

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

R. SNEYERS

Notes sur la notion d'indépendance climatologique

Revue de statistique appliquée, tome 17, n° 4 (1969), p. 45-53

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1969__17_4_45_0

© Société française de statistique, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTES SUR LA NOTION D'INDÉPENDANCE CLIMATOLOGIQUE

R. SNEYERS

Institut Royal Météorologique de Belgique

1 - INTRODUCTION

Lorsque la distribution de deux variables aléatoires x et y peut être définie par l'intermédiaire d'une même variable auxiliaire t , il peut se faire qu'à des fins de comparaison il y ait quelque intérêt à rapporter la distribution de l'une des deux variables à l'autre plutôt que de conserver la variable auxiliaire t comme variable de référence. Si de plus, les deux variables x et y sont en corrélation et que la distribution de la variable x est connue, il semble que l'existence de la corrélation doive permettre une estimation de la relation qui lie les fractiles de même ordre des variables x et y , d'autant plus précise que la corrélation est plus forte.

Dans une note antérieure [1] ce problème a été envisagé en supposant que la distribution des variables x et y se définit au moyen de la variable t grâce à la connaissance de paramètres de position μ_1 et μ_2 et de paramètres d'échelle σ_1 et σ_2 , c'est-à-dire que les fractiles de même ordre des trois variables sont liés par les relations :

$$x = \sigma_1 t + \mu_1 \quad \text{et} \quad y = \sigma_2 t + \mu_2 \quad (1)$$

et que de ce fait entre les fractiles de même ordre des variables x et y existe la relation :

$$y = a_1 x + b_1 \quad (2)$$

avec

$$a_1 = \sigma_2 / \sigma_1 \quad \text{et} \quad b_1 = \mu_2 - a_1 \mu_1 \quad (3)$$

Si l'on dispose alors d'un échantillon aléatoire et simple de couples de valeurs correspondantes des variables x et y et si $\hat{\sigma}_i$ et $\hat{\mu}_i$, $i = 1, 2$ désignent les estimations des paramètres σ_i et μ_i fournis par l'échantillon dans l'éventualité où les variables x et y sont indépendantes, les estimateurs considérés pour a_1 et b_1 ont été ceux obtenus en remplaçant dans (3) soit uniquement σ_2 et μ_2 , soit à la fois σ_2 , μ_2 , σ_1 et μ_1 par leurs estimations. La question du meilleur choix ainsi posée a alors été résolue dans le cas où les variables aléatoires possèdent des distributions normales et dans celui où les estimateurs de μ_1 et de σ_1 sont des estimateurs linéaires.

Il est clair par ailleurs que cette méthode donne également des estimateurs des paramètres σ_2 et μ_2 puisque dans les relations

$$\sigma_2 = a_1 \sigma_1 \quad \text{et} \quad \mu_2 = b_1 + a_1 \mu_1 \quad (4)$$

déduites de (3) il suffit à cet effet de remplacer a_1 et b_1 par les estimations obtenues.

Deux problèmes n'avaient toutefois pas été envisagés, tout d'abord celui de l'efficacité des estimateurs proposés et ensuite, celui de l'existence d'estimateurs le plus efficaces.

En outre, il nous est apparu que dans la note mentionnée le calcul des covariances des estimations des paramètres des distributions des variables x et y dans le cas d'estimateurs linéaires ne possédait pas toute la généralité requise.

Pour ces diverses raisons, un nouvel examen du problème présentait quelque utilité, d'autant plus qu'en reconnaissant qu'il s'agit en réalité d'un problème d'estimation pour une distribution conjointe à deux variables aléatoires dont l'une des distributions marginales est connue, on replace le problème envisagé dans son cadre élémentaire.

2 - GENERALITES

Soit $x_i, y_i, i = 1, 2, \dots, n$ l'échantillon aléatoire et simple de couples de valeurs observées correspondantes des variables aléatoires x et y , ρ le coefficient de corrélation de ces variables, x_j et $y_j, j = 1, 2, \dots, n$ ces mêmes valeurs observées lorsqu'on les ordonne par ordre croissant :

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_j \leq \dots \leq x_n ; y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_j \leq \dots \leq y_n ;$$

t_1 et t_j, t'_1 et t'_j , les valeurs de t correspondant par les relations 1.(1) respectivement à x_1 et x_j ainsi qu'à y_1 et y_j .

