Revue de statistique appliquée

Ion Mircea Nonu

P. Rutta

Recherches sur le rythme moyen de développement en régime socialiste de la production dans le domaine constructions-montage

Revue de statistique appliquée, tome 16, n° 2 (1968), p. 65-82

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1968__16_2_65_0>

RECHERCHES SUR LE RYTHME MOYEN DE DÉVELOPPEMENT EN RÉGIME SOCIALISTE DE LA PRODUCTION DANS LE DOMAINE CONSTRUCTIONS-MONTAGE

Professeur Dr. Ion Mircea NONU
École Polytechnique Bucarest

Professeur Ing. P. RUTTA
École technique de construction, Bucarest

Pour la conduite planifiée de l'économie nationale, l'examen du rythme de développement des divers domaines présente une grande importance. On sait que dans les plans annuels, aussi bien que dans les plans de perspective, on établit les niveaux que doivent atteindre, jusqu'à la fin de la période planifiée, la production globale, la production exprimée en unités naturelles, le volume des investissements, etc., ainsi que les rythmes correspondants. L'indice du rythme moyen de développement des phénomènes sociaux-économiques est l'un des principaux indices employés pour la caractérisation synthétique de l'accroissement d'un phénomène économique d'une période à l'autre, ce qui permet de comparer le développement dans le temps de deux phénomènes similaires, aussi bien que de poursuivre la réalisation du plan de développement, l'élaboration des plans de perspective, etc.

Afin de caractériser le rythme moyen du développement des phénomènes sociaux-économiques, on emploie des méthodes et des procédés différenciés, en fonction des particularités des phénomènes étudiés et des charges de l'analyse économique. Les méthodes les plus usuelles pour le calcul du rythme moyen de développement sont la méthode géométrique et la méthode de la moyenne parabolique, et leurs diverses variantes. Cette étude analyse le domaine des constructions-montage, en faisant ressortir les avantages et les inconvénients de chacune de ces méthodes et variantes, tout en proposant des améliorations et, finalement, en recommandant l'emploi simultané de l'indice de la rythmicité de la production - proposé par les auteurs - qui met en évidence la structure interne de la série soumise à l'analyse.

La production de constructions-montage comprend le volume total des travaux de constructions-montage exécuté au moyen :

- des fonds d'investissements et réparations capitales ;
- des fonds locaux des conseils populaires ;
- des fonds propres des organisations coopératives.

Compte-tenu du caractère spécifique particulier de la production de constructions-montage par rapport aux autres domaines de l'économie nationale, il est nécessaire de délimiter, au préalable, le domaine d'activité de cette spécialité. La production de constructions-montage se réfère à l'activité des organisations spécialisées (entreprises), aussi bien qu'à celle des unités dont l'activité de base est autre que la production de construction (régie).

Pour déterminer la valeur de la production, les quantités des travaux exécutés pour chaque article du devis sont pondérées par le prix du devis du travail, auquel on ajoute les frais généraux et les charges sociales, que l'on ne saurait répartir directement par article du devis. De cette façon, le volume de la production, à toutes ses étapes, peut être exprimé en prix de devis, c'est-à-dire en utilisant les prix mêmes qui se trouvent à la base de l'inscription des travaux dans le plan et les quantités exécutées.

En fonction des étapes d'exécution des articles du devis, la production de constructions-montage s'appuie sur trois indices, exprimés en unités de valeur, à savoir :

- la production de constructions-montage terminée, qui comprend la valeur des articles du devis décomptés par portions finies, au cas où tout le complexe de travaux prévu dans les indicateurs des normes de devis a été exécuté (sauf le béton armé pour lequel les décomptes peuvent être faits séparément par armatures, coffrages et béton), y compris les cotes de frais généraux, de charges sociales et de bénéfices. Puisque cet indicateur ne se réfère qu'aux opérations effectivement finies et réceptionnées, il est tout naturel qu'il ne reflète pas l'activité complète des organisations de constructions. Il est, toutefois, l'indicateur de base de la production de construction parce qu'il comprend les réalisations confirmées aussi bien par le constructeur et le bénéficiaire, que par les organes financiers et bancaires de l'état. Dans la pratique courante, respectivement dans les documents de planification, dans les publications statistiques, etc., cet indicateur qui se trouve à la base des calculs du ruthme moyen de développement et qui fait l'objet de cette étude a reçu le nom de "PRODUCTION DE CONSTRUCTIONS-MONTAGE".

- le second indicateur exprimé en unités de valeur est la production de constructions-montage non terminée qui comprend deux éléments composants :

a) la valeur des articles du devis, dont on n'a pas exécuté tout le complexe des travaux prévu dans les indicateurs normaux du devis ;

b) la valeur des articles du devis, dont tout le complexe de travaux prévu dans les indicateurs normaux du devis a été exécuté mais n'a pas été réceptionné par le bénéficiaire, soit qu'il nécessite un supplément d'investissement parce que le montant du devis du travail a été dépassé, soit que le devis a été exécuté en l'absence d'un investissement (ouvert), à cause de l'insuffisance de documentation technique.

La différence entre la production de constructions-montage non terminée et les investissements consiste surtout en ce que la première catégorie se réfère à des opérations non terminées, tandis que la seconde se réfère à des objets non terminés.

- le troisième indicateur dans le domaine constructions-montage est la production globale, qui comprend tout le volume de travaux exécutés dans la période à analyser, comme résultat du travail actuel et du travail matérialisé dans l'activité de construction.

L'indicateur de la production globale (désigné par $P_{glob.}$) est calculé en ajoutant à la production terminée (P_t) la différence entre la production non terminée à la fin de la période (P_{n2}) et au début de la période (P_{n1}), suivant la formule :

$$P_{(glob)} = P_t + (P_{n2} - P_{n1})$$

De cette façon, l'indicateur de la production globale, dans les constructions-montage exprime le volume exécuté de la production, en unités de valeur, nécessaire pour déterminer le fonds de salaires admissible et le calcul de la productivité du travail.

C'est à la lumière de ces notions succintes que nous allons étudier le rythme moyen de développement de la production.

