

F. VROOMEN

Un exemple de chaîne de Markov dans l'industrie textile

Revue de statistique appliquée, tome 14, n° 2 (1966), p. 55-84

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1966__14_2_55_0

© Société française de statistique, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN EXEMPLE DE CHAÎNE DE MARKOV DANS L'INDUSTRIE TEXTILE

F. VROOMEN

Ingénieur A.I.T.V.

(Chercheur de Centexbel au Laboratoire A. PELTZER, VERVIERS)

INTRODUCTION

Dans le domaine de la filature des fibres textiles, la carde, en tant qu'une des premières machines du processus de transformation, joue un rôle très important : la matière qui se présente en touffes à l'entrée de la machine en sort sous forme de ruban (l'on assiste donc à un passage du discontinu au continu). En outre, l'on demande à la carde de jouer le rôle d'une machine mélangeuse (ainsi que d'autres rôles, secondaires vis-à-vis de la question traitée ici).

Au cours des vingt dernières années, des travaux théoriques et expérimentaux ont amené à concevoir le processus de la carde sous forme probabiliste (la bibliographie essentielle est rapportée à la réf. 1).

C'est à F. Monfort que l'on doit cependant le pas décisif qui a consisté à rattacher le processus de la carde au vaste ensemble des processus stochastiques et ceci, en proposant, pour ce processus, un modèle en chaîne de Markov, ce qui lui a permis d'obtenir une première série de résultats importants concernant le fonctionnement de la carde (réf. 1).

Dans un second stade, F. Monfort et l'auteur de la présente communication, en utilisant les techniques du calcul matriciel (réf. 2), ont appliqué la théorie à l'étude de la formation du ruban de carde.

Dans le présent travail, le développement de la théorie est poursuivi et complété, les différentes distributions de probabilité caractérisant le fonctionnement de la carde sont déduites systématiquement et une solution approchée est obtenue pour la distribution du temps de transit des fibres dans la machine, distribution étroitement liée à la solution du problème de l'obtention de la régularité théorique du ruban de carde ainsi qu'à l'étude du mélange des fibres réalisé par la machine.

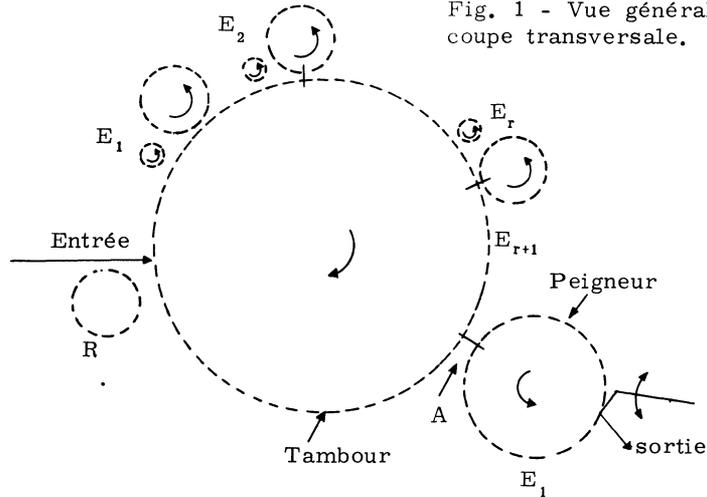
Les résultats obtenus suggèrent, par ailleurs, l'utilisation du modèle proposé par F. Monfort, pour l'étude d'autres machines. Un exemple, tiré du domaine de la préparation des engrais, sera traité ci-dessous.

1 - PROCESSUS DE LA CARDE

1.1 - Description sommaire de la carde à un tambour (laine peignée)

La carde est représentée schématiquement en coupe transversale, à la figure 1. Elle se compose essentiellement d'une série de cylindres

Fig. 1 - Vue générale en coupe transversale.



dont les axes sont parallèles entre eux et dont la surface latérale est pourvue d'aiguilles ou dents (nombre par unité de surface et finesse variables).

La cardé est alimentée au moyen d'une chargeuse-peseuse suivie d'un "avant-train" (non représentés sur la figure) dont la fonction (ou-
vraison) est de diviser les touffes de matière en touffes plus petites ou mèches qui sont présentées, par un rouleau transporteur R, à l'action de la cardé proprement dite.

Les mèches ainsi présentées sont happées par les aiguilles (inclonnées dans le sens de la marche) du tambour, cylindre de diamètre important (1300 mm) et tournant à vitesse élevée (120 tr/min). Emportées dans la rotation du tambour, les fibres sont présentées ensuite sous une première paire de cylindres dont le premier est appelé dépouilleur et le second travailleur.

Le travailleur a un diamètre nettement plus petit (235 mm) que le tambour et tourne à vitesse très sensiblement plus faible (15 tr/min). La surface du travailleur est recouverte d'aiguilles disposées de telle manière (fig. 2) que, compte-tenu de sa faible vitesse de rotation, il tend à arrêter les fibres que lui présente le tambour et à les emporter dans son mouvement. C'est donc entre tambour et travailleur que se produit la désagrégation des mèches et le point de contact tambour-travailleur a reçu le nom de point cardant.

Le dépouilleur, cylindre de diamètre plus petit (110 mm) que le travailleur, tourne à vitesse plus élevée (430 tr/min) et sa surface est recouverte d'aiguilles disposées de telle manière (fig. 2) qu'il emporte la matière que lui présente le travailleur pour la ramener sur le tambour qui la présente à nouveau au point cardant. Les fibres sont ainsi soumises successivement à l'action d'un certain nombre de points cardants et aboutissent finalement au point A (fig. 1) où elles subissent l'action d'un cylindre appelé peigneur.

Le peigneur a un diamètre plus élevé (820 mm) que celui d'un travailleur et tourne très lentement (7,4 tr/min). La disposition relative des aiguilles du tambour et du peigneur est semblable à celle du tam-

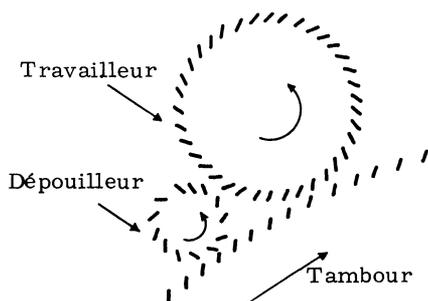


Fig. 2 - Disposition des aiguilles sur les divers organes.

bour et d'un travailleur et le mode d'action du peigneur est similaire à celui d'un travailleur : il emporte une fraction de la matière qui lui est présentée. Mais, ici, une différence essentielle : les fibres emportées par le peigneur sortent définitivement de la carde (sous forme de voile continu) via un peigne oscillant qui dépouille la surface du peigneur de façon parfaite, tandis que les fibres qui échappent au peigneur sont réalimentées à l'arc entier des travailleurs. C'est le phénomène très important de recyclage.

Si l'on considère donc un ensemble de fibres alimentées simultanément (mèche), le résultat final de l'action de la carde va être la séparation des fibres par désagréations multiples de la mèche et leur étalement, dans le temps, à la sortie, par l'intervention des retards apportés par les ramassages des travailleurs et les recyclages. Chaque fibre qui pénètre dans la carde est donc susceptible de subir des évolutions fort variées avant sa sortie.

Et, en définitive, l'étude du fonctionnement de la carde se ramène d'abord à l'étude des cheminements possibles des fibres avant leur absorption par le peigneur.

Mais pour résoudre ce problème, l'observation empirique ne suffit pas, il faut faire un pas de plus, mais décisif : élaborer un modèle mathématique de la carde.

1.2 - Modèle probabiliste de la carde

1.2.1 - Hypothèse

L'étude expérimentale de l'action d'un travailleur T_i donné ou du peigneur montre que, en régime, le travailleur ou le peigneur emportent, par unité de temps, dans des conditions données du fonctionnement, une quantité de fibres qui est une fraction constante p_i ou p de la quantité qui se présente, par unité de temps, au point cardant i , ou au point de contact tambour-peigneur.

Cette fraction, (comprise entre 0 et 1) a reçu le nom de pouvoir de ramassage du travailleur (ou du peigneur).

Le comportement ainsi constaté suggère alors l'hypothèse suivante formulée il y a vingt ans par J. Martindale [3] :

- En un point cardant ou au contact tambour-peigneur, il existe, pour une fibre qui s'y présente, une probabilité p_i (ou p) définie d'être emportée par le travailleur (ou le peigneur) et cette probabilité

est précisément égale au pouvoir de ramassage du travailleur (ou du peigneur). L'on suppose, en outre, que cette probabilité p_1 (ou p) est indépendante de l'évolution déjà subie par la fibre antérieurement.

Soulignons l'intérêt de l'hypothèse adoptée : l'action complexe du travailleur ou du peigneur, fonction de la vitesse, de l'écartement, de la garniture est résumée synthétiquement par un seul paramètre assimilé à une probabilité et, de ce fait, susceptible d'un traitement mathématique.

1.2.2 - Modèle de Monfort

Il restait cependant à donner, du processus de la cardé, une image claire et précise, susceptible de servir de support aux développements théoriques.

C'est alors que F. Monfort [1] a proposé une représentation remarquablement simple et féconde du processus de la cardé.

L'on introduit d'abord la notion d'état occupé par une fibre :

- une fibre qui se trouve entre le $(i - 1)^e$ et le $(i)^e$ travailleur sur le $(i)^e$ travailleur, sur son dépouilleur associé ou sur le tambour entre les deux travailleurs) occupe, par définition, l'état E_i (transitoire)

- une fibre emportée par le peigneur passe dans l'état E_n (état absorbant puisque la fibre sort de la cardé).

