

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

M. ROUBENS

## **Lissage exponentiel d'un signal polynomial brouillé observé de manière discrète ou continue**

*Revue de statistique appliquée*, tome 17, n° 3 (1969), p. 61-73

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1969\\_\\_17\\_3\\_61\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1969__17_3_61_0)

© Société française de statistique, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LISSAGE EXPONENTIEL D'UN SIGNAL POLYNOMIAL BROUILLÉ OBSERVÉ DE MANIÈRE DISCRÈTE OU CONTINUE

M. ROUBENS

Faculté Polytechnique de Mons

Nous recherchons les estimateurs des coefficients d'un signal polynomial correspondant à la méthode des moindres carrés actualisés, à l'aide d'un système orthogonal différentiel (observations continues) ou aux différences (observations discrètes).

Les matrices variance-covariance des estimateurs et des lissages successifs des observations sont explicitées dans le cas d'un bruit blanc.

Ces divers résultats montrent le lien existant entre les domaines discret et continu. Ils permettent d'obtenir des approximations des formules du discret, très satisfaisantes sous certaines conditions.

Un cas concret, ayant nécessité un modèle polynomial de degré 3, est traité dans le paragraphe 6.

## 1 - INTRODUCTION

Soient, aux instants  $t + i$ , les observations  $y(t + i)$  d'un signal  $s(t + i)$  brouillé par l'aléa  $\varepsilon(t + i)$ . Le bruit aléatoire a une distribution quelconque de moyenne nulle et de variance finie. La chronique  $\{y\}$  est tenue de manière discrète ( $i \in \mathbb{Z}$ ) ou continue ( $i \in \mathbb{R}$ ). Le premier problème posé au statisticien est de fixer le choix d'une combinaison linéaire telle que  $s(t + i) = b'(t) f(i)$ , où  $f(i)$  représente un vecteur de fonctions d'ajustement (polynômes, fonctions exponentielles, ...) et  $b'(t)$  le vecteur transposé du vecteur-colonne des constantes (paramètres)  $b_0(t), \dots, b_N(t)$ . L'aléa ne permettant pas de déterminer - pour un ajustement fixé - le vecteur  $b(t)$ , le second problème à résoudre est d'estimer ce vecteur à chaque instant  $t$ . Cette opération s'appelle lissage. L'obtention d'un estimateur et, par extension, d'un préviseur, est basée sur le critère des moindres carrés actualisés. L'estimateur satisfait au critère des moindres carrés actualisés s'il minimise, dans le cas d'observations discrètes, la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i [\varepsilon(t - i)]^2 \quad (0 < \beta < 1),$$

et, dans le cas d'observations continues, l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma u} [\varepsilon(t - u)]^2 du, \quad (\gamma > 0)$$

En admettant que l'ajustement permette de formuler l'hypothèse d'invariance translationnelle :

$$f(t+1) = L f(t) \quad (1)$$

nous pourrions écrire, en l'absence de bruit,  $b(t) = L'b(t-1)$  ( $L'$  est la matrice transposée de  $L$ , matrice indépendante de  $t$ ).

Pour le modèle discret, Brown et Meyer [1,7] ont obtenu une équation récurrente permettant la "mise à jour" de l'estimateur  $\hat{b}(t)$ ,

$$\hat{b}(t) = L' \hat{b}(t-1) + h e_N(t) \quad (2)$$

$h$  est le vecteur des constantes de lissage défini par

$$h = \alpha F^{-1} f(0) \quad , \quad \alpha = 1 - \beta \quad , \quad (3)$$

où  $F$  est une matrice définie par

$$F = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i f(-i) f'(-i) \quad (4)$$

$e_N(t)$  est l'erreur de prévision en 1 pas pour un modèle à  $N+1$  paramètres, déterminée par  $y(t) - \hat{b}'(t-1) f(1)$ . Pour un ajustement fixé, le problème d'estimation se ramène à celui de la détermination de  $h$ .

