

G. ROUZET

Conception et critique d'un essai visant à prouver le niveau de fiabilité que possède un dispositif

Revue de statistique appliquée, tome 17, n° 4 (1969), p. 67-75

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1969__17_4_67_0

© Société française de statistique, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCEPTION ET CRITIQUE D'UN ESSAI VISANT A PROUVER LE NIVEAU DE FIABILITÉ QUE POSSÈDE UN DISPOSITIF

G. ROUZET

Chef du Contrôle général qualité de la Compagnie des Compteurs

Il paraît a priori légitime de penser que si le niveau de fiabilité d'un dispositif dans des conditions données est connu - soit parce qu'une prédiction sur des bases valables a pu en être faite, soit parce que ce dispositif est issu d'une production dont la fiabilité a été étudiée - il soit possible, ayant annoncé ce niveau, de concevoir un essai permettant, s'il est besoin, d'en apporter la preuve.

Si cette idée vient à l'esprit de quiconque possède la pratique de la statistique, elle sera aussitôt suivie d'un réflexe de doute, puisque cette preuve relève de l'estimation par un intervalle de confiance, de sorte que, le niveau de confiance devant être élevé, la borne inférieure de cet intervalle traduira en général un niveau moins bon que le niveau réel dont on veut faire la preuve.

Il nous a paru intéressant d'apporter quelques précisions sur ce point en traitant le problème d'une manière quantitative dans un cas particulier.

Nous avons choisi celui où le dispositif est réparé après chaque défaillance, où la distribution des intervalles de temps entre défaillances consécutives est exponentielle, le niveau de fiabilité étant précisé par la valeur de la MTBF, soit θ . (On remarquera que la solution serait identique pour la durée de vie moyenne m d'un dispositif non réparé dont la loi de probabilité de la durée de vie est exponentielle).

1 - CONCEPTION DE L'ESSAI

Il s'agit de prouver que la MTBF du dispositif atteint la valeur annoncée θ_p .

Si nous étudions la durée de vie cumulée lors de l'essai et que nous utilisons un essai tronqué à la durée de vie cumulée V , la borne minimale de l'intervalle de confiance unilatéral, au niveau de confiance $(1 - \alpha)$, pour l'estimation de θ est donnée, en fonction du nombre k de défaillances observées pendant l'essai, par l'expression :

$$\theta \geq \frac{2V}{\chi_{1-\alpha}^2 (2k + 2)}$$

où $\chi^2_{1-\alpha}$ désigne la valeur de χ^2 telle que :

$$\text{prob} \{ \chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha} \} = 1 - \alpha$$

La fiabilité étant prouvée lorsque la conclusion de l'essai est :

$$\theta \geq \theta_p$$

on peut donc définir la valeur de V par la relation :

$$\frac{2V}{\chi^2_{1-\alpha} (2k + 2)} = \theta_p$$

d'où

$$V = \theta_p \frac{\chi^2_{1-\alpha} (2k + 2)}{2}$$

Pour simplifier la notation, nous considèrerons le rapport η de la durée de vie cumulée à la valeur de θ_p ; et comme V dépend de k, nous noterons la limite :

$$\eta_k = \frac{\chi^2_{1-\alpha} (2k + 2)}{2}$$

La valeur de η_k est donc aisée à obtenir pour k donné. Mais la valeur de k ne peut être connue avant le terme de l'essai. Plus précisément, η_k est modifié chaque fois qu'une défaillance se produit au cours de l'essai, le terme de celui-ci s'en trouvant repoussé.

On en arrive donc à la conception d'un essai tel que, l'enregistrement de son déroulement étant fait sur un graphique (η , k) selon la figure 1, la preuve est réalisée lorsque l'un des points (η_k , k) est atteint.