Les pouvoirs de ramassage deviennent alors des probabilités de transition d'un état à un autre état, et dans ces conditions, le processus de la cardé peut être caractérisé par une matrice stochastique dont les éléments sont les probabilités de transition et qui est caractéristique d'un processus en chaîne de Markov finie, homogène, d'ordre 1.

Matrice de la cardé à 1 tambour et r travailleurs

	E_1	E_2	E_3	...	E_i	E_{i+1}	...	E_r	E_{r+1}	E_n
E_1	p_1	q_1	0	...	0	0	...	0	0	0
E_2	0	p_2	q_2	...	0	0	...	0	0	0
E_3	0	0	p_3	...	0	0	...	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
E_i	0	0	0	...	p_i	q_i	...	0	0	0
E_{i+1}	0	0	0	...	0	p_{i+1}	...	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
E_r	0	0	0	...	0	0	...	p_r	q_r	0
E_{r+1}	q	0	0	...	0	0	...	0	0	p
E_n	0	0	0	...	0	0	...	0	0	1

Partant de l'état E_1 , la fibre lorsqu'elle se présente au premier point cardant a deux possibilités :

- une transition $E_1 \longrightarrow E_1$ (probabilité p_1)
- une transition $E_1 \longrightarrow E_2$ (probabilité $q_1 = 1 - p_1$)

Si la fibre subit la transition $E_1 \longrightarrow E_1$, les mêmes deux possibilités se présentent à nouveau.

Si la fibre passe en E_2 , deux transitions à nouveau deviennent possibles : $E_2 \longrightarrow E_2$ (probabilité p_2) $E_2 \longrightarrow E_3$ ($q_2 = 1 - p_2$). Et ainsi de suite, jusqu'à l'état E_{r+1} .

Lorsque la fibre a atteint l'état E_{r+1} , les possibilités sont :

- une transition $E_{r+1} \longrightarrow E_a$ (probabilité p) et la fibre sort de la carde (absorption).
- une transition $E_{r+1} \longrightarrow E_1$ ($q = 1 - p$) et la fibre reprend une nouvelle évolution $E_1 \longrightarrow E_{r+1}$ dans les mêmes conditions qu'antérieurement : elle est recyclée.

1.2.3 - Conséquences

Dans sa traversée de la carde, une fibre doit être considérée comme subissant un certain nombre n de transitions qui l'amènent à parcourir une suite d'états avant son absorption par le peigneur, chaque suite possible étant caractérisée par une probabilité définie, fonction des pouvoirs de ramassage (probabilités de transition).

Au cours de cette évolution, elle passera n_1 fois par l'état E_1 , sera recyclée n_T fois, etc...

Et, le problème de l'interprétation du fonctionnement de la carde va - consister à déterminer les fonctions de distribution de probabilité correspondant à ces variables aléatoires. Nous allons les définir de manière précise.

2 - DEFINITION ET NOTATIONS

2.1 - Variables aléatoires

Celles-ci sont notées par une lettre soulignée. Par ex : \underline{x} .

(\underline{n}_T) : nombre de cycles $E_{r+1} \longrightarrow E_{r+1}$

(Bien entendu, $n_T = 0$ pour une fibre qui est absorbée en E_a sans recyclage : parcours du seul arc $E_1 \longrightarrow E_a$, indépendamment des ramassages, directement après l'entrée de la fibre sur la carde).

$(\underline{n}_i | 1)$: nombre de passages par un état E_i donné lors d'un cycle quelconque.

$(\underline{n}_{t,i} | 1)$: nombre de boucles $E_i \longrightarrow E_i$ ou de ramassages par le travailleur T_i donné lors d'un cycle quelconque.

$(\underline{n}_i | n_T)$: nombre de passages par un état E_i donné lors d'un trajet comportant n_T cycles.

(\underline{n}_i) : nombre de passages par l'état E_i (indépendamment des cycles parcourus).

- $\underline{n}_{t,1}$: nombre de ramassages par le travailleur T_1 (indépendamment des cycles parcourus).
- $(\underline{n} | n_T)$: nombre total de transitions pour un trajet comportant n_T cycles
- $(\underline{n}_t | n_T)$: nombre total de ramassages pour un trajet comportant n_T cycles
- \underline{n} : nombre total de transitions.
- \underline{n}_t : nombre total de ramassages.

2.2 - Probabilités

- $p_a(n_T)$: probabilité, pour une fibre, de parcourir n_T cycles avant absorption en E_a (happée par le peigneur).
- $p(n_1 | 1)$: probabilité, pour une fibre, de passer n_1 fois par l'état E_1 donné, au cours d'un cycle quelconque.
- $p(n_{t,1} | 1)$: probabilité, pour une fibre, d'être ramassée $n_{t,1}$ fois par le travailleur T_1 , au cours d'un cycle quelconque.
- $p(n_1 | n_T)$: probabilité, pour une fibre, de passer n_1 fois par l'état E_1 lors d'un trajet comportant n_T cycles.
- $p(n_{t,1} | n_T)$: probabilité, pour une fibre, d'être ramassée $n_{t,1}$ fois par le travailleur T_1 lors d'un trajet comportant n_T cycles.
- $p_a(n_1)$: probabilité, pour une fibre, de passer n_1 fois par l'état E_1 avant son absorption en E_a .
- $p_a(n_{t,1})$: probabilité, pour une fibre, d'être ramassée $n_{t,1}$ fois par le travailleur T_1 avant son absorption en E_a .
- $p(n | n_T)$: probabilité, pour une fibre, de subir, en tout, n transitions lors d'un trajet à n_T cycles.
- $p(n_t | n_T)$: probabilité, pour une fibre, d'être ramassée, en tout, n_t fois lors d'un trajet à n_T cycles.
- $p_a(n | n_T)$: probabilité, pour une fibre, de subir, en tout, n transitions lorsqu'elle est absorbée en E_a à la fin du n_T^e cycle [évidemment $p_a(n | n_T) = p_a(n_T) \cdot p(n | n_T)$].
- $p_a(n_t | n_T)$: probabilité, pour une fibre, d'être ramassée, en tout, n_t fois lorsqu'elle est absorbée en E_a à la fin du n_T^e cycle.
 $[p_a(n_t | n_T) = p_a(n_T) \cdot p(n_t | n_T)]$
- $p_a(n)$: probabilité, pour une fibre, de subir, en tout, n transitions avant son absorption en E_a .
- $p_a(n_t)$: probabilité, pour une fibre, d'être ramassée, en tout, n_t fois avant son absorption en E_a .

2.3 - Symboles

- $E(\underline{x})$: se lit "espérance mathématique de la variable aléatoire \underline{x} " (moyenne).
- $D^2(\underline{x})$: se lit "variance de \underline{x} ".
- j : désigne $\sqrt{-1}$.
- x et z : sont des variables auxiliaires .

2.4 - Durées

- t : temps correspondant, pour une fibre happée par un travailleur, au parcours qui la ramène au point cardant (via le travailleur et le dépouilleur associé).
- T : temps correspondant à un tour de tambour.
- T_0 : temps correspondant, pour une fibre qui entre dans la carde, au parcours qui l'amène au point de "contact" tambour-peigneur, en supposant qu'elle ne soit ramassée par aucun des travailleurs.
- τ : temps total passé par une fibre dans la carde avant son absorption par le peigneur (temps de transit).

3 - DEFINITION PRECISE DES PROBLEMES TRAITES

L'interprétation du fonctionnement de la carde comporte un cas général sur lequel viennent se greffer un ensemble de problèmes particuliers fort importants, à la solution desquels est liée la solution du cas général.

Les cas particuliers qui sont les suivants seront traités d'abord :

a/ Détermination de la distribution de la variable n_T . Cette distribution caractérise le recyclage.

b/ Détermination des distributions des variables $(\underline{n}_i | n_T)$, \underline{n}_i , $n_{t,i} | n_T$, $\underline{n}_{t,i}$ correspondant à un état E_i quelconque. Ces distributions caractérisant le mode d'action du travailleur T_i .

Si l'on envisage une carde à un seul travailleur, ces distributions résolvent complètement le problème.

Enfin, l'on abordera l'examen du cas général, caractérisant l'action globale de la carde.

c/ Distributions des variables $(\underline{n} | n_T)$, \underline{n} , $(\underline{n}_t | n_T)$, \underline{n}_t . Ces distributions caractérisant les diverses évolutions possibles d'une fibre entre son entrée (E_1) et sa sortie (E_a) de la carde. L'on en déduira la distribution du temps de transit :

$$\tau = T_0 + n_t \cdot t + n_T \cdot T,$$

distribution qui, pour un ensemble de fibres alimentées simultanément (mèche), fournit la répartition statistique des fibres dans le temps à la sortie.

4 - DISTRIBUTION DE LA VARIABLE n_T

Rappelons que l'on dit qu'une fibre a accompli un cycle lorsqu'elle a, partant de l'état E_{r+1} (fig. 1) parcouru une boucle la ramenant à l'état E_{r+1} (indépendamment des boucles $E_i \longrightarrow E_i$).

Probabilité $p_a(n_T)$

Considérons la fibre lorsqu'elle se présente pour la première fois en E_{r+1} (fig. 1).

Indépendamment de son évolution entre E_1 et E_{r+1} , la probabilité d'être happée par le peigne (passage en E_a) est p et la probabilité d'un retour en E_1 (recyclage) est q .

Si la fibre revient en E_1 , la probabilité d'être absorbée en E_a lorsqu'elle repassera à nouveau en E_{r+1} reste p , quelle que soit son évolution antérieure ; de même, q reste la probabilité d'être ramenée en E_1 .

Et ainsi à chaque cycle.