On en déduit (cf. [1]), dans le cas de variables normales, les estimateurs :

$$\hat{\mu}_1 = \Sigma x_i / n, \quad \hat{\mu}_2 = \Sigma y_i / n, \quad \hat{\sigma}_1^2 = \Sigma (x_i - \hat{\mu}_1)^2 / n, \quad \hat{\sigma}_2^2 = \Sigma (y_i - \hat{\mu}_2)^2 / n, \quad (1)$$

tandis que dans celui où les paramètres μ_k et $\sigma_k, k = 1, 2$, possèdent des estimateurs linéaires, on a posé :

$$\hat{\sigma}_1 = \Sigma \lambda_j x_j, \quad \hat{\sigma}_2 = \Sigma \lambda_j y_j, \quad \hat{\mu}_1 = \Sigma \nu_j x_j \quad \text{et} \quad \hat{\mu}_2 = \Sigma \nu_j y_j, \quad (2)$$

où λ_j et ν_j sont des constantes bien déterminées.

Sachant alors que sans nuire à la généralité des résultats on peut, pour simplifier les calculs, supposer $\rho > 0, E(t) = 0$ et $\text{var } t = 1$, on se souviendra que dans le premier cas, on a (cf. [2] p. 59 et 60)

$$\left. \begin{aligned} \text{var } \hat{\mu}_k &= \sigma_k^2 / n, \quad \text{var } \hat{\sigma}_k = \sigma_k^2 / (2n), \quad k = 1, 2 ; \\ \text{cov } (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2) &= \rho \sigma_1 \sigma_2 / n, \quad \text{cov } (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2) = \rho^2 \sigma_1 \sigma_2 / (2n) \\ \text{cov } (\hat{\sigma}_k, \hat{\mu}_1) &= 0, \quad k, l = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Dans le second cas, si on désigne par $\|v_{rs}\|$ la matrice des covariances de l'échantillon ordonné des valeurs de t_j ou de t'_j , et par $Q(\lambda, \lambda)$ la forme quadratique :

$$Q(\lambda, \lambda) = \sum \lambda_r \lambda_s v_{rs}, \quad (4)$$

il vient immédiatement :

$$\left. \begin{aligned} \text{var } \hat{\alpha}_k &= Q(\lambda, \lambda) \sigma_k^2, \quad \text{var } \hat{\mu}_k = Q(v, v) \sigma_k^2 \\ \text{et} \\ \text{cov } (\hat{\alpha}_k, \hat{\mu}_k) &= Q(\lambda, v) \sigma_k^2, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Pour le calcul des autres covariances, considérons tout d'abord deux valeurs quelconques t_r et t'_s prises chacune dans les séries ordonnées t_j et t'_j . De plus, soit t'_r la valeur de t'_i correspondant à t_r .

Supposons en outre que grâce à la corrélation entre x et y , on ait :

$$t_r = \rho t'_r + \varepsilon \quad (6)$$

où ε est une variable aléatoire indépendante de t'_j .

Si l'on note alors que pour $\rho = 1$, on a $r' = r$, tandis que pour $\rho = 0$, r' prend toutes les valeurs de i avec la même probabilité, on en conclut que r' est distribué autour de r avec une dispersion d'autant plus petite que ρ sera proche de 1.

Il s'ensuit qu'on a :

$$\text{cov } (t_r, t'_s) = \rho \text{cov } (t'_r, t'_s) = \rho v'_{rs} \quad (7)$$

où v'_{rs} s'écarte peu de v_{rs} lorsque ρ est proche de 1 et où v'_{rs} tend vers $(\sum v_{rs})/n$ lorsque ρ tend vers zéro. On a donc d'une manière approchée :

$$\left. \begin{aligned} \text{cov } (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) &= \rho Q(\lambda, \lambda) \sigma_1 \sigma_2, \quad \text{cov } (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2) = \rho Q(v, v) \sigma_1 \sigma_2, \\ \text{cov } (\hat{\mu}_1, \hat{\alpha}_2) &= \text{cov } (\hat{\mu}_2, \hat{\alpha}_1) = \rho Q(v, \lambda) \sigma_1 \sigma_2, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

l'approximation devenant d'autant meilleure que ρ s'approche de 1.