Dans la statistique socialiste, l'indice du rythme moyen de développement des phénomènes sociaux-économiques est l'un des principaux indices utilisés dans l'analyse des séries dynamiques. Cet indice sert à :

- caractériser synthétiquement l'accroissement d'un phénomène économique, d'une période à l'autre ;

- comparer le développement dans le temps de deux phénomènes similaires ;

- poursuivre la réalisation des plans de développement de l'économie nationale, etc., etc.

L'importance de cet indicateur impose l'élaboration d'une méthode scientifique de calcul, permettant de refléter aussi exactement que possible les phénomènes, tout en assurant la comparaison avec les rythmes moyens dans d'autres domaines d'activité socio-économique. L'effort est donc justifié, de la part des économistes et des statisticiens, d'établir des méthodes pour la détermination de cet indicateur, à la fois simples, comportant peu de calculs et surtout offrant d'incontestables avantages en ce qui concerne la précision des calculs. La littérature donne diverses méthodes pour le calcul de cet indice.

Dans cet article, après avoir rappelé l'usage de la moyenne géométrique, procédé élémentaire bien connu, nous examinerons plus particulièrement la méthode dite de la moyenne parabolique et ses diverses variantes (méthode directe et méthode globale).

I - LE CALCUL DU RYTHME MOYEN DE DEVELOPPEMENT FONDE SUR LA METHODE DE LA MOYENNE

On entend, en général, par rythme moyen un coefficient constant caractérisant globalement, dans une certaine mesure, l'accroissement de la production par unité de temps.

Si l'on admet que le développement du phénomène étudié puisse être assimilé à une progression géométrique, le paramètre θ caractérisant le rythme moyen sera défini par

$$\theta = \sqrt[n-1]{\frac{P_n}{P_1}}\ , \tag{1}$$

d'où le rythme moyen

$$R_m = 100(\theta - 1)\%$$

P_1 et P_n désignant respectivement le terme initial et le terme final de la série considérée de n années.

Le rythme moyen ainsi calculé ne dépend que des valeurs extrêmes P_1 et P_n : en calculant les rythmes moyens d'une série dynamique (n variant), chaque grandeur calculée ne dépendra que du dernier terme de la période considérée.

Pour éliminer, au moins partiellement cet inconvénient, diverses variantes ont été proposées par exemple la moyenne arithmétique des rythmes annuels successifs.

Certains auteurs [1] ont proposé de tenir compte des comparaisons des couples de valeurs équidistantes de la valeur médiane.

Pour une série d'un nombre impair de termes, soit 2n – 1, le terme médian étant exclu, on a alors :

$$\log \theta = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \log P_i - \sum\limits_{i=-1}^{-n} \log P_i}{\sum T_i} \tag{2}$$

$$T_i = -n\ ,\ (n-1)\ ,\ \ldots\ 0\ ,\ 1\ \ldots\ n.$$

Pour une série d'un nombre pair de termes, soit 2n, on évitera les calculs avec des valeurs fractionnaires, le milieu de la série étant entre les deux valeurs médianes, en posant

$$T'_i = 2T_i = -(2n+1)\ ,\ -(2n-1)\ \ldots\ -1\ ,\ +1\ ,\ \ldots\ (2n+1).$$

d'où

$$\log \theta = \frac{2\left[\sum\limits_{i=1}^{2n+1} \log P_i - \sum\limits_{i=-1}^{-(2n+1)} \log P_i\right]}{\sum |T'_i|} \tag{3}$$

Ces estimations, tenant compte de toutes les valeurs de la série, peuvent être considérées comme meilleures que celle fournie par la méthode de la moyenne géométrique.

II - METHODE DE LA MOYENNE PARABOLIQUE

Certains statisticiens et mathématiciens ont proposé, dès 1949, que le rythme moyen de développément soit calculé à l'aide de la moyenne parabolique, dans une forme adaptée [1] et [2]. Cette méthode, conçue comme la moyenne d'un polynôme d'un degré quelconque, tient compte, dans le calcul du rythme parabolique, de la somme des valeurs des termes de la série et de la valeur du terme initial.

La méthode parabolique consiste à considérer, au lieu des rythmes réels d'accroissement de la production dans les n unités de temps (d'habitude le mois ou l'année), un accroissement conventionnel constant, déterminé de façon que la production totale effective dans la période considérée soit égale à la production qu'on aurait obtenue si le rythme d'accroissement avait été constant. Autrement dit, au lieu des productions effectives, on considère les productions théoriques

$$P_0 \; ; \; P_0\,\theta = P_1 \; ; \; P_0\,\theta^2 = P_2 \; ; \ldots P_0\theta^n = P_n \; ;$$

En ce cas, le rythme moyen θ d'accroissement est déterminé à l'aide de l'équation suivante :

$$P_0 + P_0\theta + P_0\theta + P_0\theta + \ldots + P_0\theta = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n$$

En mettant P_0 en facteur commun, on obtient :

$$P_0(1 + \theta + \theta^2 + \ldots + \theta^n) = \sum_0^n P_i \, .$$

d'où l'on tire :

$$(1 + \theta + \theta^2 + \ldots + \theta^n) = \frac{\sum_0^n P_i}{P_0} \qquad (4)$$

Dans ce qui suit les diverses méthodes envisagées seront appliquées aux données ci-après (tableau n° 1)

Années	Investissements en construction-montage (en millions de lei)	
1954	6 328	
1955	7 046	
1956	8 382	45 468
1957	7 237	
1958	7 715	
1959	8 760	
1960	11 749	
1961	13 226	
1962	15 239	96 398
1963	16 981	
1964	18 899	
1965	20 304	

Dans ce tableau, on trouve par exemple, le volume des investissements pour les travaux de constructions-montage durant la période

1960-1965, l'année 1960 étant considérée comme base. Si la production de l'année 1960 est désignée par P_0 = 11.749 millions de lei, celle de 1961 par P_1 = 13.226 millions de lei, etc. jusqu'à l'année 1965 par P_5 = 20.304 millions de lei, alors, en appliquant la méthode de la moyenne parabolique, le rythme moyen de développement donnera, suivant la relation (4), le résultat suivant :

$$1 + \theta^1 + \theta^2 + \theta^3 + \theta^4 + \theta^5 = \frac{96.398}{11.749} = 8,205$$

d'où l'on déduit :

$$R_m = 12,44 \%$$

Remarquons que, dans cette période, la moyenne arithmétique des rythmes annuels est de 11,6 %, tandis que la moyenne géométrique monte à 11,5 %, c'est-à-dire qu'elles sont sensiblement égales.