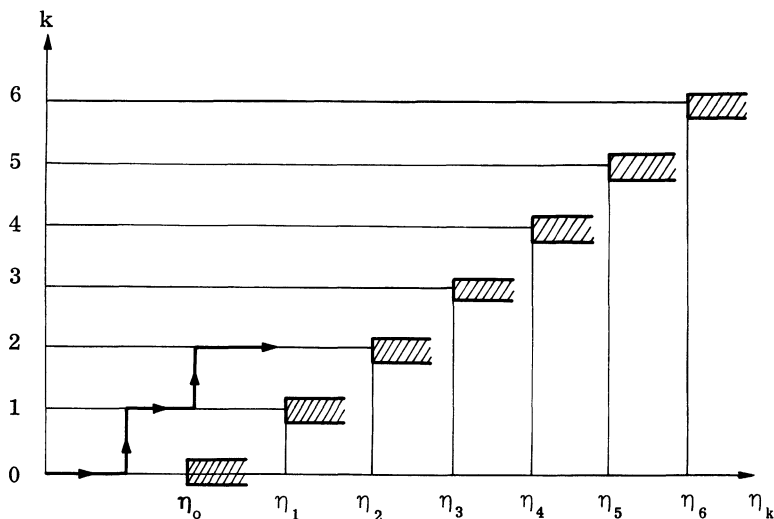


Fig. 1

On pourra remarquer que cette figure présente quelque analogie avec le support graphique d'un plan d'échantillonnage progressif, à ceci près que, si la correspondance entre limite d'obtention de la preuve et limite d'acceptation est claire, il n'est pas ici d'équivalent à la limite de refus. Pour éviter toute ambiguïté, il suffit de bien préciser les bases respectives de ces deux types d'essais :

- dans un plan d'échantillonnage, on soumet les dispositifs à la règle d'un jeu au terme duquel la décision est prise d'accepter ou de refuser le lot de dispositifs en cause ; la probabilité d'accepter est fonction de la valeur θ réelle - et quelconque - dans le lot.

- dans l'essai défini ici, les dispositifs possèdent effectivement une MTBF égale à θ_p et l'essai a pour but de le prouver ; il est donc légitime que cet essai soit poursuivi jusqu'à ce que la preuve soit faite, sans qu'une quelconque limite de "refus" ait à intervenir.

Cette remarque attire tout de même l'attention sur deux conditions auxquelles doit satisfaire l'essai tel que nous l'avons défini :

- sous l'angle du principe, la définition n'est réellement légitime que si la probabilité de réaliser abusivement la preuve que $\theta = \theta_p$ lorsque $\theta \neq \theta_p$ est suffisamment petite ;

- sous l'angle pratique, l'essai ne présente d'intérêt que si la valeur moyenne de la durée de vie cumulée nécessaire, mesurée par $E(\eta)$, n'est pas trop élevée.

Nous sommes donc conduits, pour faire la critique de l'essai de fiabilité prouvée ainsi conçu, à étudier la probabilité p_p de faire la preuve du niveau de fiabilité annoncé θ_p lorsque la MTBF réelle a une valeur θ quelconque, que nous étudierons par le rapport :

$$r = \frac{\theta}{\theta_p}$$

L'étude quantitative dont on trouvera le résumé ci-après, s'intéresse ainsi aux valeurs de p_p et de $E(\eta)$ en fonction de r , pour $(1 - \alpha)$ donné.

Sans qu'aucun calcul soit nécessaire il est bien évident, en considérant la figure 1, que p_p est nécessairement une fonction croissante de r . Nous avons dit qu'il fallait s'assurer que p_p était petit pour $r < 1$. Mais pour $r > 1$, le risque d'une pseudo-preuve est nécessairement grand, et tend vers la certitude lorsque r croît.

Ceci est évidemment dû au choix de l'intervalle de confiance unilatéral, qui, en fait, nous conduit à écrire : $\theta \geq \theta_p$. Si nous avons choisi ce type d'intervalle, c'est que nous avons tenu compte de l'aspect pratique, dans lequel le fait d'avoir une fiabilité meilleure que celle prouvée est favorable à l'utilisateur, et est susceptible en tout état de cause de conséquences moins graves que le fait d'avoir une fiabilité moins bonne que celle prouvée.