Le vecteur  $h$  est explicité par Dobbie [3] pour le modèle exponentiel. Nous calculons le vecteur  $h$  pour un modèle polynomial (paragraphe 3) ainsi que les matrices variance-covariance des estimateurs et des lissages successifs des observations. La notion de lissage exponentiel, introduite par Holt [6], est définie dans le paragraphe 2 pour des chroniques discrètes et continues.

Dans le paragraphe 4, nous traitons le modèle polynomial pour des observations continues. Nous établissons, au paragraphe 5, une correspondance avec les résultats obtenus pour les chroniques discrètes.

## 2 - LISSAGE EXPONENTIEL DISCRET ET CONTINU

Le lissage exponentiel discret d'ordre  $j$  peut être défini par la forme récurrente  $S_j(t) = \alpha S_{j-1}(t) + \beta S_j(t-1)$ , si  $S_{-1}(t) = y(t)$  et si  $\alpha = 1 - \beta$ ,  $0 < \beta < 1$ .

Cette définition permet d'écrire le système aux différences

$$\begin{cases} \Delta S_j(t) = \alpha [S_{j-1}(t) - S_j(t-1)] & , \quad j = 0, 1, \dots, \\ S_{-1}(t) = y(t), \\ S_j(0) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Si  $S_j^*(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i S_j(i)$  représente la fonction génératrice des  $S_j(t)$ , le système (5) se transforme en

$$S_j^*(z) = \left( \frac{\alpha}{1 - \beta z} \right)^{j+1} y^*(z) \quad , \quad j = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Après inversion,

$$S_j(t) = \alpha^{j+1} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{j+1}{i} \beta^i y(t-i) \quad (7)$$

Considérons à présent des observations continues du signal  $s$  et faisons correspondre au système aux différences (5), le système différentiel

$$\begin{cases} S_j(t) = \gamma [S_{j-1}(t) - S_j(t)] & , \quad \gamma > 0, j = 0, 1 \dots \\ S_{-1}(t) = y(t), \\ S_j(0) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Faisant appel à la transformée de Laplace-Carson de  $S_j(t)$ ,

$$S_j^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} S_j(u) du,$$

nous obtenons

$$S_j^*(s) = \left( \frac{\gamma}{s + \gamma} \right)^{j+1} y^*(s) \quad (9)$$

L'inversion de (9) donne :

$$S_j(t) = \gamma^{j+1} \int_0^{\infty} \frac{u^j}{j!} e^{-\gamma u} y(t-u) du \quad (10)$$

Cette dernière relation définit le lissage exponentiel continu d'ordre  $j$  de la chronique  $\{y\}$ .

### 3 - OBSERVATIONS DISCRETES - MODELE POLYNOMIAL

Soit le modèle polynomial  $s(t+i) = b'(t) f(i)$ ,  $i \in Z$ , où

$$b(t) = \begin{pmatrix} b_0(t) \\ \vdots \\ b_N(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(i) = \begin{pmatrix} f_0(i) \\ \vdots \\ f_N(i) \end{pmatrix}$$

Les polynômes  $f_j(i)$  sont les polynômes orthogonaux de Meixner-Gottlieb [4,5] définis par la relation d'orthogonalité

$$\alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i f_r(-i) f_s(-i) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq s ; r, s = 0, 1, \dots, N, \\ \beta^r & \text{si } r = s \end{cases}$$

Leur forme explicite est :

$$f_j(-i) = \sum_{k=0}^j \binom{k+i}{k} \binom{j}{k} (-\alpha)^k ; j = 0, \dots, N. \quad (11)$$

On peut montrer sans grande difficulté, en faisant appel au calcul combinatoire, que la matrice L définie par (1) et correspondant à ces polynômes, a pour éléments :

$$L_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i > j \\ 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$$

De plus, la matrice F définie par (4) est identique à la matrice B définie par

$$B_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \beta^i & \text{si } i = j \end{cases} \quad (12)$$

Comme  $f_j(0) = \beta^j$ , le vecteur-colonne h défini par (3) a pour éléments  $h_j = \alpha$ ,  $j = 0, \dots, N$ .

