

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

E. MORICE

Quelques problèmes d'estimation relatifs à la loi de Weibull

Revue de statistique appliquée, tome 16, n° 3 (1968), p. 43-63

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1968__16_3_43_0

© Société française de statistique, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROBLÈMES D'ESTIMATION RELATIFS A LA LOI DE WEIBULL

par E. MORICE

La fonction de densité de probabilité de la loi de Weibull est généralement présentée sous la forme

$$f(t) dt = \Pr[t < T < t + dt] = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta \right] dt, t > 0 \quad (1)$$

mettant en évidence les deux paramètres :

β : paramètre de forme, $\beta > 0$

η : paramètre d'échelle (vie caractéristique), $\eta > 0$

I - ETUDE D'UN ECHANTILLON DE n ELEMENTS, SANS REMPLACEMENT DES DEFAILLANTS

I.1 - Estimation des paramètres

Si, pour simplifier la présentation des calculs on pose $\lambda = \frac{1}{\eta^\beta}$, la loi de Weibull s'écrit :

$$f(t) = \lambda \beta t^{\beta-1} \exp(-\lambda t^\beta) \quad (2)$$

ou, pour la fonction de répartition

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t^\beta)$$

Si $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ sont les n durées de vie observées, la méthode du maximum de vraisemblance donne

$$\mathcal{L} = \text{Log}_e L = n \text{Log}_e \lambda + n \text{Log}_e \beta + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \text{Log}_e t_i - \lambda \sum_{i=1}^n t_i^\beta$$

d'où les équations :

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n t_i^\beta = 0$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \text{Log}_e t_i - \lambda \sum_{i=1}^n t_i^\beta \text{Log}_e t_i = 0$$

ou encore

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i^\beta}, \quad \hat{\eta}^\beta = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^\beta}{n} \quad (3)$$

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\lambda \sum t_i^\beta \text{Log}_e t_i - \sum \text{Log}_e t_i} \quad (4)$$

La résolution de ce système implique de lourds calculs. Cependant si on dispose d'une bonne estimation préalable de β (par exemple, obtenue à l'aide du graphique de Weibull [1] et [11], on pourra le résoudre par itération en calculant $\hat{\lambda}$ à partir de cette valeur utilisée dans l'équation (3) et en recalculant une nouvelle valeur de $\hat{\beta}$ à l'aide de l'équation (4) valeur utilisée à nouveau dans l'équation (3).

Lloyd et Lipow [4], proposent la méthode suivante : utiliser comme valeur initiale de $\hat{\beta}$, celle obtenue en égalant la moyenne expérimentale de l'échantillon à sa valeur théorique dans la population soit :

$$\frac{1}{n} \sum t_i = \eta \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) = \lambda^{-1/\beta} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

ou

$$\frac{1}{n} \sum t_i = \left(\frac{\sum t_i^\beta}{n}\right)^{1/\beta} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

qui peut être résolue en β , par approximations successives faisant appel à l'emploi d'une table de la fonction Γ .

Dans les deux cas les calculs, théoriquement faciles, sont lourds mais ils peuvent être aisément programmés sur calculateur.

D'autres estimations des paramètres η et β ont été proposées par différents auteurs.

1/ Gumbel [7] et Menon [8] ont proposé les estimations suivantes:

$$\frac{1}{\beta^*} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} s(\text{Log}_e t)$$

$$\eta^* = \exp \left[\frac{0,5772}{\beta^*} + \overline{\text{Log}_e t} \right],$$

$\lambda = 0,5772$ étant la constante d'Euler, $\overline{\text{Log}_e t}$ et $s(\text{Log}_e t)$ étant respectivement la moyenne et l'écart-type de $\text{Log}_e t$ estimés d'après l'échantillon.

2/ Menon a montré [9] que la distribution de β^* est asymptotiquement normale, de moyenne β et de variance $1,1 \beta^2/n$. De même la distribution de η^* est asymptotiquement normale, de moyenne η et de variance $1,2 \frac{\eta^2}{\beta^2 n}$.

3/ Dubey [10] a étudié les estimations basées sur la considération de deux fractiles de la distribution.

Soit t_p tel que

$$F(t_p) = 1 - \exp \left[-\left(\frac{t_p}{\eta}\right)^\beta \right] = p$$

$$\text{Log}_e [-\text{Log}_e (1 - p)] = \beta [\text{Log}_e t_p - \text{Log}_e \eta].$$

Si on considère deux valeurs p_1 et p_2 , ($0 < p_1 < p_2 < 1$), on déduit immédiatement de la relation précédente, écrite pour p_1 et p_2 :

$$\beta = \frac{\text{Log}_e [-\text{Log}_e (1 - p_1)] - \text{Log}_e [-\text{Log}_e (1 - p_2)]}{\text{Log}_e t_{p_1} - \text{Log}_e t_{p_2}}$$

Dubey propose comme estimation de β la valeur donnée par la formule ci-dessus dans laquelle on remplace t_p par y_p avec

$$y_p = \begin{cases} t_{(np)} & \text{si } np \text{ est entier} \\ t_{([np]+1)} & \text{si } np \text{ non entier} \end{cases}$$

$t_{(1)} < t_{(2)} \dots < t_{(n)}$, étant les observations ordonnées et $[np]$ le nombre entier égal ou immédiatement inférieur à np .

Dubey [10] a montré que la variance de cette estimation β^* était minimale pour

$$p_1 = 0,1673 \dots \quad p_2 = 0,9737$$

La distribution de cette estimation β^* est asymptotiquement normale, de moyenne β et de variance $0,916 \beta^2/n$ (inférieure à celle de l'estimation proposée par Gumbel et Menon.

Comparée à l'estimation par le maximum de vraisemblance, l'estimation β^* a une efficacité d'environ 66 %.

De la relation $p = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t_p}{\eta} \right)^{\beta} \right]$ on tire pour toute valeur de p :

$$\text{Log } \eta = \frac{\beta \text{Log}_e t_p - \text{Log}_e [-\text{Log}_e (1 - p)]}{\beta}$$

ou, si l'on envisage deux valeurs p_1 et p_2

$$\text{Log } \eta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\beta \text{Log}_e t_{p_i} - \text{Log}_e [-\text{Log}_e (1 - p_i)]}{\beta}$$

Le choix de p_1 et p_2 correspondant à une variance minimale de η^* défini par

$$\eta^* = \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\beta \text{Log}_e y_i - \text{Log}_e [-\text{Log}_e (1 - p_i)]}{\beta} \right]$$

conduit à

$$p_1 = 0,398 \quad p_2 = 0,821$$

La distribution de η^* est asymptotiquement normale, de moyenne η et de variance $\frac{1,359 \eta^2}{n \beta^2}$.

L'efficacité de η^* est environ 82 % de l'estimation par le maximum de vraisemblance.

Dubey propose encore d'autres estimations basées sur un seul fractile lorsque l'un des deux paramètres est connu.