3 - ESTIMATIONS DES PARAMETRES μ_2 et σ_2

Sachant que la méthode de la vraisemblance maximale fournit des estimations dont la variance généralisée est asymptotiquement minimale (cf. [2] p. 56), on peut considérer que ces estimations apportent la meilleure solution à notre problème. Toutefois comme cette méthode n'est applicable que moyennant la connaissance de la forme de la distribution conjointe des variables x et y , nous ne la considérerons que dans le cas où les variables x et y sont des variables normales.

3.1 - Les variables x et y sont normales

Si L désigne la fonction de vraisemblance de la loi conjointe normale pour laquelle on suppose σ_1 et μ_1 connus, les estimations cherchées vérifient le système d'équations :

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu_2} = 0 \quad \frac{\partial \log L}{\partial \sigma_2} = 0 \quad \frac{\partial \log L}{\partial \rho} = 0 \quad (1)$$

et la matrice des covariances de leur distribution conjointe a asymptotiquement pour inverse la matrice :

$$V^{-1} = \left\{ -E \left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \right) \right\}$$

où $r, s = 1, 2, 3$ et où $\theta_1 = \mu_2, \theta_2 = \sigma_2, \theta_3 = \rho$

Après simplification, ceci conduit aux équations (cf. [2] p. 57 et 58) :

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mu}_2 - \mu_2 - \rho (\sigma_2/\sigma_1) (\hat{\mu}_1 - \mu_1) &= 0 \\ n(1 - \rho^2) \sigma_2^2 - \Sigma (y - \mu_2)^2 + \rho (\sigma_2/\sigma_1) \Sigma (x - \mu_1) (y - \mu_2) &= 0 \\ n\rho(1 - \rho^2) \sigma_2^2 - \rho (\sigma_2/\sigma_1)^2 \Sigma (x - \mu_1)^2 - \rho \Sigma (y - \mu_2)^2 + (1 + \rho^2) (\sigma_2/\sigma_1) \Sigma (x - \mu_1) (y - \mu_2) &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

ainsi qu'à la matrice :

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma_2^2(1 - \rho^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n(2 - \rho^2)}{\sigma_2^2(1 - \rho^2)} - \frac{n\rho}{(1 - \rho^2)\sigma_2} & 0 \\ 0 & -\frac{n\rho}{(1 - \rho^2)\sigma_2} & \frac{n(1 + \rho^2)}{(1 - \rho^2)^2} \end{pmatrix} \quad (3)$$

c'est-à-dire, à la matrice des covariances des estimateurs cherchés :

$$V = \frac{1 - \rho^2}{n} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1 + \rho^2) \sigma_2^2}{2} & \frac{\rho(1 - \rho^2) \sigma_2}{2} \\ 0 & \frac{\rho(1 - \rho^2) \sigma_2}{2} & \frac{(2 - \rho^2)(1 - \rho^2)}{2} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Pour obtenir l'estimateur cherché μ_2^* de μ_2 , on note qu'en multipliant par ρ la deuxième équation (2), en la soustrayant membre à membre de la troisième et en posant $k = \rho\sigma_2/\sigma_1$, on obtient avec la première des équations (2), le système :

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mu}_2 - \mu_2 - k(\hat{\mu}_1 - \mu_1) &= 0 \\ \Sigma (x - \mu_1) (y - \mu_2) - k \Sigma (x - \mu_1)^2 &= 0 \end{aligned} \right\} (5)$$

duquel par élimination de k et après quelques calculs, on tire l'estimateur μ_2^* de μ_2 :

$$\mu_2^* = \hat{\mu}_2 - \hat{\rho} (\hat{\sigma}_2/\hat{\sigma}_1) (\hat{\mu}_1 - \mu_1) \quad (6)$$

dont la variance, en vertu de (4) et de 2.(3) est :

$$\text{var } \mu_2^* = (1 - \rho^2) \text{var } \hat{\mu}_2 \quad (7)$$

Il en résulte, grâce à la première équation (5), qu'entre les estimateurs ρ^* et σ_2^* de ρ et de σ_2 on a aussi la relation :

$$\rho^* \sigma_2^* / \sigma_1 = \hat{\rho} \hat{\sigma}_2 / \hat{\sigma}_1 \quad (8)$$