La relation récurrente (2) de Brown et Meyer prend la forme

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_0(t) \\ \vdots \\ \hat{b}_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{b}_0(t-1) \\ \vdots \\ \hat{b}_N(t-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix} \left[ y(t) - \sum_{k=0}^N \hat{b}_k(t-1) \right] \quad (13)$$

car  $f_j(1) = 1$ , pour  $j = 0, \dots, N$ .

Si  $e(t)$  représente le vecteur-colonne des erreurs de prévision en un pas des modèles polynomiaux à 1, ..., N + 1 paramètres, c'est-à-dire si :

$$e(t) = \begin{pmatrix} e_0(t) \\ \vdots \\ e_N(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec } e_j(t) = y(t) - \sum_{k=0}^j \hat{b}_k(t-1) \quad , \quad j = 0, \dots, N,$$

la relation matricielle (13) peut s'écrire de manière brève sous forme d'un système aux différences

$$\Delta \hat{b}(t) = \alpha e(t) \quad (14)$$

Le système (14) présente l'avantage - dû à l'utilisation de polynômes orthogonaux - d'être stable si l'on passe, à l'instant t, d'un modèle à N paramètres à un modèle en contenant N + 1. En effet, les estimations  $\hat{b}_0(t-1), \dots, \hat{b}_{N-1}(t-1)$  obtenues à l'instant t - 1 restent valables lors de l'actualisation des estimateurs  $\hat{b}_0(t), \dots, \hat{b}_N(t)$ . Il suffit d'initialiser  $\hat{b}_N(t)$ .

Le système (14) permet en outre, d'obtenir par récurrence les transformées de Laplace  $\hat{b}_j^*(z)$  des  $\hat{b}_j(t)$  :

$$\hat{b}_j^*(z) = \frac{\alpha (1-z)^j}{(1-\beta z)^{j+1}} y^*(z) \quad (15)$$

Par développement en série, nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned}\hat{b}_j^*(z) &= \alpha \beta^{-1} (1 - \beta z)^{-j-1} (1 - \beta z - \alpha)^j y^*(z), \\ &= \alpha \beta^{-j} (1 - \beta z)^{-j-1} \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} \alpha^k (1 - \beta z)^{j-k} y^*(z), \\ &= \beta^{-j} \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} S_k^*(z) \quad (\text{en vertu de (6)})\end{aligned}$$

Après avoir défini la matrice orthogonale R et le vecteur-colonne S(t),

$$R_{ij} = \begin{cases} (-1)^j \binom{i}{j} & \text{si } i \geq j, \\ 0 & \text{si } i < j; \end{cases} \quad S(t) = \begin{pmatrix} S_0(t) \\ \vdots \\ S_N(t) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

nous obtenons, à l'aide de la définition (12)

$$\boxed{\hat{b}(t) = B^{-1} R S(t)} \quad (17)$$

Le vecteur estimateur  $\hat{b}(t)$  est non biaisé. Cette constatation n'est pas surprenante car les estimateurs ont été obtenus par la méthode des moindres carrés actualisés. En effet, la dérivation de la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \left[ y(t-i) - \sum_{k=0}^N b_k(t) f_k(-i) \right]^2$$

entraîne

$$\beta^j \hat{b}_j(t) = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i f_j(-i) y(t-i)$$

Introduisons l'opérateur espérance mathématique E. Dès lors,

$$\begin{aligned}\beta^j E \hat{b}_j(t) &= \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i f_j(-i) E y(t-i) \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i f_j(-i) s(t-i) \\ &= \beta^j b_j(t), \quad (\text{en vertu de l'orthogonalité})\end{aligned}$$

Finalement,

$$E[\hat{b}(t)] = b(t)$$

Recherchons la matrice variance-covariance des estimateurs  $\hat{b}_0(t), \dots, \hat{b}_N(t)$ , dans le cas d'un bruit blanc

Cette dernière hypothèse se traduit sous la forme :

$$E [\varepsilon (t) \varepsilon (t - i)] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0 \\ \sigma_{\varepsilon}^2 & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

Nous en déduisons

$$E[y(t) \{\hat{b}(t-1) - b(t-1)\}] = 0 \quad (18)$$

En effet,  $\hat{b}(t-1)$  peut s'exprimer comme combinaison linéaire de  $y(t-1)$ ,  $y(t-2)$ , ... (voir (17) et (7)).