La différence entre ces deux moyennes d'une part et la moyenne parabolique d'autre part est due à ce que la moyenne parabolique ne peut pas nous donner une approximation juste des séries qui représentent de grandes variations, surtout entre le premier terme de la série et les termes lui succédant. Or, c'est tout à fait le cas de la série analysée, qui représente la période de 1960-1965, puisqu'en 1960 la production marque 11.749 millions de lei, tandis que, durant les années suivantes, elle enregistre des variations assez sensibles parmi les accroissements annuels.

Pour remédier à ces inconvénients, Gh. Mihoc et Ch. Theiler [3] proposent une nouvelle méthode de calcul, qu'ils appellent méthode globale de calcul du rythme parabolique, qui tâche de réduire les erreurs dues à l'utilisation de la valeur initiale de la série dynamique. La méthode globale consiste en l'approximation du rythme moyen d'accroissement à partir d'une valeur initiale A, déterminée par la méthode des moindres carrés.

Bien qu'offrant des avantages considérables au point de vue de la précision des calculs et des résultats qu'elle fournit, cette méthode présente l'inconvénient de nécessiter un grand nombre d'opérations mathématiques et de calculs compliqués, fondés eux aussi sur des approximations.

Ci-après nous étudierons les rythmes paraboliques de développement des investissements dans le domaine des constructions-montage.

A. La méthode directe de calcul du rythme parabolique, fondée sur des groupements de termes de la série en réduisant au minimum les calculs avec des logarithmes.

B. La méthode globale de calcul du rythme parabolique (Mihoc-Theiler), fondée sur la méthode des moindres carrés.

A. <u>La méthode directe de calcul du rythme parabolique</u>

On fait les calculs, ainsi que nous l'avons vu, par la relation (4) :

$$(1 + \theta + \theta^2 + \theta^3 + \ldots + \theta^n) = \sum_0^n \frac{P_i}{P_0}$$

Cette relation peut offrir deux aspects, selon que le nombre de termes de la suite est pair (2m=n) ou impair (2m-1 = n). Chacun de ces cas sera étudié séparément.

A. 1. <u>Cas des séries constituées par un nombre pair de termes (2m=n)</u>

Dès le début, il faut remarquer que la relation (11) peut revêtir aussi la forme suivante :

$$P_o(1 + \theta + \theta^2 + \ldots \theta^{m-1}) + P_o\theta^m (i + \theta^2 + \theta^3 + \ldots \theta^{m-1}) = \sum_{i=o}^{2m-1} P_i \tag{5}$$

En appliquant la méthode envisagée ci-dessus aux deux moitiés de la série totale la relation (5) peut se décomposer en :

$$P_o(1 + \theta + \theta^2 + \ldots + \theta^{m-1}) = \sum_{i=o}^{m-1} P_i \tag{6}$$

$$P_o\theta^m(1 + \theta + \theta^2 + \ldots \theta^{m-1}) = \sum_{i=m}^{2m-1} P_i \tag{7}$$

où P_o représente la valeur théorique du terme initial.

En divisant (6) par (7), on obtient :

$$\theta^m = \frac{\sum_{i=m}^{2m-i} P_i}{\sum_{i=o}^{2m-i} P} \quad \text{ou} \quad \theta = \sqrt[m]{\frac{\sum_{m}^{2m-1} P_i}{\sum_{o}^{m-1} P_i}} \tag{8}$$

Calculons, par exemple, en vertu de la relation (8), le rythme de développement des investissements pour les travaux de constructions-montage dans la période de 12 ans (1954-1965) selon les données du tableau 1. De ce tableau il s'ensuit que

$$\sum_{m}^{2m-1} P_i = \sum_{6}^{11} P_i = 96.398 \; ; \; \sum_{o}^{m-i} P_i = \sum_{o}^{5} P_i = 45.468.$$

donc

$$\theta = \sqrt[6]{\frac{96.398}{45.468}} = 1,1334 \quad \text{et} \quad R_m = 13,34 \ \%$$

On constate que ce résultat est très voisin du rythme moyen de développement 13,49 %, qu'il eut été possible de calculer par la méthode de la sélection des termes équidistants de la série à nombre pair de termes. Rappelons que la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique des rythmes pour la même période (1954-1965) montent, respectivement à θ_g = 11,24 % et θ_a = 12,30 %, ce qui représente une différence sensible par rapport au résultat de la moyenne parabolique constituée par un nombre pair de termes.

En vue d'obtenir des résultats plus voisins de la moyenne géométrique et de la moyenne arithmétique des rythmes, pas trop éloignés pourtant des résultats fournis par la méthode de la sélection des termes équidistants de la série à nombre pair de termes, nous proposons d'uniformiser la série, par l'approfondissement des groupements. Ainsi, si les 12 termes de la série sont partages en 4 groupes, chacun comprenant 3 termes, les groupes impairs (1 et 3) forment, à leur tour, une suite et les groupes pairs (2 et 4) une autre suite ; en ce cas, il est à remarquer que le résultat obtenu est bien plus rapproché des rythmes mentionnés que dans le cas précédent.

Groupons, donc, les termes de la série de la période 1954-1965 en 4 groupes, conformément au tableau 2, suivant :

Groupe	Années	Vol. des investissements dans les travaux de constr. -montage				
		gr. impairs en millions	gr. pairs de lei			
1	1954, 1955 et 1956	21.756	-	0	21.756	61.970
2	1957, 1958 et 1959	-	23.712	1	40.214	
3	1960, 1961 et 1962	40.214	-	2	23.712	79.896
4	1963, 1064 et 1965	-	56.184	3	56.184	
	Total	61.970	79.896			
		série I	série II			

En introduisant les données correspondantes dans la relation (8), on obtient :

$$\theta = \sqrt[2]{\frac{79.896}{61.970}} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \text{où :} & \sum_{m}^{2m-1} P_i = \sum_{2}^{3} P_i = 79.896 \\ \text{et :} & \sum_{0}^{m-1} P_i = \sum_{0}^{1} P_i = 61.970. \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit

θ = 1,123 et le rythme moyen parabolique R_m = 12,3 %.