Par ailleurs cela nous permet d'étudier du même fait un autre problème, dont l'énoncé est : "Définir un essai destiné à prouver que la MTBF d'un dispositif est au moins égale à θ_p ". On pourra alors se demander, en particulier, quelle doit être la valeur de r pour que p_p soit proche de l'unité.

Il est vrai que cette seconde formulation nous écarte de la notion de preuve pour nous rapprocher du principe d'un essai de recette ; mais c'est peut être là a contrario une source d'intérêt supplémentaire à une étude quantitative qui permette de savoir s'il s'agit d'une méthode valable pour un essai de recette.

Selon cette formulation, pour $r < 1$, p_p reste le risque d'une preuve qui ne serait pas réellement justifiée, tandis que pour $r > 1$, $(1 - p_p)$ devient le risque de ne pouvoir apporter la preuve réellement justifiée.

2 - RESUME DE L'ETUDE QUANTITATIVE

2.1 - Etude de p_p en fonction de r et de $(1 - \alpha)$

Appelons P_k la probabilité que la preuve soit faite en $\eta = \eta_k$.

On a :

$$p_p = \sum_{k=0}^{\infty} P_k$$

Le calcul des P_k peut être fait de trois manières différentes :

1/ On étudie tous les cas d'apparition des défaillances conduisant à l'arrêt de l'essai en η_k . Ainsi :

- pour $\eta = \eta_0$ la seule possibilité est :

0 défaillance dans l'intervalle $(0 ; \eta_0)$

- pour $\eta = \eta_1$ la seule possibilité est :

{ 1 défaillance dans $(0 ; \eta_0)$
 { 0 défaillance dans $(\eta_0 ; \eta_1)$

- pour $\eta = \eta_2$ deux possibilités :

{ 2 défaillances dans $(0 ; \eta_0)$
 { 0 défaillance dans $(\eta_0 ; \eta_1)$
 { 0 défaillance dans $(\eta_1 ; \eta_2)$

ou :

{ 1 défaillance dans $(0 ; \eta_0)$
 { 1 défaillance dans $(\eta_0 ; \eta_1)$
 { 0 défaillance dans $(\eta_1 ; \eta_2)$

etc.

On sait que la probabilité que le nombre de défaillances dans un intervalle $(\eta_1 ; \eta_j)$ donné soit δ , est fournie, dans le cadre des hypothèses que nous avons formulées, par la loi de Poisson, dont il n'est pas difficile de vérifier que l'expression peut se mettre sous la forme :

$$p_{\delta}(\eta_1 ; \eta_j) = e^{-\frac{\eta_j - \eta_1}{r}} \frac{(\frac{\eta_j - \eta_1}{r})^{\delta}}{\delta !}$$

D'où les valeurs de :

$$P_0 = p_0(0; \eta_0)$$

$$P_1 = p_1(0; \eta_0) \cdot p_0(\eta_0; \eta_1)$$

etc.

d'où finalement p_p .

2/ Les cheminements sur le graphique (η, k) conduisant à l'arrêt de l'essai en η_k , peuvent aussi être obtenus en retirant de tous les cheminements reliant l'origine au point (η_k, k) , ceux qui ne sont pas possibles parce qu'ils auraient conduit plus tôt à arrêter l'essai. P_k peut donc aussi être obtenu par la relation de récurrence :

$$P_k = p_k(0; \eta_k) - \sum_{j=0}^{k-1} P_j \cdot p_{k-j}(\eta_j; \eta_k)$$

3/ Une variante de la relation précédente, obtenue en remarquant que le nombre de défaillances dans l'intervalle $(\eta_{k-1}; \eta_k)$ doit nécessairement être nul, s'écrit :

$$P_k = p_0(\eta_{k-1}; \eta_k) \left\{ P_k(0; \eta_{k-1}) - \sum_{j=0}^{k-2} P_j \cdot p_{k-j}(\eta_j; \eta_{k-1}) \right\}$$

Nous avons utilisé la troisième méthode, plus propice pour la réalisation des calculs.

Nous avons ainsi obtenu les valeurs de p_p figurant dans le tableau de la figure 2.