L'équation matricielle (14) et l'absence de biais permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \hat{b}_1(t) - b_1(t) = \alpha [y(t) - E y(t)] - \alpha [\hat{b}_0(t-1) - b_0(t-1)] - \dots \\ \quad - \alpha [\hat{b}_{i-1}(t-1) - b_{i-1}(t-1)] + \beta [\hat{b}_1(t-1) - b_1(t-1)] \\ \hat{b}_j(t) - b_j(t) = \alpha [y(t) - E y(t)] - \alpha [\hat{b}_0(t-1) - b_0(t-1)] - \dots \\ \quad - \alpha [\hat{b}_{j-1}(t-1) - b_{j-1}(t-1)] + \beta [\hat{b}_j(t-1) - b_j(t-1)] \end{cases} \quad (19)$$

Définissons :

$$(i, j) = E \{\hat{b}_i(t) - b_i(t)\} \{\hat{b}_j(t) - b_j(t)\} = [V_{\hat{b}(t)}]_{i,j}$$

En vertu de (18), nous obtenons, par multiplication des expressions (19),

$$(1 - \beta^2) (i, j) = \alpha^2 \sigma_{\varepsilon}^2 + \alpha^2 \begin{pmatrix} (0, 0) & + \dots + (0, j-1) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ (i-1, 0) + \dots + (i-1, j-1) \end{pmatrix} - \alpha \beta \begin{pmatrix} (0, j) + \dots + (i-1, j) \\ \vdots \\ \vdots \\ + (i, 0) + \dots + (i, j-1) \end{pmatrix}$$

Après division par  $\alpha$ , il vient :

$$(1 + \beta) (i, j) = (i, j-1) + (i-1, j).$$

De plus :

$$\sigma_{b_0}^2 = (0, 0) = \frac{\alpha}{1 + \beta} \sigma_{\varepsilon}^2$$

Finalement, par récurrence,

$$E \{\hat{b}_i(t) - b_i(t)\} \{\hat{b}_j(t) - b_j(t)\} = \frac{\binom{i+j}{i}}{(1 + \beta)^{i+j+1}} \alpha \sigma_{\varepsilon}^2 \quad (20)$$

Utilisons l'expression (17) afin de déterminer  $V_{S(t)}$ , la matrice variance-covariance des  $S_j(t)$ .

Il vient, en raison de l'orthogonalité de la matrice R,  $S(t) = R B \hat{b}(t)$ .  
 Nous en déduisons :

$$\boxed{V_{S(t)} = R B V_{\hat{b}(t)} B R'}$$

#### 4 - OBSERVATIONS CONTINUES - MODELE POLYNOMIAL

Considérons le modèle  $s(t+u) = b'(t) f(u)$ ,  $u \in R$ . Les composantes du vecteur des fonctions d'ajustement  $f(u)$ ,  $f_0(u), \dots, f_N(u)$ , sont les  $(N+1)$  premiers polynômes de Laguerre définis par la relation d'orthonormalité

$$\gamma \int_0^\infty e^{-\gamma u} f_r(-u) f_s(-u) du = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq s, \\ 1 & \text{si } r = s, \end{cases}$$

et explicités comme suit

$$f_j(-u) = \sum_{k=0}^j \frac{u^k}{k!} \binom{j}{k} (-\gamma)^k \quad (21)$$

L'estimation de  $b(t)$  est basée sur le critère des moindres carrés actualisés

$$\int_0^\infty e^{-\gamma u} \left[ y(t-u) - \sum_{k=0}^N b_k(t) f_k(-u) \right]^2 du$$