Il s'ensuit que le rythme parabolique est égal à la moyenne arithmétique des rythmes dans la même période (1954-1965) et supérieur d'environ 1 % à la moyenne géométrique.

A.2. Cas des séries formées d'un nombre impair de termes (2m - 1)

Dans le cas des séries dynamiques, constituées par un nombre impair de termes, la méthode directe pour le calcul du rythme moyen parabolique devient plus simple, puisqu'on peut se passer des logarithmes. Admettons que la série de 2 m+1 termes soit partagée en deux parties égales, en négligeant dans la première série le premier terme et dans la seconde série le dernier terme.

Ainsi, en négligeant le dernier terme dans la série P_n, on peut écrire, en se basant sur les principes mentionnés plus haut :

$$P_0(1 + \theta + \theta^2 + \theta^3 + \dots \theta^{m-1}) + P_0\theta^m(1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{m-1}) = \sum_{0}^{m-1} P_i + \sum_{m}^{2m-1} P_i$$

En portant l'expression $(1 + \theta + \theta^2 + \ldots + \theta^{m-1})$ en facteur commun, on obtient :

$$P_0 (1 + \theta)^m (1 + \theta + \theta^2 + \ldots + \theta^{m-1}) = \sum_0^{2m-1} P_i \tag{9}$$

Si, d'autre part, on néglige le premier terme P_0 de la série, la somme de la série deviendra :

$$P_1 (1 + \theta + \theta^2 + \ldots + \theta^{m-1}) + P_1 \theta^m (1 + \theta + \theta^2 + \ldots + \theta^{m-1}) = \sum_1^m P_i + \sum_{m+1}^{2m} P_i$$

En simplifiant par la substitution $P_1 = P_0 \theta$ et en portant en facteur commun l'expression $(1 + \theta + \theta^2 + \ldots \theta^n)$, on obtient :

$$P_0 \theta (1 + \theta^m) (1 + \theta + \theta^2 + \ldots + \theta^{m-1}) = \sum_1^{2m} P_i \tag{10}$$

En divisant la relation (10) par la relation (9) et en faisant les simplifications correspondantes, on obtient :

$$\theta = \frac{\sum_1^{2m} P_i}{\sum_0^{2m-1} P_i} \tag{11}$$

Par conséquent, si l'on calcule en vertu de la relation (11) le rythme de développement des investissements dans les travaux de constructions-montage durant la période de 1955-1965 (2m–1 = 9 ans et m = 5 ans), conformément au tableau 1, on pourra former les deux séries suivantes :

No. des années	Millions de lei
1	8.382
2	7.237
3	7.715
4	8.760
5	11.749
6	13.226
7	15.239
8	16.981
9	18.899
10	20.304
Total : $\sum_1^{2m} P_i$ = 128.492	

No. des années	Millions de lei
0	7.046
1	8.382
2	7.237
3	7.715
4	8.760
5	11.740
6	13.226
7	15.239
8	16.981
9	18.899
$\sum_0^{2m-1} P_i$ = 115.234	

Si l'on introduit les valeurs des sommes $\sum_1^{2m} P$ et $\sum_0^{2m-1} P_i$ dans la relation (11), on obtient pour la moyenne parabolique :

$$\theta = \frac{128.492}{115.234} = 1,120 \quad \text{et} \quad R_m = 12,0\ \%$$

Rappelons, pour comparer, que le rythme moyen, fondé sur la moyenne géométrique est, dans la période de 1955-1965, de 11,16 %, et la moyenne arithmétique des rythmes dans la même période est de 13,1 %.

B. Méthode globale de calcul du rythme parabolique

On a déjà montré que la méthode parabolique tient compte, dans une certaine mesure, de ce qui se passe au cours du développement rythmique de la production, c'est-à-dire qu'elle tient compte de la production initiale, aussi bien que de la production totale, au cours de la période entière. Elle présente, cependant, quelques petits inconvénients. Ainsi, en admettant qu'on part d'une même production initiale, tout en considérant deux modes différents de développement du processus de production, mais en réalisant sur l'ensemble du parcours le même volume de produits, la méthode parabolique se heurtera à la difficulté de présenter le même rythme théorique, bien qu'il soit évident que la production ne s'est pas développée au même rythme tout le long du parcours.

Pour remédier à cet inconvénient, Mihoc et Gh. Theiler [3] proposent une nouvelle méthode de calcul sous le nom de méthode globale du rythme parabolique.

Ils partent de l'hypothèse que si, au lieu des productions réelles, on considère les productions théoriques en progression géométrique, afin de pouvoir établir un coefficient du rythme moyen, caractérisant dans une certaine mesure le processus considéré de manière qu'il puisse être comparé à d'autres processus, les productions théoriques devront, logiquement, être choisies telles qu'elles soient aussi voisines que possible des productions réelles. Autrement dit, à la place du terme initial P_0, on devrait considérer une production calculée A et, à la place d'un θ calculé comme ci-dessus, on devrait considérer un θ tel que les productions calculées $P_k = A\,\theta^k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ fussent, dans leur totalité, aussi rapprochés que possible des productions effectives P_k.

La méthode usuelle, permettant d'obtenir une pareille approximation globale optimale, est la méthode des moindres carrés. Selon cette méthode, les indicateurs A et θ doivent pouvoir être déterminés de façon que l'expression

$$(A - P_0)^2 + (A\theta - P_1)^2 + (A\theta^2 - P_2)^2 + \ldots + (A\theta^k - P_k)^2 + \ldots + (A\theta \ - P_n)^2$$

soit minimale.

On sait que l'expression minimale est obtenue en annulant les dérivées par rapport à A et à θ.