Par exemple, si le paramètre de forme β est connu, on a d'après la fonction de répartition de la loi de Weibull

$$p = F(x) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t_p}{\eta} \right)^\beta \right]$$

d'où

$$\eta = \frac{t_p}{[-\text{Log}_e(1-p)]^{1/\beta}}$$

L'estimation de variance minimale

$$\eta^* = \frac{y_p}{[-\text{Log}_e(1-p)]^{1/\beta}}$$

correspond à $p = 0,797$, la distribution de η^* étant asymptotiquement normale avec :

$$E(\eta^*) = \eta \quad V(\eta^*) = 1,545 \frac{\eta^2}{n\beta^2}$$

4/ La méthode des moments conduit aux équations

$$\bar{t} = \eta \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)$$

$$\frac{\sum (t - \bar{t})^2}{n - 1} = \eta^2 \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right]$$

que l'on peut résoudre assez facilement à l'aide des tables qui donnent la valeur des coefficients.

$$\Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \text{ et } \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right]^{1/2}$$

5/ Enfin si on pose :

$$P_1 = \Pr[T > t_1] = \exp \left[- \frac{t_1^\beta}{\theta} \right]$$

avec

$$\theta = \eta^\beta$$

On a

$$Y_1 = \text{Log}_e(-\text{Log}_e P_1) = \beta \text{Log}_e t_1 - \log \theta$$

(équation de la droite de Weibull)

Si P_1^* est la fréquence cumulée des observations supérieures à t_1 , la méthode des moindres carrés permettra de déterminer β et θ à partir de la condition

$$\Phi(\beta, \theta) = \sum_{i=1}^n [Y_1^* - \beta \text{Log}_e t_1 - \log \theta]^2 \quad \text{minimum}$$

soit :

$$\beta^* = \frac{\sum (Y_1^* - \bar{Y}^*) \text{Log}_e t_1}{\sum (\text{Log}_e t_1 - \text{Log } \bar{t})^2}$$

$$\theta^* = \exp [\beta^* \overline{\text{Log}_e t} - \bar{Y}^*]$$

6/ Rappelons que la méthode graphique est basée sur l'emploi d'un papier quadrillé à échelles fonctionnelles [1] et [11].

Axe des ordonnées gradué en $F(t)$, les ordonnées étant proportionnelles à $\text{Log}_e [-\text{Log}_e (1 - F(t))]$.

Axe des abscisses gradué en t , les abscisses étant proportionnelles à $\text{Log}_e t$.

Dans un tel graphique, les points-observations $[t_i, F^*(t_i)]$ correspondant à un échantillon au hasard issu d'une population suivant la loi de Weibull devront se placer au voisinage de la droite d'équation :

$$\text{Log}_e [-\text{Log}_e (1 - F(t))] = \beta (\text{Log}_e t - \text{Log}_e \eta)$$

Si $t_1 < t_2 < \dots < t_1 < \dots < t_n$ sont les valeurs ordonnées des n observations t_i , la fréquence cumulée $F(t_i)$ pourra être estimée :

$$\text{- soit par son espérance mathématique } F^*(t_i) = \frac{i}{n+1}$$

$$\text{- soit par sa valeur médiane } F^*(t_i) = \frac{i F_{0,50}}{(n-i+1) + i F_{0,50}}$$

$F_{0,50}$ étant la valeur de la variable F de Fisher-Snedecor, [$\nu_1 = 2i$, $\nu_2 = 2(n-i+1)$], ayant la probabilité 0,50 d'être dépassée.

Les papiers pour graphiques de Weibull existant dans le commerce [12] permettent d'obtenir directement β et η .

I.2 - CAS PARTICULIER : β EST CONNU

Dans certains domaines industriels, on admet que pour un réglage de fabrication donné, β reste pratiquement invariable et peut être déterminé de manière assez précise.

Si l'on suppose β connu, on a directement une estimation de λ , soit :

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum t^\beta} \quad \text{ou} \quad \hat{\eta} = \left(\frac{1}{n} \sum t^\beta \right)^{1/\beta}$$

Si l'on pose :

$$T^\beta = X \quad t^\beta = x$$

On a :

$$\Pr(X < x) = \Pr(T < x^{1/\beta}) = 1 - \exp \left(- \frac{x}{\eta^\beta} \right)$$

La loi de x est une loi exponentielle de paramètre η^β (espérance mathématique).

Il résulte des travaux d'Epstein et de Sobel [2], sur la loi exponentielle des durées de vie que :

$1/\hat{\eta}^\beta = \frac{\sum t_i^\beta}{n}$, estimation par le maximum de vraisemblance de η^β est une estimation sans biais, de variance minimale.

$2/2n \frac{\hat{\eta}^\beta}{\eta^\beta}$ est distribué comme χ^2 avec $2n$ degrés de liberté soit :

$$1 - \alpha = \Pr \left[\chi_{\alpha/2}^2 < 2n \frac{\hat{\eta}^\beta}{\eta^\beta} < \chi_{1-\alpha/2}^2 \right]$$

$$1 - \alpha = \Pr \left[\frac{2 \sum t_i^\beta}{\chi_{1-\alpha/2}^2} < \eta^\beta < \frac{2 \sum t_i^\beta}{\chi_{\alpha/2}^2} \right] \quad (5)$$

L'espérance mathématique $E(T) = m$, étant définie par :

$$m = \eta \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)$$

On a encore :

$$1 - \alpha = \Pr \left\{ \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left[\frac{2 \sum t_i^\beta}{\chi_{1-\alpha/2}^2} \right]^{1/\beta} < m < \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left[\frac{2 \sum t_i^\beta}{\chi_{\alpha/2}^2} \right]^{1/\beta} \right\}$$

Estimation de la fiabilité $R(t_0)$ pour une durée t_0

On a :

$$R(t_0) = \Pr [T > t_0] = \exp \left[- \frac{t_0^\beta}{\eta^\beta} \right]$$

Or on a :

$$1 - \alpha = \Pr \left[\eta^\beta > \frac{2 \sum t_i^\beta}{\chi_{1-\alpha}^2} \right]$$

qui équivaut à la condition :

$$1 - \alpha = \Pr \left[\exp \left(- \frac{t_0^\beta}{\eta^\beta} \right) > \exp \left(- \frac{t_0^\beta}{2 \sum t_i^\beta} \chi_{1-\alpha}^2 \right) \right]$$

soit :

$$1 - \alpha = \Pr \left[R(t_0) > \exp \left(- \frac{t_0^\beta}{2 \sum t_i^\beta} \chi_{1-\alpha}^2 \right) \right] \quad (6)$$

ou encore :

$$1 - \alpha = \Pr \left[\exp \left(- \frac{t_0^\beta}{\sum t_i^\beta} \chi_{1-\alpha/2}^2 \right) < R(t_0) < \exp \left(- \frac{t_0^\beta}{\sum t_i^\beta} \chi_{\alpha/2}^2 \right) \right] \quad (6')$$

$$= \Pr \left[\exp \left(- \frac{t_0^\beta}{2n \hat{\eta}^\beta} \chi_{1-\alpha/2}^2 \right) < R(t_0) < \exp \left(- \frac{t_0^\beta}{2n \hat{\eta}^\beta} \chi_{\alpha/2}^2 \right) \right]$$

Réciproquement, l'intervalle de confiance pour la durée de vie t qui correspond à une fiabilité donnée $R(t) = R$, sera défini par :

$$1 - \alpha = \Pr \left[\frac{2n \hat{\eta}^\beta}{\chi_{1-\alpha/2}^2} \text{Log}_e \frac{1}{R} < t^\beta < \frac{2n \hat{\eta}^\beta}{\chi_{\alpha/2}^2} \text{Log}_e \frac{1}{R} \right]$$

Essai de fiabilité

Soit à déterminer l'effectif n de l'échantillon à soumettre à l'essai et le critère d'acceptation A correspondant à des risques fixés pour le producteur et pour le client, en ce qui concerne la fiabilité relative à une durée t_0 .