Si, par conséquent, l'on dresse le tableau des probabilités $p_a(n_T)$, pour la fibre se trouvant initialement en E_1 , de se trouver en E_a après avoir parcouru n_T cycles, l'on a :

\underline{n}_T	$p_a(n_T)$
0	p
1	qp
2	q^2p
.	.
.	n_T
n_T	$q^n p$
.	.
.	.

D'où :

$$\boxed{p_a(n_T) = q^{n_T} p} \quad (1)$$

Les probabilités étant en progression géométrique décroissante (de somme égale à l'unité), ce cas constitue un exemple de distribution géométrique (réf. 4) dont la fonction caractéristique s'écrit facilement (App. II) :

$$E(e^{jz n_T}) = \frac{p}{1 - qe^{jz}}$$

D'où l'on tire immédiatement :

$$\boxed{E(\underline{n}_T) = \frac{q}{p} \quad (*)} \quad (2)$$

et

$$\boxed{D^2(\underline{n}_T) = \frac{q}{p^2}} \quad (3)$$

La forme de la distribution du nombre \underline{n}_T de recyclages met bien en évidence le rôle du peigne.

 (*) F. Monfort, réf. 1

5 - DISTRIBUTIONS CONCERNANT UN SEUL ETAT E_1

(Pour les définitions des variables, voir 2.2 ci-dessus).

5.1 - Probabilités $p(n_1|1)$ et $p(n_{t,1}|1)$

5.1.1 - Probabilités $p(n_1|1)$

Du fait du caractère markovien du processus, le nombre de passages par E_1 , lors d'un cycle quelconque, est une variable aléatoire indépendante du nombre de passages par les autres états :

$$E_1, E_2, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_r$$

dans le cycle envisagé ainsi que du nombre de passages par l'ensemble des états $E_1, E_2, \dots, E_1 \dots E_r$ lors des cycles précédents.

De ce fait, les probabilités $p(n_1|1)$ s'obtiennent facilement. Soit un cycle quelconque. L'on dresse le tableau suivant :

$(\underline{n}_1 1)$	$p(n_1 1)$
1	q_1
2	$q_1 p_1$
3	$q_1 p_1^2$
.	.
.	.
n	$q_1 p_1^{n-1}$
....	.
.	.

D'où :

$$p(n_1|1) = q_1 p_1^{n_1-1} \quad (4)$$

Il s'agit, à nouveau, d'une distribution géométrique, pour la variable $(n_1|1) - 1$.

L'on a immédiatement :

$$E(\underline{n}_1|1) = \frac{1}{q_1} \quad (5)$$

$$D^2(\underline{n}_1|1) = \frac{p_1}{q_1^2} \quad (6)$$

5.1.2 - Probabilités $p(n_{t,1}|1)$

Comme pour la variable $(n_1|1)$ et compte tenu des mêmes remarques, l'on dresse le tableau suivant :

$(n_{t,i} 1)$	$p(n_{t,i} 1)$
0	q_i
1	$q_i p_i$
2	$q_i p_i^2$
·	·
·	·
$n_{t,i}$	$n_{t,i}$
·	q_i

D'où :

$$p(n_{t,i} | 1) = q_i p_i^{n_{t,i}} \quad (7)$$

Il s'agit d'une distribution géométrique pour $(n_{t,i} | 1)$

$$E(\underline{n}_{t,i} | 1) = \frac{p_i}{q_i} \quad (8)$$

$$D^2(\underline{n}_{t,i} | 1) = \frac{p_i}{q_i^2} \quad (9)$$

5.1.3 - Fonctions génératrices des probabilités

Les distributions de $(\underline{n}_i | 1) - 1$ et $(\underline{n}_{t,i} | 1)$ étant des distributions géométriques (App. II), l'on a :

$$\text{pour } (\underline{n}_i | 1) \quad G_i(x | 1) = \frac{q_i x}{1 - p_i x} \quad (10)$$

$$\text{pour } (\underline{n}_{t,i} | 1) \quad G_{t,i}(x | 1) = \frac{q_i}{1 - p_i x} \quad (11)$$

5.1.4 - Remarque

Il faut souligner que dans (4) et (7), q_i et p_i jouent un rôle exactement inverse de celui que jouent q et p dans (1).

C'est là une des différences entre le rôle du travailleur et celui du peigneur.

5.2 - Probabilités $p(n_i | n_T)$ et $p(n_{t,i} | n_T)$

5.2.1 - Fonction génératrice des probabilités $p(n_i | n_T)$

La variable aléatoire $(\underline{n}_i | n_T)$ est la somme des $(n_T + 1)$ variables aléatoires indépendantes $(\underline{n}_i | 1)$ de distributions identiques $p(n_i | 1)$.

Dans ces conditions, compte tenu de (5) et (6), l'on a :

$$E(\underline{n}_i | n_T) = (n_T + 1) \frac{1}{q_i} \quad (12)$$

$$D^2(\underline{n}_i | n_T) = (n_T + 1) \frac{p_i}{q_i^2}$$

et, pour la fonction génératrice des probabilités $p(n_i | n_T)$, compte-tenu de (10), l'on a :

$$G_i(x | n_T) = [G_i(x | 1)]^{n_T+1}$$

$$G_i(x | n_T) = \left[\frac{q_i x}{1 - p_i x} \right]^{n_T+1} \quad (13)$$

5.2.2 - Probabilités $p(n_i | n_T)$

Par dérivations successives de la fonction génératrice (App. I), l'on obtient facilement la formule de récurrence suivante :

$$p(n_i | n_T) = q_i^{n_T+1} \cdot C_{n_i-1}^{n_i \cdot (n_T+1)} \cdot p_i^{n_i \cdot (n+1)} \quad (14)$$

5.2.3 - Fonction génératrice des probabilités $p(n_{t,i} | n_T)$

Le même raisonnement que ci-dessus donne, compte-tenu de (8) et (9)

$$E(\underline{n}_{t,i} | n_T) = (n_T + 1) \frac{p_i}{q_i^2} \quad (15)$$

$$D^2(\underline{n}_{t,i} | n_T) = (n_T + 1) \frac{p_i}{q_i^2} \quad (16)$$

et, pour la fonction génératrice des probabilités $p(n_{t,i} | n_T)$, compte-tenu de (11)

$$G_{t,i}(x | n_T) = \left[\frac{q_i}{1 - p_i x} \right]^{n_T+1} \quad (17)$$

5.2.4 - Probabilités $p(n_{t,i} | n_T)$

Par dérivations successives de la fonction génératrice, l'on obtient la formule de récurrence :

$$p(n_{t,i} | n_T) = q_i^{n_T+1} C_{n_T+n_{t,i}}^{n_{t,i}} p_i^{n_{t,i}} \quad (18)$$

Les distributions définies par (14) et (18) sont des distributions de Pascal [9].

5.3 - Probabilités $p_a(n_i)$ et $p_a(n_{t,i})$

L'application des principes des probabilités composées et totales fournit la relation :

$$p_a(n_i) = \sum_{n_T=0}^{\infty} p_a(n_T) \cdot p(n_i | n_T) \quad (19)$$

Cette relation est fondamentale : elle fait apparaître le caractère composite de la carte lorsque $p \neq 1$ (réf. 2).

L'on a de même :

$$p_a(n_{t,i}) = \sum_{n_T=0}^{\infty} p_a(n_T) \cdot p(n_{t,i} | n_T) \quad (20)$$

5.3.1 - Fonction génératrice des probabilités $p_a(n_i)$

L'on a immédiatement :

$$G_i(x) = \sum_{n_T=0}^{\infty} q^{n_T} \cdot p \left[\frac{q_1 x}{1 - p_1 x} \right]^{n_T+1}$$

$$G_i(x) = \frac{pq_1 x}{1 - (p_1 + qq_1) x} \quad (21)$$

5.3.2 - Probabilités $p_a(n_i)$

Par dérivations successives de la fonction génératrice des probabilités, l'on obtient la formule de récurrence suivante :

$$p_a(n_i) = p q_1 (1 - p q_1)^{n_i-1} \quad (22)$$

Il s'agit d'une distribution géométrique pour $n_i - 1$.

La formule (22) fournit la distribution d'une variable dont on ne connaissait jusqu'à présent que les deux premiers moments. Ceux-ci s'obtiennent d'ailleurs ici très facilement puisque la variable $\underline{n}_i - 1$ est distribuée géométriquement (App. II).

$$E(\underline{n}_i - 1) = \frac{1 - pq_1}{pq_1} = \frac{1}{pq_1} - 1$$

soit :

$$E(\underline{n}_i) = \frac{1}{pq_1} \quad (23)$$

De même,

$$D^2(\underline{n}_i) = \frac{1 - pq_1}{(pq_1)^2} \quad (*) \quad (24)$$

5.3.3 - Fonction génératrice des probabilités $p_a(n_{t,i})$

Comme ci-dessus :

$$G_{t,i}(x) = \sum_{n_T=0}^{\infty} q^{n_T} \cdot p \left[\frac{q_1}{1 - p_1 x} \right]^{n_T+1}$$

$$G_{t,i}(x) = \frac{pq_1}{1 - q q_1 - p_1 x} \quad (25)$$

5.3.4 - Probabilités $p_a(n_{t,i})$

Par dérivations successives de la fonction génératrice des probabilités, l'on obtient la formule de récurrence suivante :

 (*) F. Monfort - réf. 1.

$$P_a(n_{t,i}) = \frac{p q_i}{1 - q q_i} \left[\frac{p_i}{1 - q q_i} \right]^{n_{t,i}} \quad (26)$$

Ici aussi, il s'agit d'une distribution géométrique.