La minimisation par dérivation de cette dernière expression et l'utilisation des définitions (21) et (10) conduisent à

$$\hat{b}_j(t) = \gamma \int_0^\infty e^{-\gamma u} f_j(-u) y(t-u) du \quad (22)$$

$$= \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} S_k(t) \quad (23)$$

Se rappelant (16), il est facile de constater que (23) permet d'écrire:

$$\boxed{\hat{b}(t) = R S(t)} \quad (24)$$

La dernière relation présente une grande analogie avec (17). Faisons d'ailleurs remarquer que (17) peut être obtenue de manière directe par minimisation de la série :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left[ y(t-i) - \sum_{k=0}^N b_k(t) f_k(-i) \right]^2$$

Si  $\hat{b}_j^*(s)$  représente la transformée de Laplace-Carson de  $\hat{b}_j(t)$ , nous déduisons de (23), par le truchement de (9),



$$\hat{b}_j^*(s) = \frac{\gamma s^j}{(s + \gamma)^{j+1}} y^*(s) \quad (25)$$

Appelons enfin  $e(t)$  le vecteur colonne des erreurs d'ajustement des modèles polynomiaux à 1, ...,  $N + 1$  paramètres. Dès lors

$$e(t) = \begin{pmatrix} e_0(t) \\ \vdots \\ e_N(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec } e_j(t) = y(t) - \sum_{k=0}^j \hat{b}_k(t) f_k(o)$$

Comme  $f_k(o) = 1$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , nous déduisons de (25), avec des notations évidentes :

$$e_j^*(s) = \left( \frac{s}{s + \gamma} \right)^{j+1} y^*(s) \quad (26)$$

La confrontation de (25) et (26) entraîne, sous la condition initiale  $\hat{b}_j(o) = o$ ,

$$\boxed{\hat{b}(t) = \gamma e(t)} \quad (27)$$

Ce système différentiel, analogue continu du système aux différences (14), présente également l'avantage d'être stable lors du passage à un modèle contenant un ou plusieurs paramètres supplémentaires.

La relation (22) permet de vérifier l'absence de biais,

$$E[\hat{b}(t)] = b(t).$$

Nous recherchons à présent les matrices variance-covariance  $V_{s(t)}$  et  $V_{b(t)}$  dans le cas d'un bruit blanc(1).

Nous obtenons, en vertu de (10) et de la non-corrélation des  $\{\epsilon\}$ ,

$$E \{S_i(t) - E S_i(t)\} \{S_j(t) - E S_j(t)\} = \binom{i+j}{i} \frac{\gamma \sigma_\epsilon^2}{2^{i+j+1}}$$

Si

$$P_{ij} = \binom{i+j}{i} \quad , \quad D_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \left(\frac{1}{2}\right)^i & \text{si } i = j \end{cases}$$

(1) Un bruit blanc  $\epsilon(t)$  est une fonction aléatoire stationnaire centrée dont le spectre (transformée de Fourier de la fonction covariance) est constant, ce que l'on peut traduire par :

$$E[\epsilon(t) \epsilon(t - \tau)] = \delta_\epsilon^2 \delta(\tau)$$

où  $\delta(\tau)$  désigne l'impulsion de Dirac à l'instant  $\tau$

(N. D. L. R.)

$$\boxed{V_{S(t)} = \frac{1}{2} D P D \gamma \sigma_{\epsilon}^2} \quad (28)$$

Cette dernière relation va permettre d'obtenir  $V_{b(t)}$ .