Soient :

$1 - \gamma_1$ la probabilité d'acceptation si la fiabilité vraie est égale à $R(t_0) = R_1$

γ_0 la probabilité d'acceptation si $R(t_0) = R_0$ (avec $R_0 < R_1$)

L'acceptation étant décidée en fonction des résultats observés, c'est-à-dire de $\hat{\theta} = \hat{\eta}^\beta$, la règle d'acceptation sera de la forme

$$\hat{\theta} \geq A$$

(la fiabilité $R(t_0)$ étant une fonction croissante de η).

Si θ_0 et θ_1 sont les deux valeurs de θ définies par :

$$R(t) = \exp \left[-\frac{t^\beta}{\theta_0} \right] = R_0 \text{ pour } \eta^\beta = \theta_0$$

$$R(t) = \exp \left[-\frac{t^\beta}{\theta_1} \right] = R_1 \text{ pour } \eta^\beta = \theta_1$$

la probabilité d'acceptation :

$$P_a = \Pr [\hat{\theta} > A] = \Pr \left[2n \frac{\hat{\theta}}{\theta} > 2n \frac{A}{\theta} \right]$$

devra satisfaire aux conditions :

$$1 - \gamma_1 = \Pr \left[\chi^2 (2n) > 2n \frac{A}{\theta_1} \right]$$

$$\gamma_0 = \Pr \left[\chi^2 (2n) > 2n \frac{A}{\theta_0} \right]$$

($2n \frac{\hat{\theta}}{\theta}$ étant distribué comme χ^2 avec $\nu = 2n$ degrés de liberté).

d'où :

$$2n \frac{A}{\theta_1} = \chi_{\gamma_1}^2, \quad 2n \frac{A}{\theta_0} = \chi_{1-\gamma_0}^2$$

on devra donc avoir

$$\frac{\chi_{1-\gamma_0}^2}{\chi_{\gamma_1}^2} = \frac{\theta_1}{\theta_0} = \frac{\log R_0}{\log R_1}, \quad \nu = 2n$$

Une table de la fonction cumulative de χ^2 permettra de déterminer $\nu = 2n$ et donc n , tels que cette relation soit vérifiée.

(Noter que diverses tables du rapport $\frac{\chi_{1-\gamma_0}^2}{\chi_{\gamma_1}^2} = f(\nu)$ ont été publiées, par exemple dans :

- Industrial Quality Control, Juillet 1952 pour les valeurs $\gamma_0 = 0,01 - 0,05 - 0,10$ et $\gamma_1 = 0,01 - 0,05$ en fonction de $c = \frac{\nu}{2} - 1 = n - 1$.

- Technics of Statistical Analysis - Columbia University, Mac Graw Hill 1947 pour $\gamma_1 = 0,01$ et $0,05$ et une gamme étendue de valeurs de γ_0 et ν).

On aura ensuite, théoriquement :

$$A = \chi_{\gamma_1}^2 \frac{\theta_1}{2n} = \chi_{1-\gamma_1}^2 \frac{\theta_0}{2n}$$

Mais, n ne devant être un nombre entier défini par la condition $\frac{\chi_{1-\gamma_0}^2}{\chi_{\gamma_0}^2} = \frac{\theta_1}{\theta_0}$, la condition précédente donnera en général deux valeurs différentes de A dont on pourra prendre la moyenne A_m d'où la règle d'acceptation.

$$\hat{\theta} \geq A_m$$

Pour une valeur vraie θ du paramètre dans la population la courbe d'efficacité (probabilité d'acceptation) sera définie par

$$P_a = \Pr \left[\chi^2(2n) > 2n \frac{A_m}{\theta} \right]$$

$$\chi_{1-P_a}^2(2n) = 2n \frac{A_m}{\theta}$$

Une table de χ^2 permettra de construire par points la courbe de P_a en fonction de θ .

Noter que pour $\theta = \theta_0$ ou θ_1 on obtiendra des risques réels γ_0' et γ_1' légèrement différents des risques théoriques γ_0 et γ_1 .

Cas d'un plan $[n, \gamma_0, R(t_0)]$.

Si on se fixe à priori l'effectif n de l'échantillon, et les seuls risques du client $[\gamma_0', R(t_0)]$, correspondant à une durée t_0 , la règle d'acceptation sera :

$$\hat{\theta} > \chi_{1-\gamma_0}^2 \frac{\theta_0}{2n}$$

soit :

$$\hat{\eta}^\beta \frac{2n}{\chi_{1-\gamma_0}^2} > \frac{t_0^\beta}{\text{Log}_e 1/R_0}$$

Si l'on pose :

$$\eta'^\beta = \hat{\eta}^\beta \frac{2n}{\chi_{1-\gamma_0}^2} \quad \eta_0^\beta = \frac{t_0^\beta}{\text{Log}_e 1/R_0}$$

on peut remarquer que la condition $\eta' > \eta_0$ est équivalente à la condition :

$$R(t_0, \eta') > R_0(t_0),$$

$R(t_0, \eta')$ étant la fiabilité pour une durée t_0 , correspondant à une valeur $\eta = \eta'$ du paramètre η de la population.

Pour un tel plan $[n, \gamma_0, R_0(t_0)]$, la courbe d'efficacité est alors définie en fonction de la valeur vraie η du paramètre, par :

$$P_a = \Pr \left[\chi_{(2n)}^2 > \left(\frac{\eta_0}{\eta} \right)^\beta \chi_{1-\gamma_0}^2 \right]$$

$$= \Pr \left[\chi_{2n}^2 > \chi_{1-\gamma_0}^2 \frac{\log R(t_0)}{\log R_0(t_0)} \right]$$

$R(t_0)$ étant la fiabilité vraie pour la durée t_0

Pour tout système de valeurs fixées de $R_0(t_0)$ et γ_0 , un réseau de courbes $n = \text{Cte}$ permettra de juger immédiatement l'efficacité des plans correspondant à ces valeurs de n . Toutes ces courbes passent par le point $[R_0, \gamma_0]$ (voir annexe).

On pourrait de la même manière s'intéresser aux courbes

$$P_a = \Pr \left[\chi_{(2n)}^2 > \chi_{\gamma_1}^2 \frac{\log R(t_0)}{\log R_1(t_0)} \right]$$

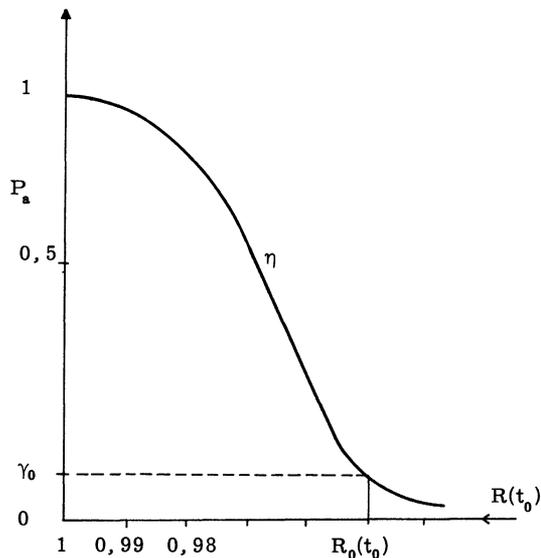


Figure 1 - Courbe d'efficacité. Plan $[n, \gamma_0, R_0(t_0)]$.

