaines d'entre elles, le lot est réceptionné, en particulier après la dernière opération de finition.

A ce stade, pour les billes dont la taille varie entre 5/32 et 9/16 pouce, on a établi, pendant une période de six mois, un bilan indiquant les proportions de billes présentant des défauts majeurs, et ce, pour chaque type de défaut.

Ces résultats sont résumés dans le tableau 4. La proportion moyenne de billes défectueuses est de $\frac{431}{699\,500} = 0.061\ \%$.

Tableau 4

Numéros des billes Ø en pouces	Quantité échantillonnée	Défaut 1	Défaut 2	Défaut 3	Défaut 4	Défaut 5	TOTAL
5/32	4 000	3				1	4
3/16	43 000	39				1	40
13/64	9 000			3			3
7/32	23 500	25		1	6		32
15/64	63 000	38		28	1		67
1/4	24 000	3		1	1		5
17/64	52 000			1			1
9/12	7 000						
19/64	5 500						
5/16	64 000	1		3	3	4	11
21/64	3 000						
11/32	4 500		2			1	3
3/8	133 000	3	2	5	61	39	110
25/64	5 000					7	7
13/32	24 000	14		2		1	17
7/16	90 000	1	3		73	11	88
15/32	19 000			6		4	10
31/64	29 500		1			3	4
1/2	12 500	2					2
33/64	40 500	6	1	3	12	2	24
17/32	29 500		2	1			3
9/16	14 000						
TOTAL	699 500	135	11	54	157	74	431

Pour p = 0.07 % le tableau d'utilisation du paragraphe 6 (tableau 3) désigne le plan 4 :

contrôle normal $n_1 = 200 \quad c_1 = 1$
contrôle renforcé $n_2 = 1\,500 \quad c_2 = 0$

Les colonnes situées à droite de la courbe d'efficacité correspondant à ce plan indiquent que pour p = 0.06 %, le nombre moyen de billes prélevées sera de $\bar{n} = 232$

8 - REFERENCES ET REMERCIEMENTS

- Pour le paragraphe 2 on trouvera des développements dans :

KEMENY - SCHLEIFER - SNELL - THOMSON : les mathématiques modernes dans la pratique des affaires - Editeur Dunod 1964.

GIRAULT : première initiation aux processus de Markov - R S A - volume XII n° 3 - 1964.

- Pour les paragraphes 3 et 5, une première approche se trouve dans :

T. L. BURNETT - Annual Technical Conference Transaction 1968 (American Society for Quality Control).

- Nous remercions :

MM. LEDEZ et VESSEREAU du Centre de Formation de l'Institut de Statistique de l'Université de PARIS de nous avoir communiqué la méthode de résolution directe exposée dans le paragraphe 4.

M. B. BRUN, de la SNR, a revu l'organigramme figurant dans cette étude.

M. P. MEUNIER a bien voulu se charger de la programmation en Fortran sur IBM.