Si l'on prend comme base le terme général $\sum_0^n (A\theta^k - P_k)^2$ et en annulant la dérivée par rapport à A, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \theta^k (A\theta^k - P_k) = 0 \tag{12}$$

De même, en dérivant par rapport à θ, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} K\theta^{k-1}(A\theta^k - P_k) = 0 \tag{13}$$

En développant les deux relations (12) et (13) on peut écrire :

$$A(1 + \theta^2 + \theta^4 + \theta^6 + \ldots + \theta^{2k} + \ldots + \theta^{2n}) = P_o + P_1 \theta + \ldots P_k \theta^k + \ldots + P_n \theta^n \qquad (12')$$

et

$$A(\theta + 2\theta^3 + 3\theta^5 + \ldots + K\theta^{2k-1} + \ldots + n\theta^{2n-1}) = P_1 + 2P_2\theta + \ldots KP_k\theta^{k-1} + \ldots + nP_n\theta^{n-1} \qquad (13')$$

En éliminant A dans ces relations, on obtient une équation en θ :

$$f(\theta) = (\theta + 2\theta^3 + 3\theta^4 + \ldots + K\theta^{2k-1} + \ldots + n\theta^{2n-1})(P_o + P_1\theta + P_2\theta^2 + \ldots + P_k\theta^k + \ldots + P_n\theta^n) - (1 + \theta^2 \ldots + \theta^{2n})(P_1 + 2P_2\theta + 3P_3\theta^2 + \ldots + KP_k\theta^{k-1} + \ldots + nP_n\theta^{n-1}) = 0 \qquad (14)$$

En développant le polynôme, on peut écrire :

$$f(\theta) = P_{n-1}\theta^{3n-2} + (2P_{n-2} - P_n)\theta^{3n-3} + 3P_{n-3}\theta^{3n-4} + (4P_{n-4} + P_{n-2} - 2P_n)\theta^{3n-5} + (5P_{n-5} + 2P_{n-3} - P_{n-1})\theta^{3n-6} + (6P_{n-6} + 3P_{n-3} - 3P_n)\theta^{3n-7} + \ldots + \ldots - 3P_3\theta^2 - (2P_2 - P_o)\theta - P_1 = 0. \qquad (15)$$

L'équation (15) étant très compliquée et nécessitant par conséquent des calculs extrêmement laborieux qui ne sauraient être réalisés qu'au moyen d'un calculateur électronique, on pourrait admettre, sous certaines conditions, la possibilité de la remplacer par une autre qui ne contienne que les principaux termes de l'équation et qui ait une racine dont la valeur soit voisine de la racine exacte. On sait, en effet, que la somme des termes de la série est

$$1 + \theta^2 + \theta^4 + \ldots + \theta^{2n} = \frac{\theta^{(2n+2)} - 1}{\theta^2 - 1} \qquad (16)$$

Par dérivation, on obtient :

$$(\theta + 2\theta^3 + \ldots + n\theta^{2n-1}) = \frac{n\theta^{(2n+3)} - (n+i)\,\theta^{(2n+1)} + \theta}{(\theta^2 - i)^2} \qquad (17)$$

En substituant les valeurs des expressions $(1 + \theta^2 + \theta^4 + \ldots + \theta^{2n})$ et $(\theta + 2\theta^3 + \ldots + n\theta^{2n-1})$ tirées des relations (16) et (17), dans la relation (14), on obtient :

$$f_1(\theta) = n\theta^{2n+3} - (n+1)\theta^{2n+1} + \theta(P_o + P_1 + \ldots P_{n-1}\theta^{n-1} + \ldots + P_n\theta^n) - \frac{\theta^{2n+2} - i}{\theta^2 - 1}(nP_n\theta^{n-1} + (n-1)P_{n-1}\theta^{n-2} + \ldots + P_1) = 0 \qquad (18)$$

La relation (18) peut aussi revêtir la forme :

$$f_1(\theta) = [n\theta^{2n+3} - (n+i)\theta^{2n+1} + \theta] \,.\, [P_n\theta^n + P_{n-1}\theta^{n-1} + \ldots + P_o] - [\theta^{2n+4} - \theta^{2n+2} - \theta^2 + i] \,.\, [nP_n\theta^{n-1} + n-i]\,P_{n-1}\theta^{n-2} + \ldots + P_1 = 0. \qquad (19)$$

La relation (19) est équivalente à la relation (15), dont elle ne diffère qu'en ce que, dans la relation (19) on a introduit une racine positive supplémentaire $\theta = 1$, étrangère à la relation (15).

Si $\frac{1}{\theta^{2n+1}}$ est un nombre suffisamment petit, à la relation (19) on pourra substituer l'équation suivante :

$$f_1(\theta)=[n\theta^2-(n+1)]\ [P_n\cdot\theta^n+P_{n-1}\theta^{n-1}+\ldots+P_0]-[\theta^3-\theta]\ [nP_n\theta^{n-1}+(n-i)P_{n-1}\theta^{n-2}+\ldots+ +P_1] = 0. \tag{20}$$

La relation (20) a été obtenue en écartant θ du premier facteur du premier terme, ainsi que θ^2 et 1 du premier facteur du second terme de l'équation (19), et en supprimant le facteur commun θ^{2n+1}.

Cette équation, ordonnée suivant les puissances décroissantes de θ, peut être écrite :

$$f_1(\theta) = P_{n-1}\theta^{n+1} + (2nP_{n-2} - P_n)\theta^n+(3P_{n-3} - 2P_{n-1})\theta^{n-1} + \ldots + [(n-i)P_1 -(n-2)P_3]\theta^3 + + [nP_0 - (n-i)P_2]\theta^2 - nP_1\theta - (n+i)P_0 = 0. \tag{21}$$

Remarquons que l'équation fondamentale (15) est de degré (3n-2), tandis que l'équation (21) est de degré (n+1), ce qui signifie dans certains cas une simplification des calculs.