Si l'on observe alors, en tenant compte de (8), que la troisième équation (2) peut se mettre sous la forme :

$$\rho^* A + \sigma_2^* B = 0 \quad (9)$$

où A et B désignent des quantités connues, on en déduit que les relations (8) et (9) permettent le calcul de ρ^{*2} et de σ_2^{*2} et par conséquent celui de ρ^* et de σ_2^* . Toutefois, les expressions trouvées pour σ_2^* et ρ^* étant assez compliquées, il est souhaitable de trouver pour σ_2 un estimateur plus commode en s'inspirant par exemple de la forme de l'équation (6). Comme il s'agit d'un paramètre d'échelle, on a considéré l'estimateur :

$$\log \sigma_2^* = \log \hat{\sigma}_2 - k' (\log \hat{\sigma}_1 - \log \sigma_1) \quad (10)$$

où k' désigne une constante, ce qui donne, par différentiation :

$$\frac{d\sigma_2^*}{\sigma_2^*} = \frac{d\hat{\sigma}_2}{\hat{\sigma}_2} - k' \frac{d\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_1} \quad (11)$$

et, par conséquent, avec 1. (3) :

$$\text{var } \sigma_2^* = \text{var } \hat{\sigma}_2 + k'^2 a_1^2 \text{var } \hat{\sigma}_1 - 2k' a_1 \text{cov} (\hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_1) \quad (12)$$

Avec 2. (3), on obtient ainsi :

$$\text{var } \sigma_2^* = \frac{\sigma_2^2}{2n} [1 + k'^2 - 2k'\rho^2] \quad (13)$$

dont la valeur minimale, atteinte pour $k' = \rho^2$, peut s'écrire, grâce à 2.(3) :

$$\text{var } \sigma_2^* = (1 - \rho^4) \text{var } \hat{\sigma}_2 \quad (14)$$

et se confond avec celle donnée par la matrice V.

Si l'on note alors que le remplacement dans (2) de k' par $\hat{\rho}^2$ n'introduit dans la différentielle (11) que des termes du second ordre, on en conclut que l'estimateur :

$$\sigma_2^* = \hat{\sigma}_2 (\sigma_1 / \hat{\sigma}_1)^{\hat{\rho}^2} \quad (15)$$

possède l'efficacité optimale.

De (8) et de (15) on tire encore l'estimateur de ρ :

$$\rho^* = \hat{\rho} (\sigma_1 / \hat{\sigma}_1)^{(1-\hat{\rho}^2)} \quad (16)$$

dont la variance se confond également avec la variance correspondante de l'estimateur par la méthode de la vraisemblance maximale.

3.2 - Les estimateurs $\hat{\mu}_2$ et $\hat{\sigma}_2$ sont linéaires

Reprenant la méthode qui a conduit dans ce qui précède à l'estimateur σ_2^* , on considère pour μ_2 l'estimateur :

$$\mu_2^* = \hat{\mu}_2 - k' (\hat{\mu}_1 - \mu_1) \quad (1)$$

dont la différentielle :

$$d \mu_2^* = d \hat{\mu}_2 - k' d \hat{\mu}_1 \quad (2)$$

fournit la variance :

$$\text{var } \mu_2^* = \text{var } \hat{\mu}_2 + k'^2 \text{var } \hat{\mu}_1 - 2k' \text{cov} (\hat{\mu}_2, \hat{\mu}_1) \quad (3)$$

On en tire, avec 2.(5) et 2.(8) :

$$\text{var } \mu_2^* = [1 + (k'/a_1)^2 - 2(k'/a_1)\rho] \text{var } \hat{\mu}_2 \quad (4)$$

dont la valeur minimale est atteinte pour $k' = \rho a_1$.