Estimation des fractiles

Soit t_γ tel que :

$$\gamma = F(t_\gamma) = 1 - \exp\left(-\frac{t_\gamma^\beta}{\eta^\beta}\right)$$

$$t_\gamma^\beta = \eta^\beta \text{Log}_e \frac{1}{1-\gamma}$$

De la relation (5) on déduit :

$$1 - \alpha = \Pr \left[\frac{2 \sum t_i^\beta}{\chi_{1-\alpha/2}^2} \text{Log}_e \frac{1}{1-\gamma} < t_\gamma^\beta < \frac{2 \sum t_i^\beta}{\chi_{\alpha/2}^2} \text{Log}_e \frac{1}{1-\gamma} \right] \quad (7)$$

ou encore :

$$1 - \alpha = \Pr \left[t_\gamma^\beta > \frac{2 \sum t_i^\beta}{\chi_{1-\alpha}^2} \text{Log}_e \frac{1}{1-\gamma} \right] \quad (7')$$

II.2 - ESSAI CENSURE (β SUPPOSE CONNU)

La loi de $x = t^\beta$ étant la loi exponentielle :

$$g(x) = \frac{1}{\eta^\beta} \exp\left(-\frac{x}{\eta^\beta}\right)$$

Epstein et Sobel ont montré [2] que lorsque l'essai, sans remplacement des défailants, portant sur n éléments, est arrêté à la k ème défaillance, l'estimation de $\theta = \eta^\beta$ par le maximum de vraisemblance était :

$$\hat{\theta} = \hat{\eta}^\beta = \frac{1}{k} \left[\sum_{i=1}^k t_i^\beta + (n - k) t_k^\beta \right] \quad (8)$$

avec

$$E(\hat{\eta}^\beta) = \eta^\beta \quad , \quad V(\hat{\eta}^\beta) = \frac{\eta^{2\beta}}{k}$$

$t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ étant les durées de vie des k premiers éléments défailants parmi les n soumis à l'essai à l'origine.

$$\hat{\eta} = \left\{ \frac{1}{k} \left[\sum_{i=1}^k t_i^\beta + (n - k) t_k^\beta \right] \right\}^{1/\beta} \quad (8')$$

est aussi une estimation de η par le maximum de vraisemblance

D'autre part, Epstein et Sobel [1] et [2] ont aussi donné la loi de probabilité de $\hat{\eta}^\beta = \hat{\theta}$:

$$h(\hat{\theta}) = \frac{1}{\Gamma(k)} \left(k \frac{\hat{\theta}}{\theta} \right)^{k-1} \frac{k}{\theta} \exp\left(-k \frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) \quad (9)$$

De plus $2k \frac{\hat{\theta}}{\theta}$ est encore distribué comme χ^2 , indépendamment de n , mais avec cette fois, $\nu = 2k$ degrés de liberté, d'où l'intervalle de confiance à $1 - \alpha$ pour η^β :

$$1 - \alpha = \Pr \left[\frac{2k \hat{\eta}^\beta}{\chi^2_{1-\alpha/2}} < \eta^\beta < \frac{2k \hat{\eta}^\beta}{\chi^2_{\alpha/2}} \right] \quad (10)$$

De la relation (9), on déduit la loi de $\hat{\eta} = (\hat{\theta})^{1/\beta}$:

$$s(\hat{\eta}) = \frac{\beta}{\Gamma(k)} \left(\frac{k}{\eta^\beta} \right)^k \hat{\eta}^{\beta k - 1} \exp \left[-\frac{k}{\eta^\beta} \hat{\eta}^\beta \right]$$

L'espérance mathématique de η est :

$$E(\hat{\eta}) = \frac{\beta}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \left[k \left(\frac{\hat{\eta}}{\eta} \right)^\beta \right] \exp \left[-k \left(\frac{\hat{\eta}}{\eta} \right)^\beta \right] d\hat{\eta},$$

Soit en posant :

$$Z = k \left(\frac{\hat{\eta}}{\eta} \right)^\beta$$

$$E(\hat{\eta}) = \frac{1}{k^{1/\beta} \Gamma(k)} \eta \int_0^\infty Z^{k-1+1/\beta} e^{-Z} dz$$

$$E(\hat{\eta}) = \frac{\eta}{k^{1/\beta} \Gamma(k)} \Gamma\left(k + \frac{1}{\beta}\right) \quad (11)$$

d'où une estimation sans biais de η :

$$\bar{\eta} = \hat{\eta} \frac{k^{1/\beta} \Gamma(k)}{\Gamma\left(k + \frac{1}{\beta}\right)}$$

On a d'autre part :

$$E(\hat{\eta}^2) = \frac{\beta}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \hat{\eta} \left[k \left(\frac{\hat{\eta}}{\eta}\right)^\beta \right]^k \exp \left[-k \left(\frac{\hat{\eta}}{\eta}\right)^\beta \right] d\hat{\eta}$$

soit, avec le même changement de variable :

$$E(\hat{\eta}^2) = \frac{\eta^2}{k^{2/\beta} \Gamma(k)} \int_0^\infty Z^{k-1+2/\beta} e^{-Z} dZ$$

$$E(\hat{\eta}^2) = \frac{\eta^2}{k^{2/\beta} \Gamma(k)} \Gamma\left(k + \frac{2}{\beta}\right) \quad (12)$$

d'où

$$V(\hat{\eta}) = E(\hat{\eta}^2) - [E(\hat{\eta})]^2$$

$$= \frac{\eta^2}{k^{2/\beta} \Gamma^2(k)} \left[\Gamma(k) \Gamma\left(k + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(k + \frac{1}{\beta}\right) \right]$$

d'où pour l'estimation sans biais $\bar{\eta}$:

$$V(\bar{\eta}) = \left[\frac{k^{1/\beta} \Gamma(k)}{\Gamma\left(k + \frac{1}{\beta}\right)} \right]^2 V(\hat{\eta})$$

$$V(\bar{\eta}) = \frac{\eta^2}{\Gamma^2\left(k + \frac{1}{\beta}\right)} \left[\Gamma(k) \Gamma\left(k + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(k + \frac{1}{\beta}\right) \right] \quad (13)$$

Harter et Moore [3], qui ont donné sans démonstration les résultats ci-dessus, ont aussi donné les valeurs des coefficients numériques :

$$\frac{k^{1/\beta} \Gamma(k)}{\Gamma\left(k + \frac{1}{\beta}\right)}$$

$$\frac{\Gamma(k) \Gamma\left(k + \frac{2}{\beta}\right)}{\Gamma^2\left(k + \frac{1}{\beta}\right)} - 1$$

pour :

$$\beta = 0,5 \quad (0,5 \dots\dots 4 \quad (1,0) \dots\dots 8$$

$$k = 1 \quad (1) \dots\dots 100$$

III - ESTIMATION BASEE SUR LA PREMIERE DEFAILLANCE DE CHACUN DES m ECHANTILLONS DE N ELEMENTS (β CONNU).