L'on a immédiatement :

$$\boxed{E(\underline{n}_{t,i}) = \frac{p_i}{p q_i}} \quad (*) \quad (27)$$

et :

$$\boxed{D^2(\underline{n}_{t,i}) = \frac{p_i}{p q_i} \left[1 + \frac{p_i}{p q_i} \right]} \quad (28)$$

6 - CAS GENERAL

6.1 - Variables $(\underline{n} | 1)$ et $(\underline{n}_t | 1)$

Considérons un cycle quelconque.

La variable $(\underline{n} | 1)$ est la somme de r variables aléatoires $(n_i | 1)$ (autant qu'il y a de travailleurs) indépendantes du fait du caractère markovien du processus.

Il en va de même pour $(\underline{n}_t | 1)$.

Dans ces conditions, il est très facile d'obtenir la moyenne et la variance de ces variables aléatoires, ainsi que les fonctions génératrices de probabilité.

6.1.1 - Moyenne de $(\underline{n} | 1)$ et $(\underline{n}_t | 1)$

Compte tenu de (5) et (8) :

$$\boxed{E(\underline{n} | 1) = \sum_i (1/q_i)} \quad (29)$$

et

$$\boxed{E(\underline{n}_t | 1) = \sum_i (p_i/q_i)} \quad (30)$$

6.1.2 - Variance de $(\underline{n} | 1)$ et $(\underline{n}_t | 1)$

Compte-tenu de (6) et (9) :

$$\boxed{D^2(\underline{n} | 1) = D^2(\underline{n}_t | 1) = \sum_i (p_i/q_i^2)} \quad (31)$$

6.1.3 - Fonctions génératrices

Compte-tenu de (10) et (11), l'on a :

$$\text{pour } (\underline{n} | 1), G(x | 1) = \frac{q_1 q_2 \dots q_r x^r}{(1 - p_1 x)(1 - p_2 x) \dots (1 - p_r x)} = \prod_i \frac{q_i x}{1 - p_i x} \quad (32)$$

$$\text{pour } (\underline{n}_t | 1), G_t(x | 1) = \frac{q_1 q_2 \dots q_r}{(1 - p_1 x)(1 - p_2 x) \dots (1 - p_r x)} = \prod_i \frac{q_i}{1 - p_i x} \quad (33)$$

(*) F. Monfort Réf. 1

6.1.4 - Probabilités $p(n|1)$ et $p(n_t|1)$

Par dérivations successives de $G_t(x|1)$ après décomposition en fonctions rationnelles, l'on obtient facilement :

$$p(n_t | 1) = q_1 q_2 q_3 \dots q_r \left[\sum_1 \frac{p_1^{n_t+r-1}}{\prod_{j \neq 1} (p_1 - p_j)} \right] \quad (34)$$

et puisque $\underline{n}|1) = (\underline{n}_t | 1) + r$

$$p(n|1) = q_1 q_2 q_3 \dots q_r \sum_1 \frac{p_1^{n-1}}{\prod_{j \neq 1} (p_1 - p_j)} \quad (35)$$

Ces formules avaient été obtenues par Martindale [3]. Voir aussi réf. 8 et réf. 2.

6.2 - Variables $(\underline{n}|n_T)$ et $(\underline{n}_t | n_T)$

6.2.1 - Fonctions génératrices

La variable aléatoire $(\underline{n}|n_T)$ est la somme de $(n_T + 1)$ variables aléatoires indépendantes $(n|1)$ de distribution identique $p(n|1)$. La fonction génératrice des probabilités $p(n|n_T)$ s'écrit donc :

$$G(x|n_T) = [G(x|1)]^{n_T+1}$$

D'où compte tenu de (32) :

$$G(x|n_T) = \left[\prod_1 \frac{q_1 x}{1 - p_1 x} \right]^{n_T+1} \quad (36)$$

Le même raisonnement que ci-dessus donne :

$$G_t(x|n_T) = \left[\prod_1 \frac{q_1}{1 - p_1 x} \right]^{n_T+1} \quad (37)$$

Les probabilités $p(n|n_T)$ et $p(n_t|n_T)$ que l'on peut obtenir, en principe, à partir des fonctions (36) et (37) ont une forme très complexe. Cette question a été étudiée à la réf. 2 au moyen des techniques du calcul matriciel.

Nous étudierons au paragraphe 6.4 les propriétés asymptotiques de $p(n|n_T)$ et $p(n_t|n_T)$.

6.2.2 - Moyenne de $(\underline{n}|n_T)$ et $(\underline{n}_t | n_T)$

Compte tenu de (29) et (30) :

$$\boxed{E(\underline{n}|n_T) = (n_T + 1) \sum_1 (1/q_1)} \quad (38)$$

et :

$$\boxed{E(\underline{n}_t | n_T) = (n_T + 1) \sum_1 (p_1/q_1)} \quad (39)$$

6.2.3 - Variance de $(\underline{n}|n_T)$ et $(\underline{n}_t | n_T)$

Compte tenu de (31) :

$$D^2(\underline{n} | n_T) = D^2(\underline{n}_t | n_T) = (n_T + 1) \sum_i (p_i/q_i^2) \quad (40)$$

6.3 - Variables (\underline{n}) et (\underline{n}_t)

L'application des principes des probabilités composées et totales permet d'écrire :

$$P_a(\underline{n}) = \sum_{n_T=0}^{\infty} P_a(n | n_T) = \sum_{n_T=0}^{\infty} P_a(n_T) \cdot p(n | n_T) \quad (41)$$

$$P_a(\underline{n}_t) = \sum_{n_T=0}^{\infty} P_a(n_t | n_T) = \sum_{n_T=0}^{\infty} P_a(n_T) \cdot p(n_t | n_T) \quad (42)$$

6.3.1 - Moyenne de (\underline{n}) et (\underline{n}_t)

$$E(\underline{n}_t) = \sum_{n_T=0}^{\infty} n_t \cdot P_a(n_t) = \sum_{n_T=0}^{\infty} p q^{n_T} \cdot E(\underline{n}_t | n_T)$$

Soit, compte tenu de (39) :

$$E(\underline{n}_t) = \sum_i (p_i/q_i) \times \sum_{n_T} (n_T + 1) p q^{n_T}$$

$$E(\underline{n}_t) = \frac{1}{p} \sum_i (p_i/q_i) \quad (*) \quad (43)$$

Un calcul identique donne :

$$E(\underline{n}) = \frac{1}{p} \sum_i (1/q_i) \quad (*) \quad (44)$$

6.3.2 - Variance de (\underline{n}) et (\underline{n}_t)

$$E(\underline{n}_t^2) = \sum_{n_T=0}^{\infty} n_t^2 \cdot P_a(n_t) = \sum_{n_T=0}^{\infty} p q^{n_T} \cdot E(\underline{n}_t^2 | n_T)$$

L'on sait que :

$$E(\underline{n}_t^2 | n_T) = D^2(\underline{n}_t | n_T) + E^2(\underline{n}_t | n_T)$$

D'où, compte tenu de (39) et (40) :

$$E(\underline{n}_t^2 | n_T) = (n_T + 1) \sum (p_i/q_i^2) + (n_T + 1)^2 \left[\sum_i (p_i/q_i) \right]^2$$

Il vient alors :

$$E(\underline{n}_t^2) = \frac{1}{p} \sum_i (p_i/q_i^2) + \left[\sum_i (p_i/q_i) \right]^2 [2/p^2 - 1/p]$$

Et, finalement, puisque :

$$D^2(\underline{n}_t) = E(\underline{n}_t^2) - E^2(\underline{n}_t)$$

(*) F. Monfort Réf. 1

$$D^2(\underline{n}_T) = \frac{1}{p} \sum_i (p_i/q_i^2) + \frac{q}{p^2} \left[\sum_i (p_i/q_i) \right]^2 \quad (45)$$

Un calcul semblable donnera :

$$D^2(\underline{n}) = \frac{1}{p} \sum_i (p_i/q_i^2) + \frac{q}{p^2} \left[\sum_i (1/q_i) \right]^2 \quad (46)$$

6.3.3 - Fonction génératrice des probabilités $p_a(n)$ et $p_a(n_t)$

Compte tenu de (36) et (41), l'on a :

$$G(x) = \sum_n x^n p_a(n) = \sum_{n_T=0}^{\infty} p q^{n_T} \left[\prod_i \frac{q_i x}{1 - p_i x} \right]^{n_T+1}$$

Soit :

$$G(x) = p q_1 q_2 \dots q_r \frac{x^r}{(1 - p_1 x)(1 - p_2 x) \dots (1 - p_r x) - q_1 q_2 \dots q_r x^r} \quad (47)$$

Compte-tenu de (37) et (42), l'on a :

$$G_t(x) = \sum_{n_t} x^{n_t} p_a(n_t) = \sum_{n_T=0}^{\infty} q^{n_T} p \left[\prod_i \frac{q_i}{1 - p_i x} \right]^{n_T+1}$$

Soit :

$$G_t(x) = p q_1 q_2 \dots q_r \frac{1}{(1 - p_1 x)(1 - p_2 x) \dots (1 - p_r x) - q_1 q_2 \dots q_r} \quad (48)$$

6.4. - Solution asymptotique

L'expression des probabilités $p(n|n_T)$ et $p(n_t|n_T)$ que l'on obtient à partir de (36) et (37), est très complexe. Il en va de même pour $p_a(n)$ et $p_a(n_t)$.

Pour les applications pratiques, c'est là un handicap, étant donné qu'il est nécessaire de pouvoir calculer ces probabilités pour des valeurs particulières quelconques des p_i et p . C'est pourquoi il était très important de rechercher des expressions approchées pour ces probabilités.