L'estimateur cherché est donc :

$$\mu_2^* = \hat{\mu}_2 - \rho a_1 (\hat{\mu}_1 - \mu_1) \quad (5)$$

et sa variance est :

$$\text{var } \mu_2^* = (1 - \rho^2) \text{var } \hat{\mu}_2 \quad (6)$$

Sachant par ailleurs qu'en remplaçant ρ par $\hat{\rho}$ et a_1 par $\hat{a}_1 = \hat{\sigma}_2/\sigma_1$ on n'introduit dans la différentielle (2) que des termes d'ordre supérieur à 1, on obtient finalement l'estimateur :

$$\mu_2^* = \hat{\mu}_2 - \hat{\rho} \hat{a}_1 (\hat{\mu}_1 - \mu_1) \quad (7)$$

On trouve, de même, pour σ_2 , l'estimateur :

$$\sigma_2^* = \hat{\sigma}_2 (\sigma_1/\hat{\sigma}_1)^{\hat{\rho}} \quad (8)$$

dont la variance est :

$$\text{var } \sigma_2^* = (1 - \rho^2) \text{var } \hat{\sigma}_2 \quad (9)$$

Enfin, on vérifie sans peine qu'on a aussi :

$$\text{cov} (\mu_2^*, \sigma_2^*) = (1 - \rho^2) \text{cov} (\hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_2) \quad (10)$$

4 - ESTIMATION DES PARAMETRES a_1 et b_1

Comme les relations 1.(3) établissent une relation biunivoque et réciproque entre les paramètres σ_2 et μ_2 et les paramètres a_1 et b_1 lorsque σ_1 et μ_1 sont connus, on peut prévoir que les estimateurs de a_1 et b_1 à variance généralisée minimale seront obtenus en remplaçant dans les relations 1.(3) les paramètres σ_2 et μ_2 par les estimateurs jouissant de la même propriété, c'est-à-dire qu'on a :

$$a_1^* = \sigma_2^*/\sigma_1 \quad \text{et} \quad b_1^* = \mu_2^* - r\sigma_2^* \quad (1)$$

où l'on a posé :

$$r = \mu_1/\sigma_1$$

Il s'ensuit qu'on a aussi :

$$\text{var } a_1^* = \text{var } \sigma_2^*/\sigma_1^2 \quad \text{et} \quad \text{var } b_1^* = \text{var } \mu_2^* + r^2 \text{var } \sigma_2^* - 2r \text{cov} (\mu_2^*, \sigma_2^*) \quad (2)$$

ce qui, avec

$$\hat{a}_1 = \hat{\sigma}_2/\sigma_1 \quad \text{et} \quad \hat{b}_1 = \hat{\mu}_2 - \hat{a}_1\mu_1,$$

donne dans le cas de variables normales :

$$\text{var } a_1^* = (1 - \rho^4) \text{var } \hat{a}_1, \quad \text{var } b_1^* = \text{var } \hat{b}_1 - \rho^2(2 + r^2\rho^2) \text{var } \hat{\sigma}_2 \quad (3)$$

et, dans le cas d'estimateurs linéaires, avec une bonne approximation pour les valeurs élevées de ρ :

$$\text{var } a_1^* = (1 - \rho^2) \text{var } \hat{a}_1 \quad \text{et} \quad \text{var } b_1^* = (1 - \rho^2) \text{var } \hat{b}_1 \quad (4)$$

5 - CONCLUSIONS

En résumé, de la forme sous laquelle nous avons mis la variance des estimateurs σ_2^* , μ_2^* , a_1^* et b_1^* il apparaît comme on pouvait s'y attendre que tant dans le cas de variables normales que dans celui où l'estimation peut se faire à l'aide d'estimateurs linéaires et dès que $\rho > 0$, les estimateurs σ_2^* , μ_2^* , a_1^* et b_1^* possèdent des variances plus faibles que celles des estimateurs $\hat{\sigma}_2$, $\hat{\mu}_2$, \hat{a}_1 et \hat{b}_1 correspondants. Il convient donc de préférer toujours les premiers aux seconds lorsqu'il existe une corrélation significative entre les variables.