$F(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\eta} \right)^\beta \right]$ étant la fonction de répartition de la loi de Weibull, la loi de T_1 , première défaillance d'un échantillon de N éléments est définie par :

$$G(t) = \Pr [T_1 < t] = 1 - [1 - F(t)]^N$$

d'où la fonction de densité :

$$\begin{aligned} g(t) &= N [1 - F(t)]^{N-1} f(t) \, dt \\ &= N \frac{\beta}{\eta'} \left(\frac{t}{\eta'} \right)^{\beta-1} \exp \left[-N \left(\frac{t}{\eta'} \right)^\beta \right] \end{aligned}$$

soit :

$$g(t) = \frac{\beta}{\eta'} \left(\frac{t}{\eta'} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{\eta'} \right)^\beta \right] \quad (14)$$

avec

$$\eta' = \frac{\eta}{N^{1/\beta}}$$

La variable T_1 suit une loi de Weibull de même paramètre de forme β que la loi de T , mais avec le paramètre d'échelle $\eta' = \frac{\eta}{N^{1/\beta}}$.

Tout se passe comme si on avait soumis à l'essai un échantillon de m éléments satisfaisant à la loi de Weibull (β, η'), la défaillance de chacun d'eux étant caractérisée par la durée de vie t_{1j} ($j = 1, 2, \dots, s < m$) correspondant à la première défaillance de ces éléments composés.

Il résulte des formules (8) et (8') que l'estimation sans biais, par le maximum de vraisemblance, de $\theta' = \eta'^\beta$ est :

$$\hat{\theta}' = \hat{\eta}'^\beta = \frac{1}{s} \left[\sum_{j=1}^s t_{1j}^\beta + (m - s) t_{1s}^\beta \right]$$

De même que précédemment $2s \frac{\hat{\theta}'}{\theta'}$ est distribué comme χ^2 avec $2s$ degrés de liberté.

$$1 - \alpha = \Pr \left[\frac{2s \hat{\eta}'^\beta}{\chi^2_{1-\alpha/2}} < \eta^\beta < \frac{2s \hat{\eta}'^\beta}{\chi^2_{\alpha/2}} \right]$$

La loi de $\hat{\theta}'$ étant encore :

$$h(\hat{\theta}') = \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{s}{\theta'} \left(s \frac{\hat{\theta}'}{\theta'} \right)^{s-1} \exp \left(-s \frac{\hat{\theta}'}{\theta'} \right),$$

On en déduit comme précédemment :

$$E(\hat{\eta}') = \frac{\eta'}{s^{1/\beta} \Gamma(s)} \Gamma \left(s + \frac{1}{\beta} \right)$$

d'où l'estimation sans biais de η' :

$$\bar{\eta}' = \eta' \frac{s^{1/\beta} \Gamma(s)}{\Gamma\left(s + \frac{1}{\beta}\right)}$$

et les variances :

$$V(\hat{\eta}') = \frac{\eta'}{s^{2/\beta} \Gamma^2(s)} \left[\Gamma(s) \Gamma\left(s + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(s + \frac{1}{\beta}\right) \right]$$

et

$$V(\bar{\eta}') = \frac{\eta'^2}{\Gamma^2\left(s + \frac{1}{\beta}\right)} \left[\Gamma(s) \Gamma\left(s + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(s + \frac{1}{\beta}\right) \right]$$

d'où finalement :

$$\hat{\eta} = N^{1/\beta} \hat{\eta}' = \left\{ \frac{N}{s} \left[\sum_1^s t_{1j}^\beta + (m - s) t_{1s} \right] \right\}^{1/\beta}$$

$$E(\hat{\eta}) = \frac{\eta}{s^{1/\beta} \Gamma(s)} \Gamma\left(s + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$\bar{\eta} = \eta \frac{s^{1/\beta} \Gamma(s)}{\Gamma\left(s + \frac{1}{\beta}\right)}, \quad E(\bar{\eta}) = \eta$$

$$V(\hat{\eta}) = \frac{\eta^2}{s^{2/\beta} \Gamma^2(s)} \left[\Gamma(s) \Gamma\left(s + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(s + \frac{1}{\beta}\right) \right]$$

$$V(\bar{\eta}) = \frac{\eta^2}{\Gamma^2\left(s + \frac{1}{\beta}\right)} \left[\Gamma(s) \Gamma\left(s + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(s + \frac{1}{\beta}\right) \right]$$

Remarque - Les résultats obtenus dans les essais II.2 et III sont évidemment valables lorsque :

1/ dans II.2, on a $k = n$ défaillances

d'où
$$\hat{\eta}^\beta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^\beta$$

2/ dans III, on a $s = m$ défaillances

d'où
$$\hat{\eta}^\beta = \frac{N}{m} \sum_{j=1}^m t_{1j}^\beta$$

Comparaison entre les deux essais

D'une manière générale, les durées limites moyennes t_k et t_{1s} sont caractérisées [1] et [2] par :

$$E(t_k^\beta) = \eta^\beta \sum_{i=1}^k \frac{1}{n - i + 1} \quad (\text{II.2})$$

$$E(t_{1s}^\beta) = \frac{\eta^\beta}{N} \sum_{j=1}^k \frac{1}{m - j + 1} \quad (\text{III})$$

Dans le cas particulier où $m = n$, les deux essais étant arrêtés, le premier à la $n^{\text{ième}}$ défaillance, le second à la $n^{\text{ième}}$ première défaillance on a alors, pour $m = n = s = k$;

$$E(t_n^\beta) = \eta^\beta \sum_{i=1}^n \frac{1}{n - i + 1} \quad (\text{II.2})$$

$$E(t_{1n}^\beta) = \frac{\eta^\beta}{N} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n - j + 1} \quad (\text{III})$$

L'essai du type III, est donc en général, beaucoup plus court que l'essai du type II, d'autant plus que N est plus grand, mais pour un même nombre n de défaillants, il implique la mise en essais de Nn éléments dont $n(N - 1)$ auront subi une usure partielle, n'ayant plus la loi de vie caractérisant la population.

Ce type d'essais ne peut dans le cas de l'étude en usine, être considéré comme plus intéressant que s'il s'agit d'éléments peu coûteux ayant une vie moyenne de longue durée, l'économie de temps pouvant alors être considérée comme plus intéressante que l'économie sur les éléments soumis à l'essai.

Par contre, il peut être envisagé dans l'étude a posteriori d'ensembles mise en service, s'ils sont constitués par un même nombre N d'éléments.

Remarque - Les résultats précédents (II.2 et II.3) sont évidemment valables dans le cas particulier où $\beta = 1$, la loi des durées de vie dans la population étant alors la loi exponentielle

$$f(t) = \frac{1}{\eta} e^{-t/\eta}$$

de moyenne η .