$1 - \alpha$ r	0,20	0,60	0,90
0,2		0,010	0,000
0,5		0,215	0,013
1	0,991	0,826	0,370
2		0,999	0,988
5		1,000	1,000
10		1,000	1,000

Fig. 2

Par exemple, pour $1 - \alpha = 90 \%$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_0 = 2,3026 \\ \eta_1 = 3,8895 \\ \eta_2 = 5,3225 \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

d'où, pour $r = 1$;

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = 0,1000 \\ P_1 = 0,0471 \\ P_2 = 0,0308 \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

la somme de ces probabilités partielles donnant $p_p = 0,370$.

Les valeurs du tableau ont permis de tracer les courbes des figures 3 et 4.

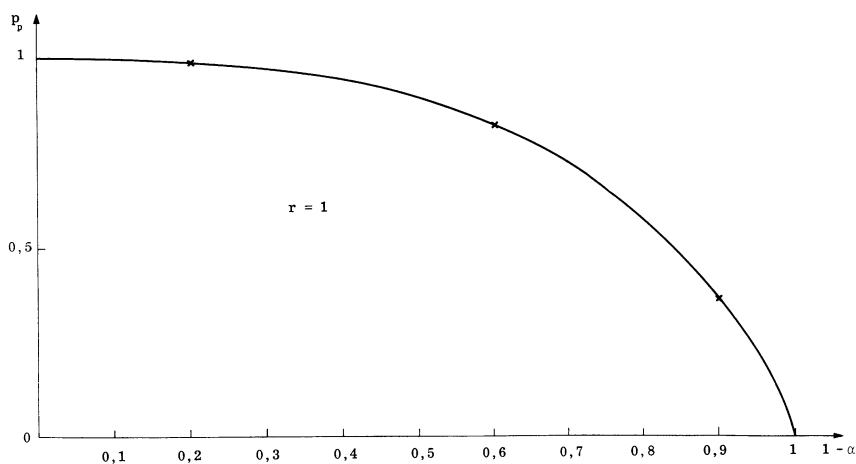


Fig. 3

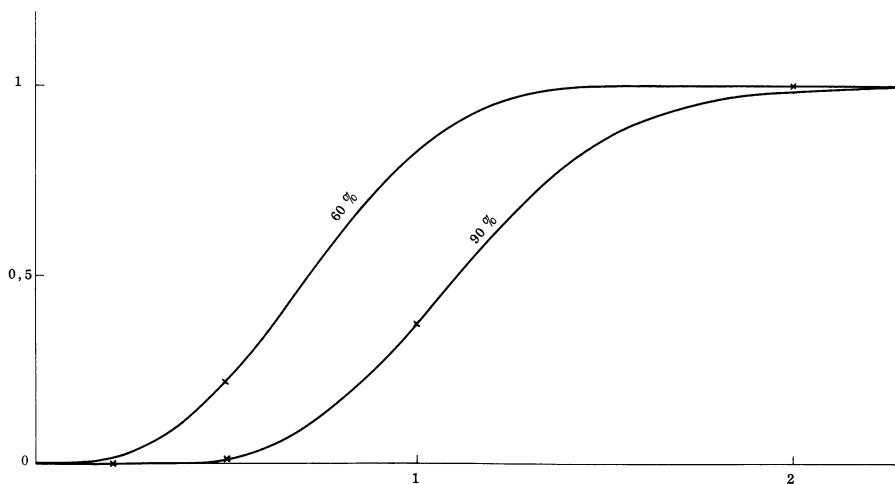


Fig. 4

La première de ces figures montre que pour un niveau de confiance élevé, p_p présente une valeur insuffisante pour que l'essai soit digne d'intérêt. Ainsi, avec un niveau de confiance de 90 %, la probabilité de prouver que la MTBF est celle annoncée, alors que précisément $r = 1$ (énoncé strict du problème), n'est que de 37 %.

Pour que p_p prenne une valeur voisine de 1, il faut que le niveau de confiance soit inférieur à 50 %, mais alors la "preuve" perd toute signification pratique.

La figure 4 permet d'apprécier, pour la formulation du problème choisie : énoncé strict ou énoncé élargi, d'une part le risque d'une pseudo-preuve, d'autre part le risque d'insuccès de l'essai, pourtant poursuivi de manière illimitée.