En effet, la relation (24) entraîne

$$V_{b(t)} = R V_{S(t)} R'$$

Montrons que :

$$\boxed{V_{b(t)} = V_{S(t)}} \quad (29)$$

Il suffit de vérifier que  $V_{S(t)} = R V_{S(t)} R'$  ou, par (28) que :

$$R D P D R' = D P D \quad (30)$$

Pour montrer cela, nous introduisons

$$T_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j} & \text{si } i \geq j, \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$$

Un calcul matriciel et combinatoire permet dès lors d'écrire successivement :

$$\begin{aligned} P &= T T' = R R', \\ D^{-1} R D R &= T \end{aligned}$$

La relation (29) en découle.

## 5 - APPROXIMATION DU DISCRET PAR LE CONTINU

Nous avons constaté dans les paragraphes 3 et 4 que les polynômes de Meixner-Gottlieb et de Laguerre conduisent respectivement à des équations aux différences (14) et différentielles (27) formellement semblables.

La liaison (voir [4])

MEIXNER-GOTTLIEB

LAGUERRE

$$f_r\left(\frac{i}{\alpha}\right) \quad \begin{matrix} \alpha \rightarrow 0 \\ \alpha = \gamma \end{matrix} \quad f_r\left(\frac{i}{\alpha}\right)$$

permet de préciser les conditions d'approximation des formules du discret par le continu.

Ces conditions sont :

$$1/ \beta \rightarrow 1,$$

$$2/ \alpha = \gamma.$$

Signalons que la condition 1/ n'est pas contraignante car  $\alpha$  est choisi, en général, voisin de .1.

A titre d'exemple, considérons le prévisseur  $\hat{y}_t(t + \tau)$  de l'observation  $y(t + \tau)$  calculé à l'instant  $t$  (horizon de la prévision  $\tau$ ).

$$\hat{y}_t(t + \tau) = \hat{b}'(t) f(\tau)$$

Ce prévisseur est non biaisé et a pour variance :

$$\sigma_{\hat{y}}^2(\tau) = f'(\tau) v_f f(\tau) \quad (31)$$

Dans le cas d'un modèle linéaire et d'un bruit blanc, nous obtenons, après avoir explicité (31), pour les observations continues :

$$\sigma_{\hat{y}}^2(\tau) = [1.25 \gamma + \gamma^2 \tau + .25 \gamma^3 \tau^2] \sigma_{\epsilon}^2, \quad (32)$$

pour les observations discrètes :

$$\sigma_{\hat{y}}^2(\tau) = \frac{\alpha}{(1 + \beta)^3} [1 + 4\beta + 5\beta^2 + 2(1 + 3\beta) \alpha \tau + 2\alpha^2 \tau^2] \sigma_{\epsilon}^2. \quad (33)$$

(32) est une approximation fort satisfaisante de (33) pour  $\alpha$  proche de zéro si  $\gamma = \alpha$ . Brown a d'ailleurs proposé une formule d'approximation de (33) [1, p. 237].

$$\sigma_{\hat{y}}^2(\tau) = [1.25 \alpha + \alpha^2 \tau] \sigma_{\epsilon}^2$$

Si nous considérons un modèle quadratique et un bruit blanc, le cas continu donne lieu à :

$$\sigma_{\hat{y}}^2(\tau) = \gamma [2.0625 + 3.375 \gamma \tau + 2.25 \gamma^2 \tau^2 + .5625 \gamma^3 \tau^3 + .046875 \gamma^4 \tau^4] \sigma_{\epsilon}^2 \quad (34)$$

Nous proposons comme approximation du modèle discret, si  $\alpha \rightarrow 0$ ,

$$\sigma_{\hat{y}}^2(\tau) = \alpha [2.0625 + 3.375 \alpha \tau + 2.25 \alpha^2 \tau^2] \sigma_{\epsilon}^2 \quad (35)$$

Cette approximation est meilleure que l'approximation heuristique de Brown [1, p. 237]

$$\sigma_{\hat{y}}^2(\tau) = \alpha [2 + 3 \alpha \tau + 3 \alpha^2 \tau^2] \sigma_{\epsilon}^2 \quad (36)$$

Signalons, pour illustration, que l'erreur d'approximation est de  $5.10^{-3}$  pour (36) et de  $2.10^{-3}$  pour (35) si  $\tau = 12$  et si  $\alpha = .03451$ .