On a alors, avec les mêmes notations que précédemment :

$$\left. \begin{aligned} \hat{\eta} &= \frac{1}{k} \left[\sum_{i=1}^k t_i + (\eta - k) t_k \right] = \bar{\eta} \\ E(\hat{\eta}) &= \eta \quad V(\hat{\eta}) = \frac{\eta^2}{k} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.2})$$

$$0 < k \leq n$$

et

$$\left. \begin{aligned} \hat{\eta} &= \frac{N}{s} \left[\sum_{j=1}^s t_{1j} + (m - s) t_{1s} \right] = \bar{\eta} \\ E(\hat{\eta}) &= \eta \quad V(\hat{\eta}) = \frac{\eta^2}{s} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.3})$$

$$0 < s \leq m$$

Dans ce cas particulier, le taux instantané de défaillance égal à $1/\eta$ ne dépend pas de t (pendant la durée de validité de la loi).

Dans un essai du type II.3 où les essais des m échantillons de N éléments sont arrêtés à la première défaillance de chacun d'eux, c'est-à-

dire après un temps en général assez court, on peut admettre que la loi de durée de vie des $N - 1$ éléments restant dans chaque échantillon est restée la même et qu'ils peuvent être réintroduits dans les lots courants.

ANNEXE (1)

Un essai a été réalisé sur un échantillon $n = 50$ éléments provenant d'une population dont la durée de vie indiquée au catalogue est de $2,5 \times 10^6$ cycles de manoeuvres.

L'essai a montré (étude graphique) que l'on pouvait admettre que cette population suivait une loi de Weibull de paramètres.

$$\hat{\beta} = 1,7 \text{ (estimation graphique)}$$

$$\hat{\eta} = 13,4 \text{ estimation par le calcul, soit } \hat{\eta} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{50} t_i^{1,7}}{50} \right]^{\frac{1}{1,7}}$$

Admettant la validité de l'hypothèse $\beta = 1,7$, c'est-à-dire considérant maintenant que l'on a affaire à une population caractérisée par $\beta = 1,7$, on en déduit

$$0,90 = \Pr \left[\hat{\eta} \left(\frac{2n}{\chi^2_{0,95}} \right)^{1/\beta} < \eta < \hat{\eta} \left(\frac{2n}{\chi^2_{0,05}} \right)^{1/\beta} \right]$$

$$0,90 = \Pr [11,8 \times 10^6 < \eta < 15,5 \times 10^6]$$

Le graphique N° 2 montre les variations de $R(t) = \exp \left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta \right]$ en fonction de t pour les valeurs.

$$\eta' = 11,8 \times 10^6 \quad , \quad \hat{\eta} = 13,4 \times 10^6 \quad , \quad \eta'' = 15,5 \times 10^6$$

On peut en déduire :

a) la fiabilité correspondant à une durée de vie déterminée.

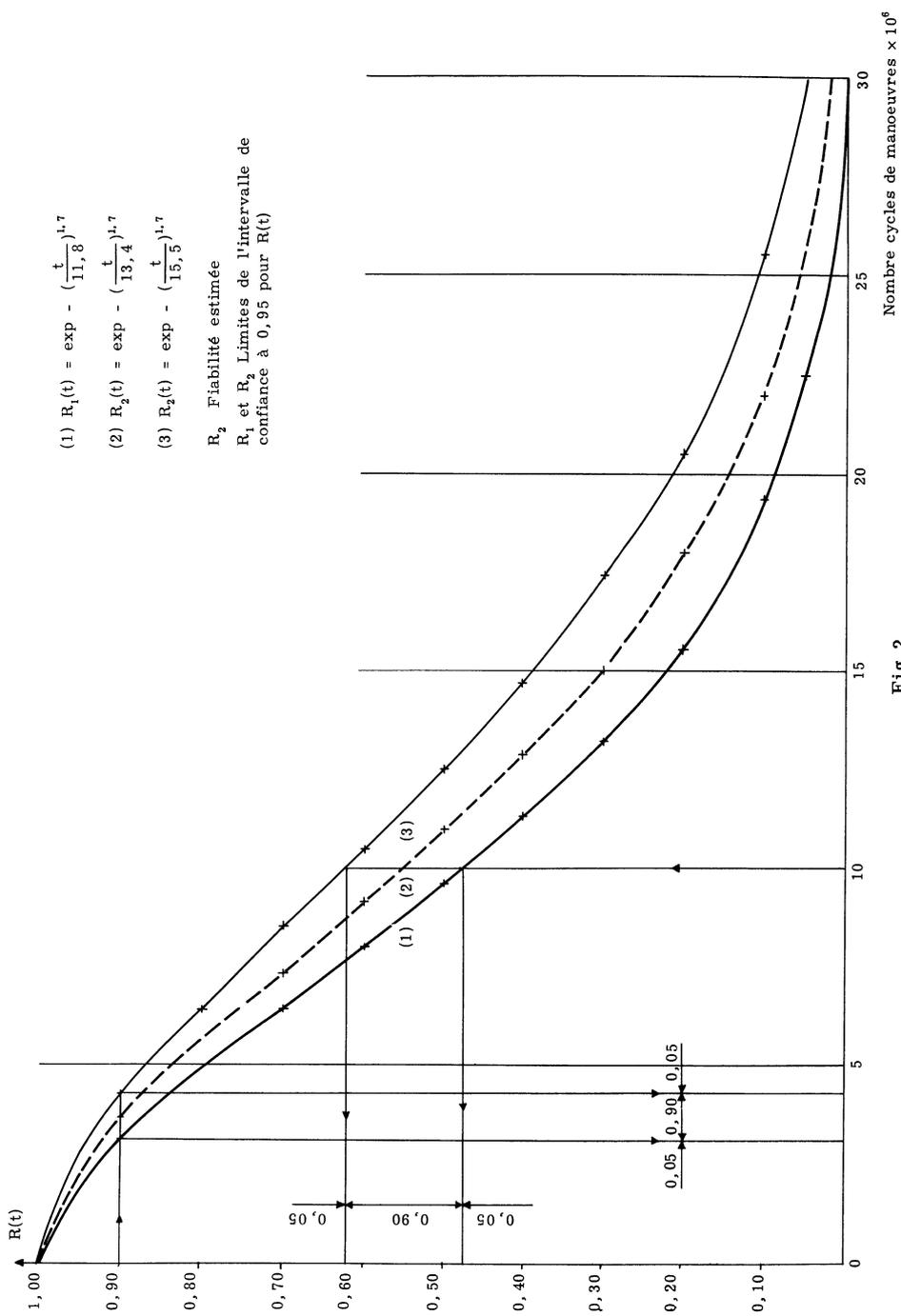
Par exemple, la durée du produit considéré au bout de 10×10^6 manoeuvres est comprise entre 0,475 et 0,620 avec une probabilité de 0,90, ou encore, on peut affirmer que la fiabilité au bout de 10×10^6 manoeuvres a une probabilité 0,95 d'être supérieure à 0,475.

b) La durée de service correspondant à une fiabilité donnée.