On constate pour $1 - \alpha = 90 \%$, ainsi que pour $1 - \alpha = 60 \%$ étudié comme élément de comparaison, que la courbe n'est pas assez sélective pour que la définition de l'essai puisse donner satisfaction dans son principe même.

Enfin, la réponse à la question que nous nous étions posée dans le cadre de l'énoncé élargi, est qu'un dispositif doit avoir une MTBF double de celle que l'on veut "prouver" pour que la probabilité du succès de l'essai soit voisine de la certitude, lorsqu'on utilise le niveau de confiance $(1 - \alpha) = 90 \%$. Cette réponse n'est pas, elle non plus, très satisfaisante.

2.2 - Etude $E(\eta)$

Bien que les constatations précédentes fassent perdre beaucoup de son intérêt à cette seconde partie des résultats, nous les donnons à titre d'information.

La valeur moyenne du temps d'essai est mesurée par la valeur moyenne de η , soit $E(\eta)$. Puisque, pour les valeurs intéressantes de r , c'est-à-dire celles situées au voisinage de $r = 1$, la probabilité d'avoir à poursuivre l'essai indéfiniment sans parvenir à établir la "preuve" a une valeur finie, il s'ensuit que $E(\eta)$ est infini.

Pour compléter cette conclusion, on pourrait se demander quelle est la valeur de $E(\eta)$ pour les essais conduisant à l'obtention de la preuve, donc à une valeur finie de η .

Nous avons préféré poser le problème d'une manière un peu différente, en nous basant sur la remarque que les valeurs de P_k deviennent, pour α et r donnés, très petites au-delà d'une certaine valeur de k , soit L . De sorte que, si, lors d'un essai en cours, on arrive à $k = L$ sans avoir pu établir la preuve cherchée, la probabilité de pouvoir l'établir ensuite est faible. Ce qui revient encore à constater que si l'on convient d'arrêter l'essai lorsque $k = L$ et de conclure que la preuve ne peut être réalisée, les probabilités de succès étudiées au paragraphe précédent ne seront que très peu modifiées.

Nous avons ainsi introduit dans cette partie de l'étude la notion supplémentaire de troncature de l'essai, à $k = L$; nous avons recherché, pour α donné, quelle valeur de L pouvait être retenue pour que p_p ne se trouve que faiblement modifié, et étudié la valeur correspondante de $E(\eta)$.

On constate sur les figures 5 et 6 que la valeur de L peut être de l'ordre de 20 pour $1 - \alpha = 90 \%$ et de l'ordre de 10 pour $1 - \alpha = 60 \%$.

La valeur de $E(\eta)$ peut alors être calculée en fonction de r , ce qui fournit les seconds graphiques des figures 5 et 6.