Remarquons, également, que la relation (15) ne garde son utilité que dans le cas d'une production continuellement ascendante - d'accord, d'ailleurs, avec le développement de la production socialiste - ce qui suppose que $P_0 < P_1 < P_2 \leqslant \ldots \leqslant P_n$. Dans ces conditions, la relation (15) doit avoir une racine positive, et une seule ; cette racine sera supérieure à 1. Ceci sera démontré de la façon suivante :

Remarquons, au préalable que, pour $\theta = 0$, la relation (15) devient :

$$f(0) = - P_1 < 0$$

et que pour $\theta = 1$, la relation (14) devient

$$f(i) = (1+2+3+\ldots+n)\ (P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_n) - (1+1+\ldots+i)(P_1 + 2P_2 + \ldots + KP_k + \ldots nP_n)$$

$$f(1) = (n+1) \left[\frac{n}{2}\ (P_0 + P_1 + \ldots + P_n) - (P_1 + 2P_2 + \ldots + nP_n)\right]$$

ou :

$$f(1) = (n+1) \left[\frac{n}{2}\ (P_0 - P_n) + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\ (P_1 - P_{n-1}) + \ldots\right] \tag{22}$$

qui, dans l'hypothèse d'une série croissante est visiblement négative :

$$f(1) < 0$$

D'autre part :

$$f(+\infty) = +\infty$$

Il s'ensuit que la relation $f(\theta) = 0$ admet au moins une racine supérieure à 1.

En reprenant la relation (15) qui permet de calculer le rythme de développement de la production conformément à la méthode globale du rythme parabolique, nous calculerons le rythme des investissements dans les constructions-montage durant la période du plan sexennal (1960-1965), en nous servant des données du tableau précédent.

En appliquant la méthode des moindres carrés, selon la relation (15) et en prenant P_0 égal au volume des investissements de l'année 1960, P_1 égal au même volume de 1961 et ainsi de suite, jusqu'à la fin du sexennal, P_5 égal aux investissements de 1965, nous devrons résoudre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} f(\theta) = {} & P_4\theta^{13} + (2P_3 - P_5)\theta^{12} + 3P_2\theta^{11} + (4P_1 + P_3 - 2P_5)\theta^{10} + (5P_0 + 3P_2 - P_4)\theta^9 + \\ & + 3(P_2 - P_5)\theta^8 + (4P_0 + P_2 - 2P_4)\theta^7 + (2P_1 - P_3 - 4P_5)\theta^6 + 3(P_0 - P_4)\theta^5 + \\ & + (P_1 - 2P_3 - 5P_4)\theta^4 + (2P_0 - P_2 - 4P_4)\theta^3 - 3P_3\theta^2 + (P_0 - 2P_2)\theta - P_1 = 0 \end{aligned}$$

En substituant à $P_0, P_1, P_2, \dots, P_5$ les valeurs respectives du tableau 1, et en résolvant cette équation, on a obtenu :

$$\theta = 1{,}1262 \quad \text{et} \quad Rm = 12{,}62\ \%.$$

Ces résultats sont assez voisins des résultats obtenus par la moyenne géométrique et par la moyenne arithmétique des rythmes annuels dans la période du sexennal (1960-1965), à savoir respectivement, 11,5 % et 11,6 %.

Puisque le calcul du rythme moyen de développement de la production a été fondé sur l'hypothèse de l'alignement de la production réelle suivant une ligne théorique de développement uniformément croissant, il devient nécessaire d'examiner le mode de développement de la production réelle dans la période 1955-1965, par rapport à la ligne théorique de développement uniformément croissant. Ceci se réduit à l'analyse de la structure interne de la série réelle par rapport à la série théorique et à mesurer les écarts des termes de la série réelle par rapport aux termes de la série théorique uniformément croissante. Les dimensions, respectivement les valeurs de ces écarts sont mesurées à l'aide du "coefficient de rythmicité" où est reflétée la structure interne de la série. Dans notre cas, nous calculerons le coefficient du rythme suivant la méthode proposée dans notre cours de statistique à la Faculté de Constructions Civiles (1954-1958) à Bucarest, fondée sur les écarts des investissements effectifs, annuels, cumulés, par rapport à la production théorique, annuelle, uniformément croissante, cumulée elle-même (1). Cela nous permettra de faire une comparaison juste entre l'indice du rythme moyen de développement des investissements dans le domaine des constructions-montage et le coefficient de rythmicité des investissements effectifs, représenté par l'écart des investissements effectifs par rapport à la courbe théorique uniformément croissante des investissements.

----

(1) La manière de calculer l'indice de rythmicité de la production a donné lieu ces dernières 10-15 années à de nombreuses discussions et propositions dans la littérature technique, chez nous et à l'étranger, sans qu'on se soit mis d'accord sur une solution unique.

La relation algébrique de la courbe théorique uniformément croissante des investissements cumulés sera déduite de l'hypothèse suivante :

Supposons que le volume annuel des investissements effectivement réalisés soit représenté par les valeurs q_1, q_2, q_3, ... , q_n et que le volume de ces mêmes investissements, cumulés chaque année, soit représenté par Q_1, $Q_2 \ldots Q_n$.

D'autre part, la moyenne géométrique des investissements dans la période de 1955-1965 est représentée par θ.

Par conséquent, les investissements théoriques uniformément croissants, cumulés jusqu'à la n-ème année seront égaux à

$$q_1 + q_1\theta + q_1\theta^2 + \ldots + \ldots + q_1\theta^{n-1} \tag{23}$$

ce que l'on peut aussi exprimer par :

$$q_1 + q_1(\theta + \theta^2 + \theta^3 + \ldots + \ldots + \theta^{n-1}) \tag{24}$$

La somme entre paenthèses est :

$$S = \theta + \theta^2 + \theta^3 + \ldots + \ldots \theta^{n-1} = \theta \frac{(\theta^{n-1} - 1)}{\theta - 1} \tag{25}$$

L'expression (24) s'écrit :

$$q_1 + q_1\theta \frac{(\theta^{n-1} - 1)}{\theta - 1} \tag{26}$$

L'expression (26) représente, donc, la production cumulée uniformément croissante jusqu'à la n-ème année. L'écart absolu des investissements effectivement réalisés, cumulés par rapport à la production théorique uniformément croissante, elle aussi cumulée, sera fournie par l'expression algébrique

$$\sum_1^n \left| Q_n - \left(q_1 + q_1\theta \frac{(\theta^{n-1} - 1)}{\theta - 1}\right) \right| \tag{27}$$