Par exemple, la durée de service qui correspond à une fiabilité de 0,90 a une probabilité 0,90 d'être comprise entre $3,1 \times 10^6$ et $4,3 \times 10^6$ cycles de manoeuvres ou encore que cette durée de service a une probabilité 0,95 d'être supérieure à $3,1 \times 10^6$ manoeuvres.

c) La décision d'acceptation ou de rejet d'un lot défini, par le producteur, par une fiabilité donnée $R(t_0)$.

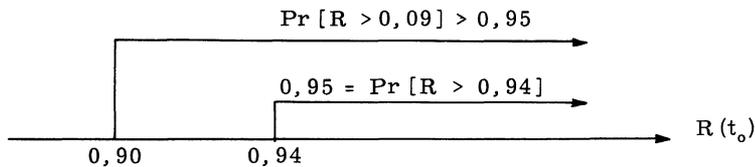
 (1) Les données utilisées et les graphiques nous ont été aimablement communiqués par M. B. Negre (La Télémechanique Electrique) qui les a présentés lors de la Journée de l'Industrie Electrique (Paris, mars 1968).



Si, par exemple, la fiabilité annoncée par le catalogue est 0,90 pour $t_0 = 2,5 \times 10^6$ manoeuvres, le graphique N° 1 montre que pour $t_0 = 2,5 \times 10^6$, on a :

$$\Pr [R(t_0) > 0,94] = 0,95$$

Il y a donc une forte probabilité, supérieure à 0,95, pour que la fiabilité à t_0 soit supérieure ou égale à 0,90.



Courbe d'efficacité d'un essai

Si, pour cet essai de $n = 50$, on fixe à $\gamma_0 = 0,05$ la probabilité d'accepter le lot pour une fiabilité $R_0(t_0) = 0,90$ pour $t_0 = 2,5 \times 10^6$ manoeuvres, la règle d'acceptation sera :

$$\left(\frac{2n}{\chi_{0,95}^2} \right)^{1/\beta} \eta > \eta_0$$

η_0 étant défini par

$$\exp \left[- \left(\frac{t_0}{\eta_0} \right)^\beta \right] = 0,90$$

soit :

$$\left(\frac{2n}{\chi_{0,95}^2} \right)^{1/\beta} \hat{\eta} = 11,8 \times 10^6$$

$$\eta_0^\beta = \frac{(2,5 \times 10^6)^\beta}{\text{Log}_e \frac{1}{0,90}}, \quad \eta_0 = 9,4 \times 10^6$$

L'essai conduit donc à l'acceptation.

Si η est la vraie valeur du paramètre estimé, la courbe d'efficacité du test ($n = 50$) sera définie en fonction de $R(t_0) = \exp \left[- \left(\frac{t_0}{\eta} \right)^\beta \right]$

$$P_a = \Pr \left[\chi_{(2n)}^2 > \chi_{0,95}^2 \frac{\log R(t_0)}{\log R_0(t_0)} \right]$$

$$P_a = \Pr \left[\chi^2 > \chi_{0,95}^2 \frac{\log R(t_0)}{\log 0,90} \right]$$

($\nu = 100$ degrés de liberté).

Le graphique N° 3 (courbe n = 50) donne cette courbe d'efficacité : on y lit par exemple que si la fiabilité vraie est $R(t_0) = 0,935$, la probabilité d'acceptation est $P_a = 0,94$, soit le risque $\gamma_1 = 0,06$ (risque du fournisseur) de conclure à tort - dans les conditions de l'essai - que la fiabilité annoncée $R_0(t_0) = 0,90$ n'est pas respectée par l'ensemble de la population.

On trouvera sur ce même graphique N° 3 les courbes d'efficacité correspondant aux effectifs n = 100, 50, 40, 20, 10 et 5, et au même risque du client [$R_0(t_0) = 0,90$, $\gamma_0 = 0,05$].

On peut remarquer que dans un tel plan défini par l'effectif n de l'échantillon et le seul risque du client [γ_0 , $R(t_0)$], relatif à une durée de fonctionnement t_0 donnée, la probabilité d'acceptation :

$$P_a = \Pr \left[\chi^2(2n) > \chi_{1-\gamma_0}^2(2n) \frac{\log R(t_0)}{\log R_0(t_0)} \right]$$

ne dépend que du rapport $\frac{\log R(t_0)}{\log R_0(t_0)}$, relatif à la comparaison de la fiabilité éventuelle $R(t_0)$ à la fiabilité $R_0(t_0)$ annoncée par le constructeur pour cette durée t_0 :

1/ P_a est évidemment une fonction croissante de $R(t_0)$, avec $P_a = \gamma_0$ lorsque $R = R_0$.

2/ Pour une valeur éventuelle de R , R_0 étant fixé, P_a croît avec n si $R > R_0$: le risque du client diminue lorsque n augmente.

La condition $\frac{\chi_{1-\gamma_0}^2}{\chi_{\gamma_1}^2} = \frac{\log R(t)}{\log R_0(t)}$ permettra de déterminer l'effectif n correspondant au risque (γ_0 , R_0) et approximativement au risque (γ_1 , R_1), relativement à une durée fixée t_0 .

Mais il faut remarquer que si l'intervalle (R_0 , R_1) est important et si les risques γ_0 et γ_1 sont petits, le rapport $\frac{\chi_{1-\gamma_0}^2}{\chi_{\gamma_0}^2}$ peut conduire à une valeur de n petite, insuffisante pour obtenir une estimation valable de β à partir de l'échantillon lui-même, cette estimation devant alors provenir d'une information antérieure relative à la population.

Ainsi pour $R_0 = 0,90$, $R_1 = 0,98$, $\gamma_0 = \gamma_1 = 0,01$, la condition

$$\frac{\chi_{0,99}^2}{\chi_{0,01}^2} = \frac{0,04576}{0,00876} = 5,2$$

est approximativement vérifiée pour $\nu = 18$, soit $n = 9$.

De même si l'intervalle (R_0 , R_1) est petit et si les risques γ_0 et γ_1 sont élevés, le rapport $\frac{\chi_{1-\gamma_0}^2}{\chi_{\gamma_1}^2}$ conduira à un effectif important coûteux à réaliser.

Ainsi pour $R_0 = 0,90$, $R_1 = 0,92$ avec $\gamma_0 = \gamma_1 = 0,10$, on aurait $\frac{\chi_{0,90}^2}{\chi_{0,10}^2} = \frac{0,04576}{0,03621} = 1,26$ d'où $\nu = 256$, $n = 128$.