6 - EXEMPLE

Soit la série chronologique suivante :

t	y(t)	t	y(t)
0	30.500	10	56.758
1	33.167	11	59.030
2	35.876	12	62.091
3	37.666	13	65.573
4	40.973	14	67.912
5	43.030	15	71.341
6	45.872	16	74.894
7	48.331	17	78.405
8	53.043	18	81.511
9	53.440	19	84.638

L'historique ( $t < 0$ ) a permis d'établir que la chronique ne présente pas de tendance saisonnière et que le signal est un polynôme de degré 3 en  $t$ .

Les polynômes d'ajustement envisagés sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(i) = 1, \\ f_1(i) = \beta + i\alpha, \\ f_2(i) = \beta^2 + \left(\frac{4 - 3\alpha}{2}\right) i\alpha + \frac{i^2\alpha^2}{2} \\ f_3(i) = \beta^3 + \frac{\alpha}{6}(18 - 27\alpha + 11\alpha^2)i + \frac{\alpha^2}{2}(3 - 2\alpha)i^2 + \frac{i^3\alpha^3}{3!} \end{array} \right.$$

Le modèle se traduit comme suit :

$$y(t+i) = \sum_{j=0}^3 b_j(t) f_j(i) + \varepsilon(t+i)$$

Si  $c_3(t) = y(t) - \sum_{j=0}^3 \hat{b}_j(t-1)$ , nous obtenons - voir (13) - les formules de récurrence suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{b}_0(t) = \hat{b}_0(t-1) + \alpha \hat{b}_1(t-1) + \alpha \hat{b}_2(t-1) + \alpha \hat{b}_3(t-1) + \alpha e_3(t), \\ \hat{b}_1(t) = \hat{b}_1(t-1) + \alpha \hat{b}_2(t-1) + \alpha \hat{b}_3(t-1) + \alpha e_3(t), \\ \hat{b}_2(t) = \hat{b}_2(t-1) + \alpha \hat{b}_3(t-1) + \alpha e_3(t), \\ \hat{b}_3(t) = \hat{b}_3(t-1) + \alpha e_3(t) \end{array} \right.$$

L'historique permet d'obtenir les valeurs

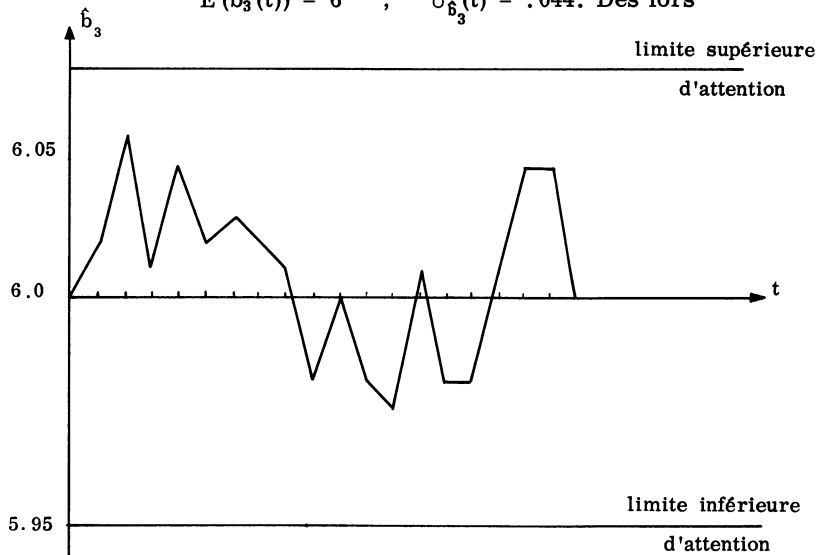
$$\hat{b}_0(0) = 3.1, \quad \hat{b}_1(0) = 40.6, \quad \hat{b}_2(0) = -16.8, \quad \hat{b}_3(0) = 6, \quad \hat{\sigma}_\varepsilon = .29$$