Nous allons voir que de telles expressions peuvent être obtenues.

6.4.1 - Examen plus approfondi des distributions de $(n_i|n_T)$ et $(n_{i,1}|n_T)$

6.4.1.1 - Application du théorème de la limite centrale

La variable $(n_i|n_T)$ est une variable aléatoire somme de $(n_T + 1)$ variables aléatoires indépendantes $(n_i|1)$.

Pourvu que les variables $(n_i|1)$ vérifient certaines conditions très générales, le théorème de la limite centrale permet d'affirmer que la distribution de la variable réduite :

$$(n_i|n_T)_R = \frac{(n_i|n_T) - E(n_i|n_T)}{D(n_i|n_T)}$$

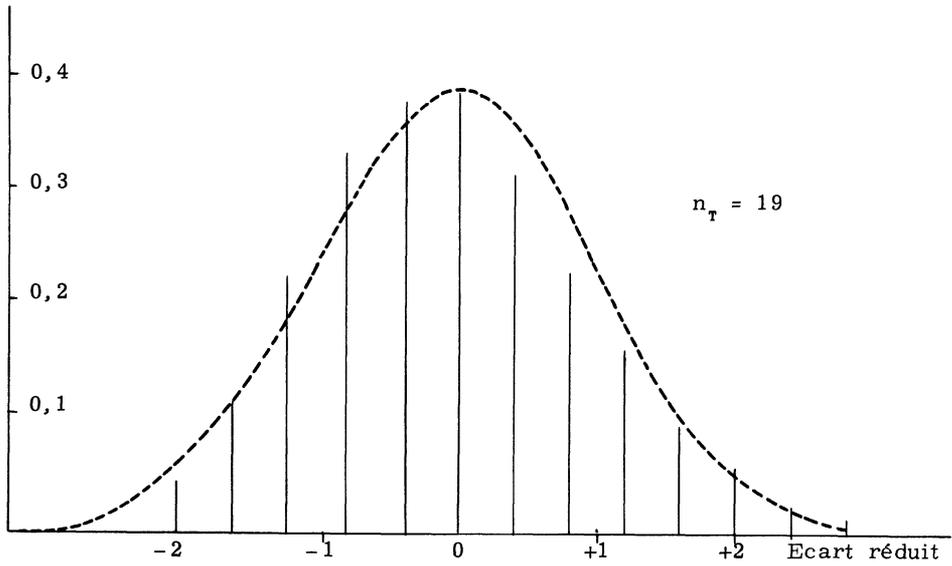


Figure 3

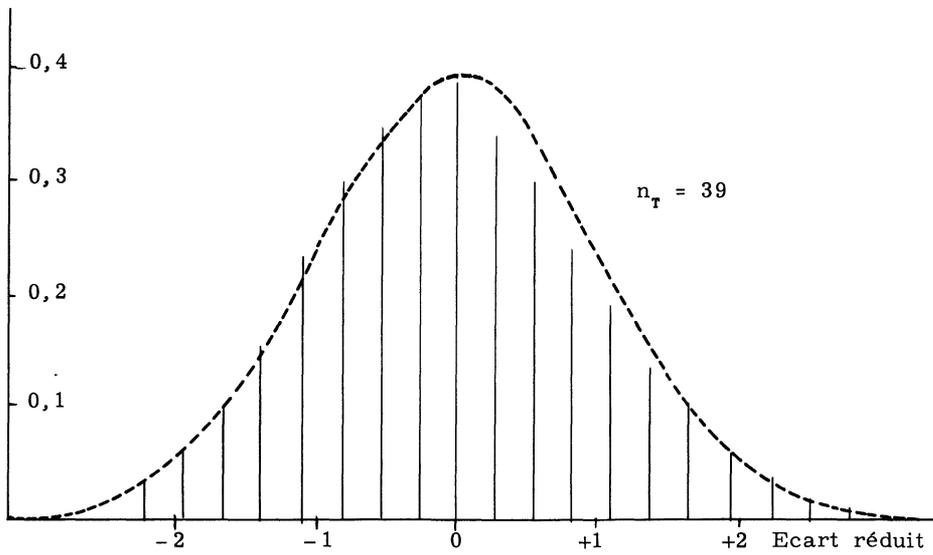


Figure 4

sera approximativement gaussienne pour n_T suffisamment grand et si n_T tend vers l'infini, l'on aura :

$$\lim_{n_T \rightarrow \infty} P \{ (\underline{n}_1 | n_T)_R \leq x \} = \Phi(x)$$

avec

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-u^2/2) du$$

Une condition suffisante pour que s'applique le théorème est que les variables $(n_1 | 1)$ aient la même distribution, ce qui est le cas ici. (Tout ce qui vient d'être dit pour $(n_1 | n_T)$ est valable pour $(\underline{n}_{t,1} | n_T)$). Le calcul des moments du 3ème et 4ème ordre de la variable réduite fournit d'ailleurs les expressions suivantes :

$$\mu_3 = \frac{1 + p_1}{\sqrt{(n_T + 1) p_1}} \quad \text{et} \quad \mu_4 = 3 + \frac{1}{(n_T + 1)} \cdot \frac{p_1^2 + 4 p_1 + 1}{p_1}$$

qui tendent respectivement vers 0 et 3 lorsque n_T augmente (moments d'ordre 3 et 4 de la loi normale réduite).

6.4.1.2 - Illustration

Les propriétés de convergence gaussienne mises en évidence ici sont illustrées par les figures 3 et 4 pour la variable $(\underline{n}_{t,1} | n_T)$. L'on a pris $n_T = 19$ à la figure 3 et $n_T = 39$ à la figure 4, $p_1 = 0,20$ et $p = 0,10$.

En abscisse est reporté l'écart réduit et en ordonnée, pour chaque valeur de l'écart réduit correspondant à $\underline{n}_{t,1} = 0, 1, 2, \dots$, les probabilités $p(\underline{n}_{t,1} | 19)$ et $p(\underline{n}_{t,1} | 39)$ (calculées à partir de (18)) multipliées respectivement par $D(\underline{n}_{t,1} | 19)$ et $D(\underline{n}_{t,1} | 39)$.

Dans ces conditions, l'on obtient un diagramme où les extrémités supérieures des ordonnées (discrètes) en trait continu se rapprochent pour n_T grand de la courbe de Gauss (reproduite en trait discontinu) puisqu'il résulte des considérations ci-dessus que :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u^2/2), \quad u = \frac{(\underline{n}_{t,1} | n_T) - E(\underline{n}_{t,1} | n_T)}{D(\underline{n}_{t,1} | n_T)}$$

est une valeur approchée de :

$$p_a(\underline{n}_{t,1} | n_T) \times D(\underline{n}_{t,1} | n_T)$$

6.4.2 - Distribution de $(\underline{n} | n_T)$ et $(\underline{n}_t | n_T)$

La variable $(\underline{n} | n_T)$ est une variable aléatoire somme de r variables aléatoires indépendantes $(\underline{n}_1 | n_T)$ à convergence asymptotique gaussienne. Le théorème de la limite centrale s'applique à nouveau : la variable réduite :

$$\frac{(\underline{n} | n_T) - E(\underline{n} | n_T)}{D(\underline{n} | n_T)}$$

est approximativement gaussienne pour n_T et pour r suffisamment grand (le nombre r de travailleurs est un second facteur de convergence).

Si bien que, en définitive, l'expression :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{D(\underline{n}|n_T)} \exp(-u^2/2) \quad (u = \text{variable réduite})$$

est une valeur approchée de $p(n|n_T)$.

Les mêmes conclusions s'appliquent à la variable $(\underline{n}_t|n_T)$.

Les valeurs approchées de $p_a(n)$ et $p_a(n_t)$ s'obtiendront finalement en introduisant les valeurs approchées de $p(n|n_T)$ et $p(n_t|n_T)$ dans (41) et (42).

6.4.3 - Conclusions et illustrations

Les solutions approchées obtenues sont faciles à calculer au moyen d'une table de la loi de Gauss en n'exigeant que le calcul de deux paramètres faciles à obtenir : moyenne et variance de la variable correspondante. En outre, l'on constate que l'approximation obtenue est suffisante même pour les premiers termes de $p(n_t|n_T)$ étant donné que p (pouvoir de ramassage du peigneur) est relativement petit et que, dans ces conditions, les erreurs commises pour n_T faible apparaissent négligeables. C'est ce qui apparaît sur les figures 5 et 6 pour une carte à $r = 4$ travailleurs, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0,20$ et $p = 0,10$.