Finalement, le coefficient de rythmicité des investissements K, représentant, en fait, la valeur totale des écarts des investissements annuels, effectivement réalisés, cumulés par rapport à la ligne théorique uniformément croissante (cumulée), est le rapport entre la somme des écarts absolus et le total des investissements uniformément croissants, cumulés dans la période considérée. Par conséquent :

$$K = \frac{\sum_1^n \left| Q_n - \left(q_1 + q_1\theta \frac{\theta^{n-1} - 1}{\theta - 1}\right) \right|}{\sum_1^n \left(q_1 + q_1\theta \frac{\theta^{n-1} - 1}{\theta - 1}\right)} \tag{28}$$

Pour calculer facilement la formule (28), on recommande de faire un tableau comprenant les données numériques correspondantes (θ, Q_n, $q_n . \theta^{n-1}$, etc. .. Or la valeur de θ, qui est aussi bien la moyenne géométrique que la raison de la progression géométrique, est égale à $\theta = 1,1116$ $\left(\theta = \frac{20304}{7046} = 1,1116\right)$. Pour le calcul des investissements uniformément croissants, on a pris, afin de simplifier les calculs, $\theta = 1,112$. Les autres données se trouvent au tableau ci-dessous :

Années	Investissements effectifs dans le domaine des constructions-montage				Investissements théoriques uniformément croissants		Ecarts absolus
	annuels			cumulés	annuels	cumulés	
	n	q_n		Q_n	$q_n.\theta^{n-1}$		(col. 3 - col. 5)
(1)		(2) millions de lei	%	(3) millions de lei	(4) millions de lei	(5) millions de lei	(6) millions de lei
1955	1	7046	-	7046	7046	7046	-
56	2	8382	+ 18,9	15428	7835	14881	547
57	3	7237	- 13,7	22665	8713	23594	929
58	4	7715	+ 6,6	30380	9689	33283	2903
59	5	8760	+ 13,5	39140	10774	44057	4919
1960	6	11749	+ 34,4	50889	11981	56038	6149
61	7	13226	+ 12,6	64115	13323	69361	5246
62	8	15239	+ 15,2	79354	14815	84176	4822
63	9	16981	+ 11,4	96335	16474	100650	4315
64	10	18899	+ 11,3	115234	18319	118969	3735
1965	11	20304	+ 7,5	135538	20371	139340	3802
Total		135538	+ 13,1	135538	139340	691395	37365

La colonne 6 du tableau montre que la somme des écarts absolus est

$$\sum_1^{11} \left| Q_n - \left(q_1 + q_1\theta \frac{\theta^{n-1} - 1}{\theta - 1}\right)\right| = 37365$$

La colonne 5 montre, d'autre part, que la somme des investissements annuels uniformément croissants, cumulés est :

$$\sum_1^{11}\left(q_1 + q_1\theta \frac{\theta^{n-1} - 1}{\theta - 1}\right) = 691395$$

d'où :

$$K = \frac{37365}{691395} = 0,0541 \quad \text{et} \quad K_{\%} = 5,41\ \%$$

Il s'ensuit que la courbe des investissements annuels, effectifs, dans le domaine des constructions-montage, durant l'intervalle de 1955-1965 ne s'est écartée qu'assez peu de la courbe des investissements annuels, uniformément croissants. Le coefficient de rythmicité atteignant à peine le niveau de 5,41 %, reflète, d'une part, un accroissement presqu'uniforme des termes à l'intérieur de la série et, d'autre part, l'exactitude des résultats obtenus, ainsi que la justification des procédés de calcul du rythme moyen de développement par les méthodes exposées ci-dessus, à savoir : la méthode de la moyenne parabolique de la série formée d'un nombre impair de termes avec $\theta = 1,120$ et $R_m = 12\ \%$; la méthode de la moyenne géométrique avec $\theta = 1,116$ et $R_m = 11,6\ \%$; la méthode globale de calcul du rythme parabolique avec $\theta = 1,1262$ et $R_m = 12,62\ \%$.

CONCLUSIONS

Nous avons montré ci-dessus que, pour caractériser le rythme moyen de développement des phénomènes sociaux-économiques, on utilise des méthodes et des procédés différenciés, en fonction des particularités des phénomènes étudiés. Nous avons étudié deux méthodes pour le calcul du rythme moyen de développement, à savoir la méthode de la moyenne géométrique et la méthode de la moyenne parabolique avec leurs diverses variantes. Nous avons fait ressortir les avantages et les inconvénients de chacune de ces méthodes, que nous avons accompagnées par une analyse de la corrélation entre le coefficient de rythmicité de la production et l'indice du rythme moyen de développement, ainsi que par quelques propositions pour l'amélioration de la méthode de la moyenne parabolique au cas où la série possède un nombre pair de termes.

En ce qui concerne la méthode de la moyenne géométrique pour le calcul du rythme moyen de développement, nous avons montré qu'elle présente un gros inconvénient, par suite du fait que, son calcul ne tient compte que des termes initial et final de la série, sans tenir aucun compte de ce qui arrive sur le parcours. En d'autres termes, la méthode de la moyenne géométrique n'est sensible qu'aux niveaux du premier et du dernier terme de la série dynamique, tout en ignorant complètement la structure interne de la série, c'est-à-dire les termes intermédiaires. C'est ce qui a déterminé l'auteur soviétique I. PISAREV [4] à démontrer que, dans le cas des oscillations brusques des indices économiques - ce qui, d'ordinaire, est le cas des crises dans l'économie capitaliste - l'application de la méthode de la moyenne géométrique au calcul du rythme moyen de développement du phénomène économique considéré devient illusoire et dépourvue de sens.