et l'itération conduit - si  $\alpha = .1$  - aux résultats résumés dans le tableau ci-dessous

t	$\hat{b}_0(t)$	$\hat{b}_1(t)$	$\hat{b}_2(t)$	$\hat{b}_3(t)$	$e_3(t)$
0	3.10..	40.6..	-16.8..	6.00..	-
1	6.10	39.5	-16.1	6.02	.27
2	9.08	38.5	-15.5	6.06	.37
3	11.9	37.5	-14.9	6.01	-.52
4	14.8	36.7	-14.3	6.05	.43
5	17.6	35.8	-13.7	6.02	-.25
6	20.4	35.	-13.1	6.03	.07
7	23.2	34.3	-12.5	6.02	-.14
8	26	33.7	-11.9	6.01	-.07
9	28.7	33.	-11.3	5.97	-.38
10	31.5	32.5	-10.7	6.00	.31
11	34.3	32.	-10.2	5.97	-.37
12	37.1	31.6	-9.6	5.96	-.06
13	39.9	31.3	-8.9	6.01	.49
14	42.7	30.9	-8.4	5.97	-.40
15	45.6	30.7	-7.8	5.97	.05
16	48.5	30.5	-7.1	6.01	.37
17	51.5	30.5	-6.5	6.05	.49
18	54.5	30.4	-5.9	6.05	-.07
19	57.5	30.4	-5.3	6.00	-.48

Dans le cas d'un modèle polynomial de degré 3,  $b_3(t)$  est constant,  $b_2(t)$  est une fonction linéaire de t,  $b_1(t)$  une fonction quadratique, .....,  $\hat{b}_3$  est sous contrôle. En effet, l'historique permet d'obtenir

$$E(\hat{b}_3(t)) = 6, \quad \hat{\sigma}_{\hat{b}_3}(t) = .044. \text{ Dès lors}$$



## 7 - REMARQUE

Un raisonnement hâtif peut faire croire - et nous y sommes aidés par le théorème d'approximation de Weierstrass - que le modèle polynomial permet d'approcher d'aussi près que l'on veut un signal continu au sens de l'analyse. Il ne faut cependant pas perdre de vue qu'un des buts de la théorie de l'estimation est d'obtenir des prévisionneurs par extrapolation et dès lors, l'approximation polynomiale peut s'avérer peu fidèle. Nous éclairons cette remarque en faisant appel à Cochran et Cox [2], "... polynomials are notoriously untrustworthy when extrapolated. A polynomial surface should be regarded only as an approximation to the real function within the region covered by the experiment. Any prediction made from the polynomial about the response outside the region should be verified by experiments before putting reliance on it".

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.G. BROWN - Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series. Prentice-Hall (1963).
- [2] W.G. COCHRAN et G.M. COX - Experimental Designs. J. Wiley - Deuxième édition (1957) p. 336.
- [3] J.M. DOBBIE - Forecasting Periodic Trends by Exponential Smoothing . JORSA, Vol. 11 n° 6 (1963), pp. 908-918.
- [4] A. ERDELYI et al. - Higher Transcendental Functions. Mc. Graw-Hill (1953) Volume 2.
- [5] M.J. GOTTLIEB - Concerning some polynomials orthogonal on a finite or enumerable set of points. Amer. Journal of Mathematics, vol. 60 n° 2 (1938). pp. 453-458.
- [6] C.C. HOLT - Forecasting Seasonal and Trends by Exponentially Weighted Moving Averages. Carnage Institute of Technology, Pittsburg (1957).
- [7] R. F. MEYER - An Adaptive Method for Routine Short - Term Forecasting 3rd International Conference of Operation Research, Oslo (1963).
- [8] M. ROUBENS - Sur le lissage exponentiel d'un signal polynomial brouillé . European Meeting on Statistics, Econometrics and Management Science . Amsterdam (septembre 1968).