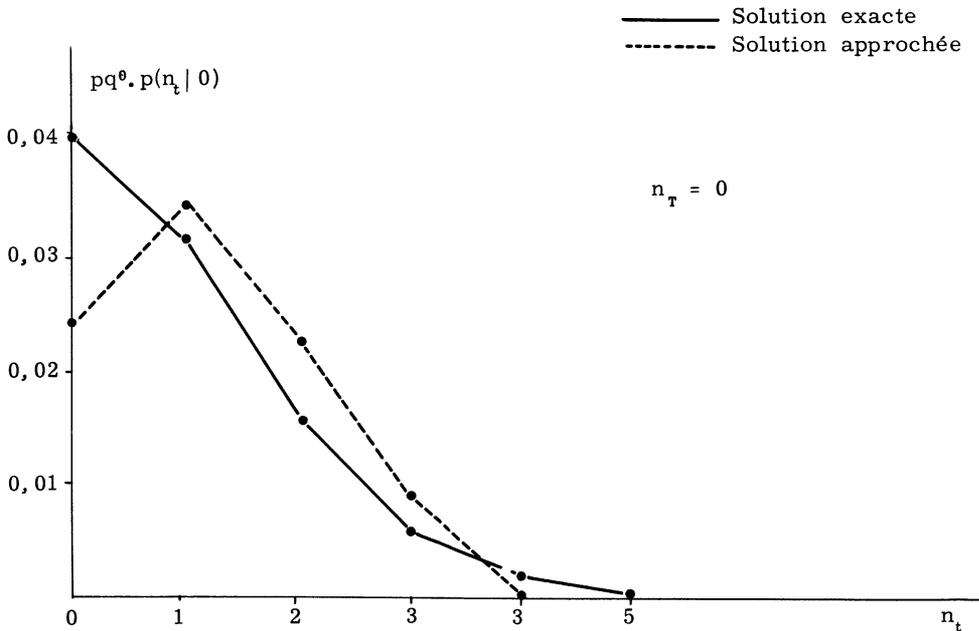


Figure 5

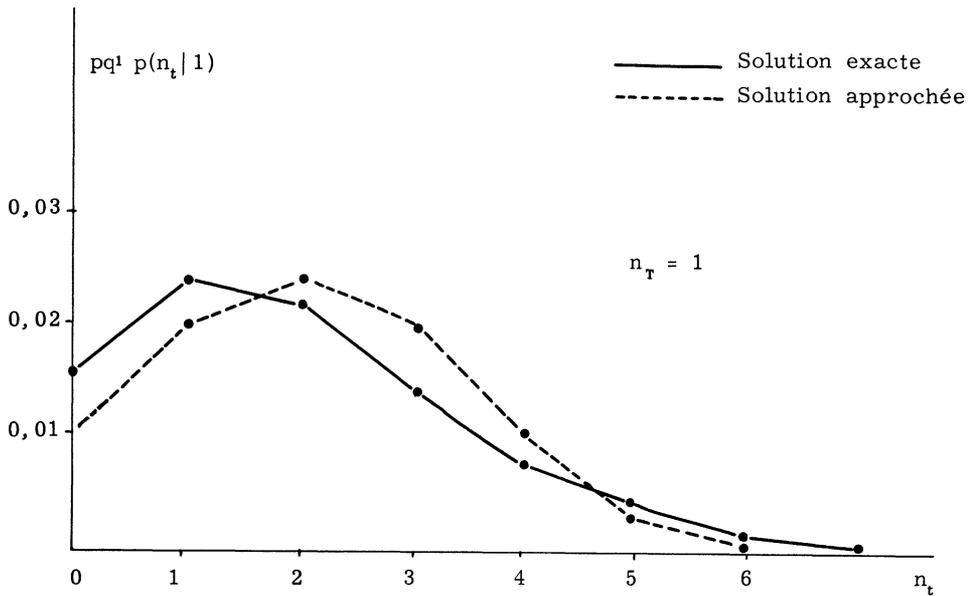


Figure 6

7 - TEMPS DE TRANSIT

La distribution du temps de transit :

$$\tau = T_0 + n_t \cdot t + n_T \cdot T$$

n'est rien d'autre que :

$$p_a(n_t | n_T) = pq^{n_T} \cdot p(n_t | 1)$$

où l'on fera $n_t = 0, 1, 2, \dots$ et $n_T = 0, 1, 2, \dots$ et dont la solution approchée a été étudiée ci-dessus.

Connaissant donc, pour une carte donnée, les valeurs T_0 , t et T , il est alors possible de calculer la fonction de répartition, dans le temps à la sortie, de l'ensemble des fibres d'une mèche alimentée à un instant donné.

Un exemple d'une telle courbe calculée est donné à la fig. 7. L'abscisse de chaque point correspond à une valeur du temps

$$n_t \cdot t + n_T \cdot T \quad (T = t/20)$$

(et l'on a laissé la constante T_0 de côté), l'ordonnée est la probabilité $p_a(n_t | n_T)$.

8 - CONCLUSIONS GENERALES CONCERNANT LA CARDE

La conception probabiliste de la carde nous a permis de pousser fort loin l'étude du fonctionnement de cette machine. La forme remarquable de la distribution de probabilité du nombre de recyclages a été mise en évidence.

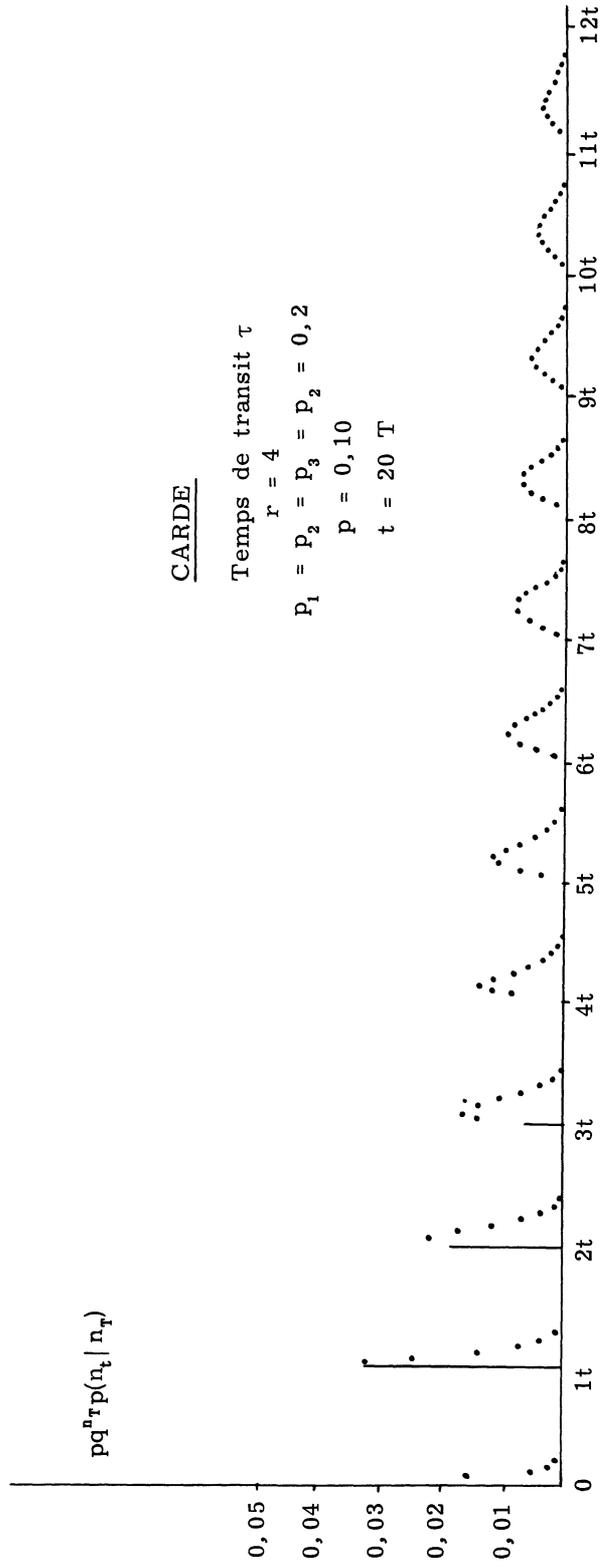


Figure 7

Les distributions de probabilités caractérisant l'action d'un travailleur quelconque sont déduites d'une manière systématique. Enfin, l'on a montré que l'action globale de la carde peut être caractérisé par une distribution de probabilité décomposable en une somme de distributions à convergence gaussienne $p(n_t | n_r)$. La carde apparaît "composite" :

- une proportion p des fibres alimentées est traitée comme elle le serait sur une carde à r travailleurs dont le pouvoir de ramassage du peigneur serait égal à 1.

- une proportion qp des fibres est traitée comme elle le serait sur une carde à $2r$ travailleurs dont le pouvoir de ramassage du peigneur serait égal à 1.

- et ainsi de suite.

Le rôle du peigneur apparaît ainsi prépondérant : le rôle du travailleur en est directement fonction.

Le tracé de la fonction de distribution du temps de transit permet d'étudier dans le détail l'action de la carde dans des conditions de fonctionnement données.

Tous les éléments sont à présent réunis pour l'étude du stade suivant : la formation du ruban de carde.

9 - POSSIBILITES D'APPLICATION DU MODELE DE MONFORT A D'AUTRES DOMAINES

Le processus de la carde constitue un cas particulier de réalisation du modèle théorique ici étudié.

Ce cas particulier est notamment caractérisé par le fait que le nombre r des états E_i est faible (max. : 8) et que le temps T d'un cycle est très inférieur au retard t occasionné par une boucle $E_i \longrightarrow E_i$.

Le modèle théorique étant général, il est évidemment possible de concevoir d'autres cas particuliers et de les étudier théoriquement.

Nous en examinerons un où l'on prend en quelque sorte le contrepied des hypothèses restrictives du cas de la carde.

Soit, en effet, un cas particulier de réalisation du modèle pour lequel :

1/ Le nombre r des états E_i est grand (supérieur à 30 pour fixer les idées). L'on se trouve donc dans des conditions particulièrement favorables pour utiliser l'approximation gaussienne introduite en 6.4.

2/ Le retard t est plus petit que la durée d'un cycle T .

L'on supposera en outre : $p_1 = p_2 = p_3 \dots \dots = p_0$ (la généralité des raisonnements n'en sera pas affectée).