Pour le reste, on aura noté que les estimateurs a_1^* et b_1^* trouvés se ramènent aux premiers estimateurs obtenus dans [1] en faisant $\rho = 1$ dans les nouvelles formules. On voit ainsi que le premier procédé conduisait à une perte d'efficacité représentée dans le cas des paramètres σ_2 et μ_2 par une augmentation de la variance des estimations dont le maximum, égal à 1/3 des variances minimales, est atteint par $\rho^2 = 1/2$ dans le cas de σ_2^* et de variables normales, et par $\rho = 1/2$ dans les autres cas ; cette augmentation tend toutefois vers zéro lorsque ρ s'approche de zéro ou de l'unité.

Pour terminer signalons qu'on vérifie sans peine les constatations suivantes :

1/ Dans le cas de variables normales, l'efficacité de l'estimateur μ_2^* n'est pas modifiée si σ_2 et ρ sont connus ; il en est de même pour σ_2^* si μ_2 est connu. Par contre, si μ_2 et ρ sont connus, l'efficacité de σ_2^* est égale à :

$$\frac{2}{(2 - \rho^2)(1 + \rho^2)} \quad (1)$$

qui atteint sa valeur minimale de 0,89, pour $\rho = 1/2$ et qui tend vers 1 lorsque ρ tend vers 0 ou 1.

2/ On peut être tenté d'utiliser les estimateurs σ_2^* et μ_2^* également dans le cas où σ_1 et μ_1 ne sont connus que par une estimation préliminaire indépendante. Si on désigne par $\hat{\sigma}$ et $\hat{\mu}$ les estimateurs de σ et de μ fournis par un échantillon de taille n' et si on désigne par σ_2^{**} et μ_2^{**} les estimateurs σ_2^* et μ_2^* où σ_1 et μ_1 ont été remplacés par les estimations $\hat{\sigma}_1$ et $\hat{\mu}_1$, on trouve, après simplification, dans le cas d'estimateurs linéaires :

$$\begin{aligned} \text{var } \sigma_2^{**} &= \text{var } \sigma_2^* + \rho^2 \text{ var } \hat{\sigma}_2' \\ \text{var } \mu_2^{**} &= \text{var } \mu_2^* + \rho^2 \text{ var } \hat{\mu}_2' \\ \text{cov } (\sigma_2^{**}, \mu_2^{**}) &= \text{cov } (\sigma_2^*, \mu_2^*) + \rho^2 \text{ cov } (\hat{\sigma}_2', \hat{\mu}_2') \end{aligned} \quad (2)$$

Il s'ensuit que si on estime la fractile y_p au moyen de la relation :

$$y_p^{**} = \mu_2^{**} + t_p \sigma_2^{**} \quad (3)$$

on obtient, dans le cas d'estimateurs linéaires, en utilisant les notations correspondantes, la relation :

$$\text{var } y_p^{**} = (1 - \rho^2) \text{ var } \hat{y}_p + \rho^2 \text{ var } \hat{y}_p' \quad (4)$$

qui montre qu'on aura :

$$\text{var } y_p^{**} < \text{var } \hat{y}_p \quad (5)$$

dès que $n' > n$.

Pour des variables normales on trouve de même que la condition $n' > n$ entraîne les relations :

$$\text{var } \mu_2^{**} < \text{var } \hat{\mu}_2 \quad \text{et} \quad \text{var } \sigma_2^{**} < \text{var } \hat{\sigma}_2 \quad (6)$$

qui, avec la relation $\text{cov } (\mu_2^{**}, \sigma_2^{**}) = 0$, permettent de déduire également la relation (5).

REFERENCES

- [1] SNEYERS R. (1966) - Sur la notion d'indépendance climatologique, Revue de Statistique Appliquée, Vol. 14, n° 2, pages 31-36.
- [2] KENDALL M.G. et A. STUART (1967) - The Advanced Theory of Statistics, Vol. 2, Charles Griffin, London.