En tenant compte de dertaines particularités et restrictions, quelques auteurs - parmi lesquels nous nous trouvons aussi - admettent le calcul du rythme moyen de développement par la méthode géométrique, au cas où les coefficients du rythme présentent, en général, une certaine stabilité, c'est-à-dire correspondent soit à un accroissement continu, soit, au contraire à une diminution continue. Ceci revient à dire que la moyenne géométrique n'est efficacement applicable, que si le rythme du mouvement est peu variable d'une année à l'autre.

En vue d'améliorer la méthode de calcul du rythme moyen de développement à l'aide de la moyenne géométrique, l'étude procède à l'analyse de plusieurs variantes d'amélioration, en calculant la moyenne, soit en partant de deux valeurs sélectionnées dans la série, soit en sélectionnant les valeurs équidistantes par rapport à la médiane de la série, que le nombre de termes qu'elle possède soit pair ou impair. On a fait ressortir ici une certaine supériorité de ces variantes sur la méthode de la moyenne géométrique, en considérant que les résultats obtenus, fondés sur toutes les valeurs de la série, sont plus voisins de la réalité, tandis que la moyenne géométrique n'est fondée que sur les termes, initial et final, de la série.

C'est afin de remédier aux inconvénients de la moyenne géométrique signalés ci-dessus, que la méthode de la moyenne parabolique a été introduite pour le calcul du rythme moyen de développement. Malheureusement, cette méthode présente, à son tour, un certain inconvénient, du à ce que la valeur de θ n'est établie - ainsi que nous l'avons déjà mentionné - que par des calculs approximatifs. Elle représente quand même un pas en avant sur la moyenne géométrique, puisqu'elle tient un peu compte de ce qui se passe sur tout le parcours, aussi bien que du premier terme de la série, (ce qui n'est pas le cas de la moyenne géométrique).

Une autre anomalie, présentée par la moyenne géométrique - aussi bien que par la moyenne arithmétique, d'ailleurs - est que le rythme moyen de développement de la production, calculé sur la foi de ces deux moyennes pour deux séries dynamiques, bien que différentes par leur mode de développement, conduit toutefois à un résultat identique, tandis que la méthode de là moyenne parabolique met justement en évidence le rythme moyen de développement, dans chacune de ces séries.

Nous allons en donner, un exemple emprunté à A. FRODA [5], qui suppose que la production en tonnes d'un certain produit, durant une période de 5 années, est exprimée par deux séries parallèles, avec la mention que la production des deux séries dans la première et la dernière année du quinquennal est de même valeur, respectivement de 10000 et 24024 tonnes. Calculons le rythme moyen du développement par les trois moyennes connues (arithmétique, géométrique et parabolique) :

Série A	tonnes	Rythme d'une année à l'autre	Série B	tonnes	Rythme d'une année à l'autre
P_0	10000	-	P_0	10000	-
P_1	11000	1,1 %	P_1	14000	1,4 %
P_2	13200	1,2 %	P_2	18200	1,3 %
P_3	17160	1,3 %	P_3	21840	1,2 %
P_4	24024	1,4 %	P_4	24024	1,1 %
Total	75384		Total	88064	

D'où l'on déduit :

$$P = \sum_{i=o}^{4} P_i = 75384 \quad \text{et} \quad P = \sum_{i=o}^{4} P_i = 88064$$

La moyenne arithmétique des rythmes annuels (représentant l'accroissement de la production d'une année à l'autre) est, pour les deux séries A et B égale à :

$$\theta_a = \frac{1,1+1,2+1,3+1,4}{4} = 1,25$$

d'où le rythme R_a = +25 %.

A son tour, la moyenne géométrique est, elle aussi, égale pour les deux séries A et B :

$$\theta_g = \sqrt[4]{\frac{24024}{10000}} = \sqrt[4]{1,1 \times 1,2 \times 1,3 \times 1,4} = 1,245$$

et R_a = 24,5 %

6

Tandis que la méthode de la moyenne parabolique fournit les résultats suivants :

- pour la série A, θ = 1,206
- pour la série B, θ = 1,285

La méthode de la moyenne parabolique présente néanmoins un inconvénient dû à ce que le rythme moyen de développement, calculé par cette méthode ne dépend pas seulement de la somme des niveaux de tous les termes de la série dynamique, mais aussi du niveau du premier terme, auquel on accorde ainsi une préférence injustifiée. Selon cette méthode, le niveau du rythme moyen est proportionnel à la somme des termes de la série et inversement proportionnel à la valeur du premier terme. Il est, par conséquent, facile à remarquer que s'il y a de grosses différences entre la valeur du premier terme et les autres valeurs de la série, le rythme moyen sera respectivement augmenté ou diminué.

Bien plus, si l'on considère deux façons différentes de développement du processus de production, tout en ne réalisant sur l'ensemble du parcours que le même volume de production, la méthode parabolique se heurtera à la difficulté de présenter le même rythme théorique, malgré qu'il soit évident que la production sur le parcours ne s'est pas développée dans le même rythme.

Pour remédier à cette insuffisance, Gh. MIHOC et Gh. THEILER [3] proposent d'utiliser la méthode globale pour le calcul du rythme parabolique. Cette méthode, tout en offrant d'incontestables avantages en ce qui concerne la précision des résultats, requiert malheureusement un grand nombre de calculs fondés, d'ailleurs, sur des approximations. Cette étude fait ressortir les avantages de leur méthode, en se servant en outre du coefficient de rythmicité de la production, qui met en évidence, simultanément, la structure interne de la série.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. KARASEV - K voprosii ob iscislenii spednegodovîh tempovrosta naturinovo hozeaistva, Vestnik statistiki, N° 2/1949.

[2] A. FRODA - Numéros indices cumulatifs. Annal. de l'Académie de Roumanie, III-1949.

[3] Gh. MIHOC et Gh. THEILER - Sur le calcul du rythme moyen de développement de la production par la méthode de la moyenne parabolique. Rev. Statist. 1/1963.

[4] I. PISAREV - Nektorie voprosii teorii statistiki, Voprosi Economiki, N° 7/1948.

[5] V.P. KOVES - Sztatisztikai Szemle, Budapest, 1957, N° 4 et 5.

[6] I. MARINESCU - Méthodes pour déterminer le rythme moyen de développement. Revista Statistica, Bucarests N° 5/1964.