Pour n_r donné, la valeur moyenne du temps de transit :

$$\tau = n_t \times t + n_T \times T + T_0$$

s'écrit évidemment (39) :

$$E(\tau | n_r) = (n_r + 1) p_0 \times r \times \left(\frac{t}{q_0} \right) + n_r \cdot T + T_0 \quad (49)$$

et l'écart-type (40) :

$$D(\tau | n_T) = \sqrt{(n_T + 1)} p_o \cdot T \times \left(\frac{t}{q_o} \right) \quad (50)$$

Si l'on imagine alors un processus où les hypothèses que l'on vient d'introduire sont vérifiées et que, dans l'état initial E_1 (entrée) l'on introduit simultanément un grand nombre de systèmes, la répartition statistique de ces systèmes en fonction du temps en E_a (sortie), prendra l'allure très caractéristique de la fig. 8, à condition que p_o soit faible (ici, $p_o = \frac{1}{r}$) :

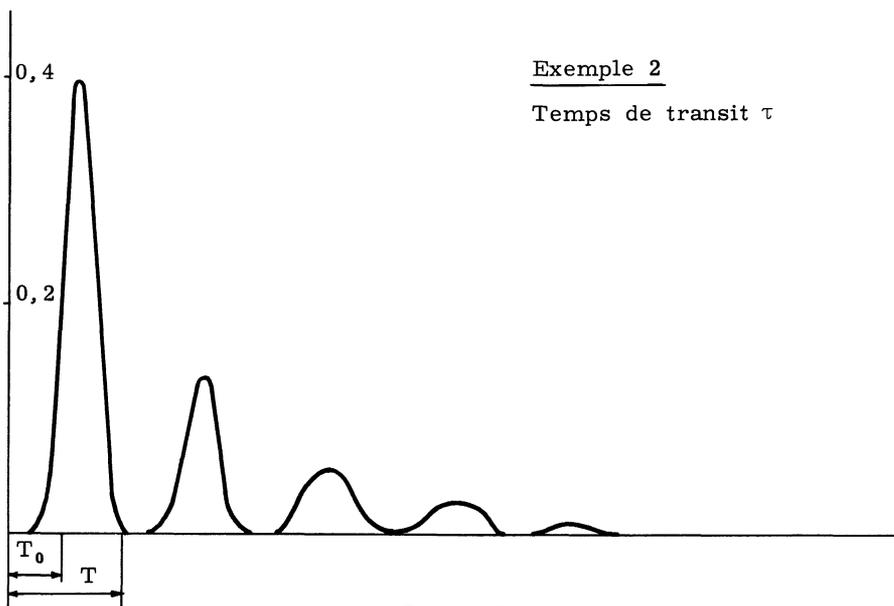


Figure 8

Le long de l'axe du temps, l'on a une suite de courbes de la loi normale correspondant à $n_T = 0, 1, 2, \dots$ dont les ordonnées sont multipliées respectivement par p (= ici à 0,5), qp , q^2p , \dots (courbes enveloppes des ordonnées correspondant à la variable discrète τ).

Les moyennes de ces courbes successives se trouvent aux abscisses :

$$\begin{array}{ll}
 p_o r \frac{t}{q_o} + T_o & \text{soit ici } \approx t + T_o \\
 2p_o r \frac{t}{q_o} + 1 T + T_o & 2t + T + T_o \\
 3p_o r \frac{t}{q_o} + 2 T + T_o & 3t + 2 T + T_o
 \end{array}$$

etc

et les écarts-types respectifs sont :

$$\begin{aligned} \sqrt{p_0} r \left(\frac{t}{q_0} \right) & \text{ soit ici } \simeq t \\ \sqrt{2p_0} r \left(\frac{t}{q_0} \right) & \sqrt{2t} \\ \sqrt{3p_0} r \left(\frac{t}{q_0} \right) & \sqrt{3t} \end{aligned}$$

etc...

Nous donnons à la fig. 9 la reproduction d'une figure parue à la réf. (5).

Elle concerne l'étude d'une machine (schématisée à la fig. 9) utilisée dans le domaine de la préparation des engrais.

Dans cette industrie, la matière passe successivement au travers d'un séchoir et d'un "granulateur". Les deux machines sont essentiellement de grands cylindres en rotation, au sein desquels la matière progresse peu à peu. A la sortie du granulateur, les particules d'engrais sont divisées en particules qui conviennent pour la vente et particules trop grosses ou trop petites. Les particules tombant en dehors de l'intervalle des tailles acceptables, sont recyclées à l'entrée.

Pour obtenir la courbe de la fig. 9, l'on a introduit à l'entrée quelques kilos de matière marquée au sodium 24 et l'on a enregistré l'activité à la sortie en fonction du temps.

Les analogies entre la courbe ainsi obtenue et la courbe théorique de la fig. 8 sont frappantes.

Remarquons que l'industrie du ciment utilise des machines similaires et qu'il n'est donc pas exclu que le présent travail théorique trouve des applications dans des domaines fort variés.

N'est-ce pas un des intérêts d'une théorie de fournir des applications dans des domaines auxquels l'on ne songeait pas initialement ?

Activity

Extrait de
"ISOTOPES"
(J. L. PUTMAN)

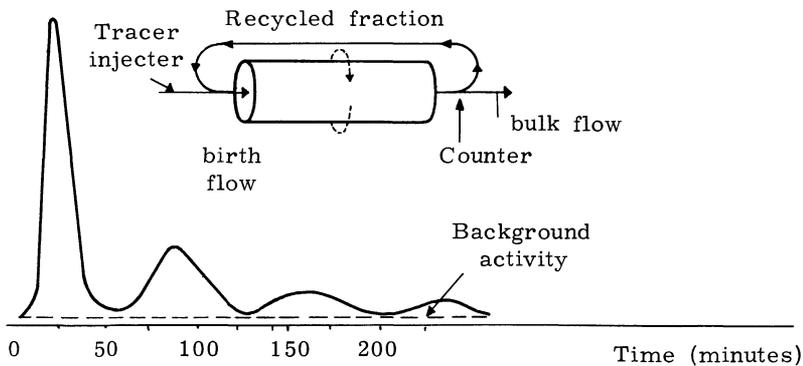


Figure 9

10 - APPENDICE I

Bref rappel de la définition et des propriétés des fonctions génératrices de probabilité.

I - Définition

Soit $p(n)$ une distribution de probabilité où la variable n peut prendre les valeurs entières 0, 1, 2,.....

Par définition, la fonction génératrice des probabilités correspondante est :

$$P(x) = \sum_{n=0} x^n p(n) = E(x^n)$$

On a :

$$P(1) = \sum_{n=0} p(n) = 1$$

et :

$$\begin{aligned} |P(x)| &\leq \sum_n |p(n) x^n| \\ &\leq \sum_n p(n) \quad \text{si } |x| \leq 1 \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

D'où $P(x)$ est absolument convergente pour $|x| \leq 1$.

2 - Obtention des probabilités $p(n)$

L'on obtient immédiatement :

$$p(n) = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{dx^n} P(x) \right]_{x=0}$$

3 - Fonction génératrice d'une somme de variables indépendantes

Soit :

$$\underline{n}_1, p_1(\underline{n}_1) ; \underline{n}_2, p_2(\underline{n}_2)$$

L'évènement composé $(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$ a pour probabilité : $p_1(\underline{n}_1) \times p_2(\underline{n}_2)$

Soit alors la variable :

$$\underline{n} = \underline{n}_1 + \underline{n}_2$$

L'évènement $\underline{n} = n$ se compose des évènements (s'excluant mutuellement) :

$$(\underline{n}_1 = 0, \underline{n}_2 = n), (\underline{n}_1 = 1, \underline{n}_2 = n - 1), \dots, (\underline{n}_1 = n, \underline{n}_2 = 0)$$

D'où :

$$\begin{aligned} p(n) &= p_1(\underline{n}_1 = 0) p_2(\underline{n}_2 = n) + p_1(\underline{n}_1 = 1) p_2(\underline{n}_2 = n - 1) + \dots \\ &+ p_1(\underline{n}_1 = n) p_2(\underline{n}_2 = 0). \end{aligned}$$

Soit alors :

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n p(n)$$

$$P_1(x) = \sum_{n_1=0}^{\infty} x^{n_1} p_1(n_1)$$

$$P_2(x) = \sum_{n_2=0}^{\infty} x^{n_2} p_2(n_2)$$

Si l'on effectue le produit $P_1(x) \times P_2(x)$, l'on constate que l'on obtient $P(x)$.

$$P(x) = P_1(x) \times P_2(x).$$

Ce résultat se généralise facilement pour un nombre quelconque de variables.

11 - APPENDICE II - DISTRIBUTION GEOMETRIQUE (réf. 4)

11.1 - Définition

Soit \underline{n} une variable aléatoire discrète, susceptible de prendre les valeurs 0, 1, 2,

Soit p et q deux paramètres (< 1) et tels que $p + q = 1$.

Si, alors, aux différentes valeurs 0, 1, 2,, de \underline{n} correspondent les probabilités pq^0 , pq^1 , pq^2 , la distribution de \underline{n} est une distribution géométrique.