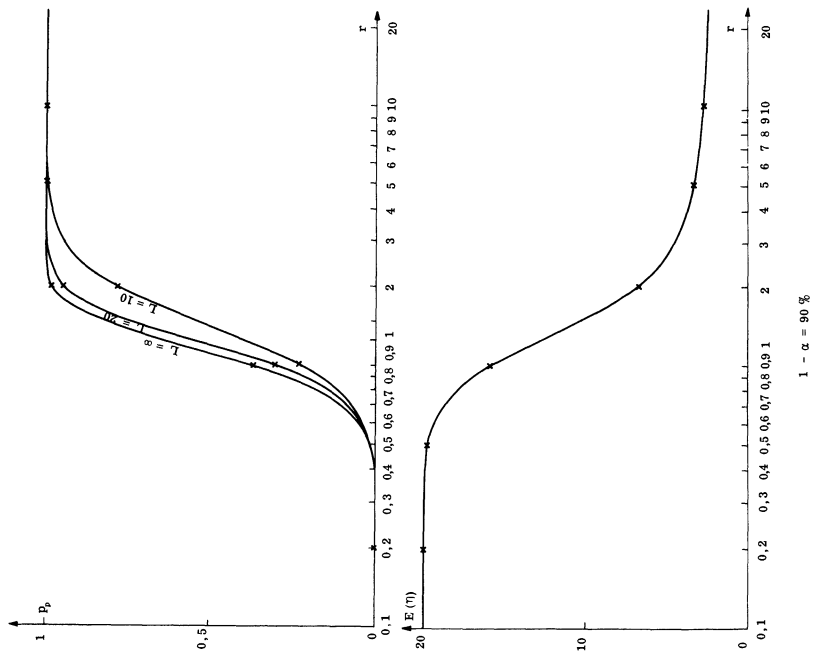


Fig. 5

$1 - \alpha = 90\%$

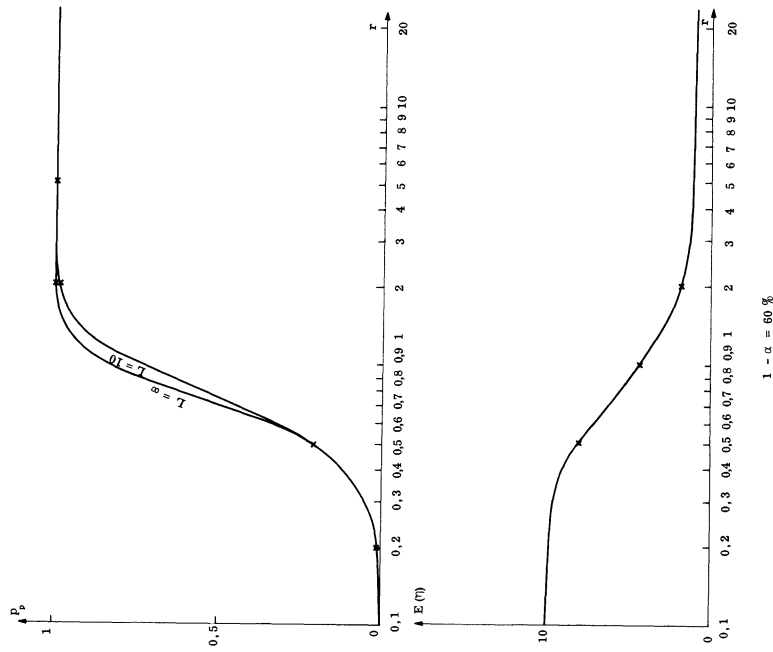


Fig. 6

$1 - \alpha = 60\%$

On constate que, pour le niveau de confiance satisfaisant de 90 %, et avec $L = 20$, la valeur de $E(\eta)$ est de l'ordre de 16 pour $r = 1$, c'est-à-dire que la durée de vie cumulée nécessaire est en moyenne 16 fois la valeur de la MTBF, ce qui se traduit par un essai coûteux.

3 - CONCLUSION

Quelque légitime que soit l'idée de définir un essai permettant d'apporter la preuve que le niveau de fiabilité d'un dispositif atteint le niveau annoncé, et qu'il possède réellement, nous constatons, dans le cas étudié, qu'un tel essai serait coûteux et s'accompagnerait de risques, de preuve erronée ou d'insuccès, peu satisfaisants, pour finalement conduire à une probabilité faible d'apporter cette preuve lorsqu'elle est réellement justifiée, avec un niveau de confiance suffisant : ainsi la probabilité est de 37 % de prouver avec un niveau de confiance de 90 % que la MTBF, constante, d'un dispositif atteint la valeur θ_p qui est précisément celle qu'il possède réellement.

Cette idée ne peut donc être mise en oeuvre d'une manière satisfaisante.

Si l'on abandonne la notion de "preuve" et que l'on désire seulement définir un essai de fiabilité tel que la probabilité d'accepter un dispositif dont le niveau de fiabilité est satisfaisant soit grande et la probabilité d'accepter un dispositif dont le niveau de fiabilité est insuffisant soit petite, on peut alors mettre en oeuvre la méthode des plans d'échantillonnage. On trouve dans divers documents les caractéristiques de tels plans. Les conclusions de la présente étude sont donc favorables à leur utilisation pour la définition des essais de fiabilité.