3/ Le critère d'acceptation a été déterminé en admettant une valeur connue de β . Ce critère d'acceptation :

$$\hat{\eta}^\beta \frac{2n}{\chi_{1-\gamma_0}^2} > \frac{t_0^\beta}{\text{Log}_e 1/R_0}$$

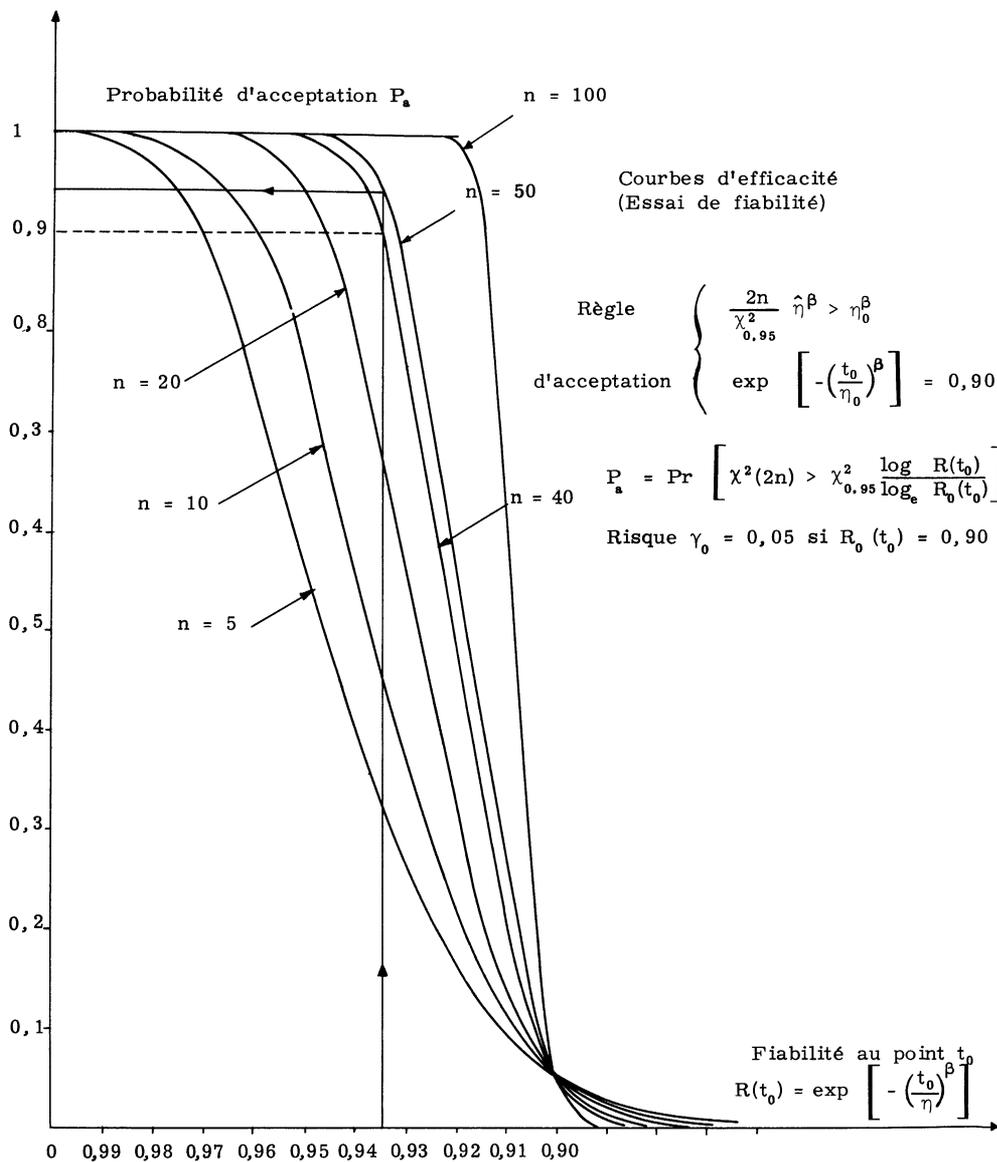


Fig. 3

dépend de β , d'abord par l'estimation de $\hat{\eta}^\beta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^\beta$, mais aussi par la valeur de t_0^β .

Une erreur sur la valeur de β peut conduire à une acceptation au lieu d'un rejet et réciproquement.

Avec les résultats de l'essai cité ci-dessus, ($n = 50$), les valeurs de :

$$\eta' = \hat{\eta} \left(\frac{2n}{\chi_{0,95}^2} \right)^{1/\beta}, \quad \eta_0 = \left(\frac{t_0^\beta}{\text{Log}_e 1/R_0} \right)^{1/\beta}$$

définissant le critère d'acceptation $\eta' > \eta_0$, donneraient lieu suivant la valeur de β aux résultats ci-après (exprimés en 10^6 cycles)

β	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$\hat{\eta}$	12,6	12,9	13,2	13,4	13,6
η'	10,9	11,2	11,6	11,9	12,1
η_0	11,2	10,2	9,4	8,7	8,2

(Pour simplifier les calculs, ces valeurs ont été calculées à partir des 50 valeurs observées groupées en 9 classes et rapportées à leur centre de classe).

On constate - dans cet exemple - où la décision était basée sur l'hypothèse $\beta = 1,7$, qu'une erreur de près de 0,2 sur β n'aurait pas modifié la décision d'acceptation.

Une bonne estimation préalable de β - si on a effectivement affaire à une loi de Weibull - permet un essai pratiquement valable du point de vue des conditions envisagées.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] MORICE - Quelques modèles mathématiques de durée de vie. Revue de Statistique Appliquée, 1966, Vol. XIV N° 1, p. 45-126.
- [2] EPSTEIN et SOBEL - Life testing. Journal of the American Statistical Association, 1953, Vol. 48, p. 486-502.
- [3] HARTER et MOORE - Point and interval estimators, based on m order statistics, for the scale parameter of a Weibull population, with known shape parameter. Technometrics, 1965 Vol. 7 N° 3, p. 404-420.
- [4] LLOYD and LIPOW - Reliability, management, methods and mathematics. Prentice Hall, 1962, p. 177 et 197.
- [5] HARTER - Exact confidence bounds, based on one order statistics, for the parameter of an exponential population. Technometrics, 1964, Vol. 6, p. 301-317.

- [6] MANN - Optimum estimates of parameters of continuous distributions. Research report N° 63-41. Rocketdyne Division, North American Aviation Inc. Canoga Park, California
- [7] QUAYLE - Estimation of the scale parameter of the Weibull probability density function by use of one order statistic. Air Force. Institute of Technology. Wright-Patterson Air Force Base, 1963.
- [8] GUMBEL - Etude statistique de la fatigue des matériaux. Revue de Statistique Appliquée, 1957 N° 4 p. 51-86.
- [9] MENON - Estimation of the shape and scale parameters of the Weibull distribution. Technometrics, 1963 N° 5, p. 173-182.
- [10] DUBEY - Somme percentile estimators for Weibull parameters. Technometrics, 1967, 9, p. 119-129.
- [11] MORICE - Les papiers à échelles fonctionnelles du statisticien, Revue de Statistique Appliquée, 1964, n° 3, p. 84-91.
- [12] Papiers pour loi de Weibull :
 - a) Compagnie Française des diagrammes : 1 modèle avec échelle $F(t)$ de 0,1 % à 99,9 et échelle logarithmique à 3 modules (Boulevard d'Inkermann, Neuilly-sur-Seine).
 - b) Technical and Engineering Aids for Management : 9 modèles avec 3 échelles pour $F(t)$, 0,0001 - 0,01 et 1,0 à 99 %, avec pour chaque type, des échelles logarithmiques à 3, 5, ou 7 modules.
- [13] Tables de la loi de Weibull
 - a) Allan Plait. The Weibull distribution with tables. Industrial Quality Control Nov. 1962 (fonction de densité et fonction de répartition).
 - b) Dourgnon et Reyrolle. Tables de la fonction de répartition de la loi de Weibull. Revue de Statistique Appliquée 1966 N° 4, p. 83-116.