11.2 - Fonctions génératrices des probabilités

On a, sans difficulté :

$$E(x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} p(qx)^n = \frac{p}{1 - qx}$$

11.3 - Fonction caractéristique

$$E(e^{jz\underline{n}}) = \sum_{n=0}^{\infty} p(qe^{jz})^n = \frac{p}{1 - qe^{jz}}$$

11.4 - Moments

Compte tenu de :

$$E(n^k) = \frac{1}{j^k} \left\{ \frac{d^k}{dz^k} E(e^{jz\underline{n}}) \right\}_{z=0},$$

on a :

$$E(\underline{n}) = \frac{1}{j} \left[\frac{pq \cdot j e^{jz}}{(1 - qe^{jz})^2} \right]_{z=0}$$

$$\boxed{E(\underline{n}) = \frac{q}{p}}$$

12. - Appendice III - Tableau Récapitulatif

Variable	Fonction génératrice des Probabilités	Moyenne	Variance	CV
(\underline{n}_r) *	$\frac{p}{1 - qx}$	q/p^*	q/p^2	$1/\sqrt{q}$
$(\underline{n}_1 1)$	$\frac{q_1 x}{1 - p_1 x}$	$1/q_1$	p_1/q_1^2	$\sqrt{p_1}$
$(\underline{n}_{t,1} 1)$	$\frac{q_1}{1 - p_1 x}$	p_1/q_1	p_1/q_1^2	$1/\sqrt{p_1}$
$(\underline{n}_1 n_r)$	$\left[\frac{q_1 x}{1 - p_1 x} \right]^{n_r+1}$	$(n_r + 1) (1/q_1)$	$(n_r + 1) (p_1/q_1^2)$	$\sqrt{p_1/(n_r + 1)}$
$(\underline{n}_{,1} n_r)$	$\left[\frac{q_1}{1 - p_1 x} \right]^{n_r+1}$	$(n_r + 1) (p_1/q_1)$	$(n_r + 1) (p_1/q_1^2)$	$1/\sqrt{p_1(n_r + 1)}$
(\underline{n}_1)	$\frac{pq_1 x}{1 - (p_1 + qq_1) x}$	$1/pq_1^*$	$(1 - pq_1)/(pq_1)^2$	$\sqrt{1 - pq_1}$
$(\underline{n}_{t,1})$	$\frac{pq_1}{1 - q_1 - p_1 x}$	p_1/pq_1^*	$(p_1/pq_1) (1 + p_1/pq_1)$	$\sqrt{\frac{pq_1 + p_1}{p_1}}$
$(\underline{n} n_r)$	$\left[\frac{q_1 q_2 \dots q_r x^r}{(1 - p_1 x)(1 - p_2 x) \dots (1 - p_r x)} \right]^{n_r+1}$	$(n_r + 1) \sum_i (1/q_i)$	$(n_r + 1) \sum_i (p_i/q_i^2)$	-
$(n_t n_r)$	$\left[\frac{q_1 q_2 \dots q_r}{(1 - p_1 x)(1 - p_2 x) \dots (1 - p_r x)} \right]^{n_r+1}$	$(n_r + 1) \sum_i (p_i/q_i)$	$(n_r + 1) \sum_i (p_i/q_i^2)$	-
(\underline{n})	$\frac{pq_1 q_2 \dots q_r x^r}{(1 - p_1 x)(1 - p_2 x) \dots (1 - p_r x) - q_1 q_2 \dots q_r x^r}$	$\frac{1}{p} \sum_i (1/q_i)^*$	$\frac{1}{p} \sum_i (p_i/q_i^2) + \frac{q}{p^2} \left[\sum_i (1/q_i) \right]^2$	-
(\underline{n}_t)	$\frac{pq_1 q_2 \dots q_r}{(1 - p_1 x)(1 - p_2 x) \dots (1 - p_r x) - q_1 q_2 \dots q_r x^r}$	$\frac{1}{p} \sum_i (p_i/q_i)^*$	$\frac{1}{p} \sum_i (p_i/q_i^2) + \frac{q}{p^2} \left[\sum_i (p_i/q_i) \right]^2$	-

* Les résultats marqués d'un astérisque ont été obtenu précédemment par F. Monfort (réf. 1).

$$E(\underline{n}^2) = \frac{1}{j^2} \left[\frac{(1 - qe^{jz})^2 pqj^2 e^{jz} + (1 - qe^{jz}) pq^2 \cdot 2j^2 e^{2jz}}{(1 - qe^{jz})^4} \right]_{z=0}$$

$$E(\underline{n}^2) = \frac{q}{p} + 2 \frac{q^2}{p^2}$$

D'où :

$$D^2(\underline{n}) = \frac{q}{p^2}$$

13 - REMERCIEMENTS

L'auteur remercie le Professeur F. MONFORT, Directeur du Laboratoire PELTZER & FILS, S.A., grâce à qui le présent travail a pu être réalisé, pour les nombreux conseils qu'il en a reçu.

Il remercie l'IWS et L'IRSIA qui ont subventionné la recherche.

14 - BIBLIOGRAPHIE

- [1] MONFORT F. - a) Le processus Markovien de la cardé. (Ann. Scien. Text. Belges - mars 1962).
b) Un résumé de l'article précité a paru en anglais dans J.T.I. vol. 53, 8, August 1962.
- [2] VROOMEN F. et MONFORT F. - La formation du ruban de cardé. (IIIème congrès international de la Recherche Textile Lainière, Paris - Juillet 1965, sous presse dans le Bulletin de l'Institut Textile de France).
- [3] MARTINDALE J.G. - The distribution and movement of wool in woolen cards (J.T.I. 1945 - 213/228).
- [4] PARZEN E. - Modern Probability Theory and its applications (Ed. Wiley & sons - London - 1960, p. 179 et 218).
- [5] PUTMAN J.L. - Isotopes (Penguin Books, 1960).
- [6] BRENY - Processus stochastiques élémentaires (Univ. de Liège).
- [7] NORMAN T.J. BAILEY - The elements of stochastic processes with applications to the natural sciences (J. WILEY & sons, N.Y. 1964).
- [8] WOOL RESEARCH 1918 - 1948 - Vol. 4, Carding (Ed. WIRA - Leeds, 1948) p. 68 et suivantes.
- [9] FELLER W. - An introduction to probability theory and its applications Vol. I - (WILEY & sons, N.Y. 1950), p. 218.

15 - TABLE DES MATIERES

	Pages
0 - INTRODUCTION	55
1 - PROCESSUS DE LA CARDE	55
1.1 - <u>Description sommaire de la carte à un tambour</u>	55
1.2 - <u>Modèle probabiliste de la carte</u>	57
1.2.1 - Hypothèse	57
1.2.2 - Modèle de Monfort	58
1.2.3 - Conséquences	59
2 - DEFINITIONS ET NOTATIONS	59
2.1 - <u>Variables aléatoires</u>	59
2.2 - <u>Probabilités</u>	60
2.3 - <u>Symboles</u>	60
2.4 - <u>Durées</u>	61
3 - DEFINITION PRECISE DES PROBLEMES TRAITES	61
4 - DISTRIBUTION DE LA VARIABLE \underline{n}_T	61
5 - DISTRIBUTIONS CONCERNANT UN SEUL ETAT E_1	63
5.1 - <u>Probabilités $p(n_i 1)$ et $p(n_{t,i} 1)$</u>	63
5.1.1 - Probabilités $p(n_i 1)$	63
5.1.2 - Probabilités $p(n_{t,i} 1)$	63
5.1.3 - Fonctions génératrices des probabilités	64
5.1.4 - Remarque	64
5.2 - <u>Probabilités $p(n_i n_T)$ et $p(n_{t,i} n_T)$</u>	64
5.2.1 - Fonctions génératrices des probabilités $p(n_i n_T)$	64
5.2.2 - Probabilités $p(n_i n_T)$	65
5.2.3 - Fonctions génératrices des probabilités $p(n_{t,i} n_T)$	65
5.2.4 - Probabilités $p(n_{t,i} n_T)$	65
5.3 - <u>Probabilités $p_a(n_i)$ et $p_a(n_{t,i})$</u>	65
5.3.1 - Fonction génératrice des $p_a(n_i)$	66
5.3.2 - Probabilités $p_a(n_i)$	66
5.3.3 - Fonction génératrice des $p_a(n_{t,i})$	66
5.3.4 - Probabilités $p_a(n_{t,i})$	66
6 - CAS GENERAL	67
6.1 - <u>Variables $(\underline{n} 1)$ et $(\underline{n}_t 1)$</u>	67
6.1.1 - Moyenne de $(\underline{n} 1)$ et $(\underline{n}_t 1)$	67
6.1.2 - Variance de " "	67
6.1.3 - Fonctions génératrices des $p(\underline{n} 1)$ et $p(\underline{n}_t 1)$	67
6.1.4 - Probabilités $p(\underline{n} 1)$ et $p(\underline{n}_t 1)$	68
6.2 - <u>Variables $(\underline{n} n_T)$ et $(\underline{n}_t n_T)$</u>	68
6.2.1 - Fonctions génératrices	68
6.2.2 - Moyenne de $(\underline{n} n_T)$ et $(\underline{n}_t n_T)$	68
6.2.3 - Variance de " "	68

	Pages
6.3 - Variables (\underline{n}) et (\underline{n}_t)	69
6.3.1 - Moyenne de (\underline{n}_i) et (\underline{n}_t)	69
6.3.2 - Variances de (\underline{n}_i)	69
6.3.3 - Fonctions génératrices	70
6.4 - Solution asymptotique	70
6.4.1 - Examen plus approfondi des distributions de $(\underline{n}_i n_T)$ et $(\underline{n}_{t,i} n_T)$	70
6.4.1.1 - Application du théorème de la limite centrale	70
6.4.1.2 - Illustration	72
6.4.2 - Distributions de $(\underline{n} n_T)$ et $(\underline{n}_t n_T)$	72
6.4.3 - Conclusions et illustration	73
7 - TEMPS DE TRANSIT	74
8 - CONCLUSIONS GENERALES CONCERNANT LA CARDE ...	74
9 - POSSIBILITES D'APPLICATION DU MODELE DE MONFORT A D'AUTRES DOMAINES	76
10 - APPENDICE I - Fonction génératrice des probabilités ...	79
11 - APPENDICE II - Distribution géométrique	80
12 - APPENDICE III - Tableau récapitulatif	81
13 - REMERCIEMENTS	82
14 - BIBLIOGRAPHIE	82
15 - TABLE DES MATIERES	83