REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

JEAN TEGHEM

Un modèle de gestion de stocks à entrées aléatoires

Revue de statistique appliquée, tome 14, nº 2 (1966), p. 37-46

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1966__14_2_37_0>

UN MODÈLE DE GESTION DE STOCKS A ENTRÉES ALÉATOIRES

Jean TEGHEM[1]
Université Libre de Bruxelles

1 - INTRODUCTION ET DESCRIPTION DU MODELE

Notre but, dans ce qui suit, est de présenter d'une manière simple une étude de Karlin sur un modèle de stock qui, pour être assez réaliste dans bien des cas, est, nous semble-t-il, d'un type peu courant dans les recherches mathématiques habituelles.

Les différentes phases de l'étude de Karlin sont réparties dans les chapitres 8, 14 et 15 de "Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production" (Arrow, Karlin and Scarf, Stanford University Press, 1958), où elles voisinent avec les phases similaires de l'étude d'autres modèles. C'est en les groupant dans un exposé dont le modèle considéré soit le seul objet et non l'un des objets, et en omettant volontairement les démonstrations analytiques longues et certains détails d'énoncé, que nous espérons mettre ce modèle et son étude en lumière, tout en préparant et en facilitant, pour ceux qui y trouveraient intérêt, la lecture des textes originaux plus complets de Karlin sur le sujet. Ce qui suit n'est en fait qu'un résumé de ces textes.

Supposons le temps partagé en périodes et soit x le niveau du stock au début d'une période (d'une façon plus précise, pour les besoins de l'étude dynamique, x_n le niveau du stock au début de la $(n + 1)^e$ période, $n = 0, 1, 2, \dots$). Ce niveau peut être négatif, c'est-à-dire que des demandes peuvent être mises en attente. On suppose connue la probabilité de la demande ξ au cours d'une période - en faisant l'hypothèse, pour des raisons de facilité technique, de l'existence d'une densité de probabilité $\varphi(\xi)$ continue - et que l'on se trouve, en tout début de période, devant le dilemme : ne pas réapprovisionner ou réapprovisionner, mais avec, dans ce dernier cas, cette particularité que la quantité η entrant en stock est aléatoire (de fonction de répartition $H(y) = \text{Prob.} (\eta \leqslant y)$ connue). L'hypothèse de telles entrées aléatoires η est notamment justifiée dans le cas de la production de pièces complexes ou de fabrication délicate, sujette à une large proportion, aléatoire, de rebut. Elle peut répondre valablement aussi aux conditions de la production agricole. Le cas habituellement traité de quantités entrantes connues avec certitude n'est, par ailleurs, qu'un cas particulier de celui à quantités entrantes aléatoires. Le délai de livraison est considéré comme négligeable en regard de la période. Il existe des coûts s(.) et p(.), respectivement

----

(1) Exposé fait le 17 juin 1965, au cours d'une réunion d'étude organisée par le Centre de Formation aux Applications industrielles de la Statistique.

de stockage - ou d'entretien ou de perte sur excédent - et de pénurie, évalués en fin de période, et que nous supposerons être des fonctions à dérivées continues. La décision d de réapprovisionnement (commande ou production) ou de non-réapprovisionnement doit être prise en fonction de x, de la prévision de la demande, donnée par φ, de la fonction de répartition H et des coûts s(.) et p(.) :

$$d = d(x, \varphi(.), H, s(.), p(.)).$$

Il convient de minimiser l'espérance mathématique du coût total.

2 - POLITIQUES OPTIMALES

Karlin a démontré que sous certaines conditions assez générales quant à φ, H, s et p, la politique optimale appartient à la classe $\mathfrak{L}$ des politiques caractérisées par une seule valeur critique x^* :

$$\text{si } x < x^*, \text{ réapprovisionnement ; si } x \geqslant x^*, \text{ non.}$$

Il a considéré surtout, à cet effet, le cas statique du "one-stage", où l'on minimise l'espérance du coût pour une seule période.

La démonstration consiste en la recherche de conditions sous lesquelles la différence entre les espérances mathématiques $C_1(x)$ et $C(x)$ des coûts, associées respectivement aux deux possibilités de réapprovisionnement et de non-réapprovisionnement, change de signe au plus en un seul point, x^*.

On peut établir ainsi que la politique optimale appartient à la classe $\mathfrak{L}$, par exemple dès que les fonctions s(u) et p(u) sont croissantes, convexes, et nulles pour $u < 0$, et ce sans aucune condition particulière sur φ ni sur H. On a, en effet, avec :

$$S(\omega) = \int_0^\infty s(\omega + \eta)\, dH(\eta)$$

et

$$P(\omega) = \int_0^\infty p(\omega - \eta)\, dH(\eta),$$

$$C_1'(x) - C'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [S'(\xi) - s'(\xi)]\, \varphi(x-\xi)\, d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} [P'(-\xi) - p'(-\xi)]\, \varphi(x-\xi)\, d\xi.$$

Or, grâce aux hypothèses de convexité sur s(u) et p(u),

$$S'(\xi) \geqslant s'(\xi) \qquad \text{et} \qquad p'(-\xi) \geqslant P'(-\xi).$$

La différence $C_1(x) - C(x)$ change donc de signe au plus en un seul point.

Lorsque φ appartient à la classe des fonctions de fréquence de Pólya, qui contient un grand nombre des densités souvent utilisées en statistique, et notamment les densités des distributions gamma, des distributions normales tronquées et de la distribution uniforme sur (0, 1), on peut ne plus supposer la convexité de s(u).

Il suffit, en outre, de quelques hypothèses sur la fonction H pour qu'on puisse aussi ne plus supposer la convexité de p(u). Il en est, par exemple, ainsi, dans le cas particulier d'une fonction H dégénérée correspondant à une quantité η non aléatoire, fixée.

Enfin, la politique optimale appartient aussi à la classe $\mathfrak{L}$ si $h(y) = H'(y)$ étant une fonction de fréquence de Pólya, $s(u)$ est une fonction croissante et $p(u) \equiv c$ pour $u > 0$ et $\equiv 0$ pour $u \leqslant 0$.

Des résultats de même nature peuvent être établis relativement à un modèle plus général, dans lequel le producteur a le choix entre la non-production et plusieurs niveaux N_i de production ($i = 1, 2, \ldots, l$), par exemple un niveau normal, habituel, et un niveau d'urgence. Soient $H_i(y)$ les fonctions de répartition des entrées correspondant aux niveaux N_i. Il suffit qu'elles appartiennent à la classe des fonctions de répartition à rapport de vraisemblance monotone, classe qui comprend notamment les fonctions de répartition des distributions gamma, normales tronquées et de Poisson, et que $s(u)$ et $p(u)$ soient des fonctions convexes croissantes pour que la politique optimale soit du type suivant :

il existe $m \leqslant l$ valeurs critiques $x^*_{i_m} < x^*_{i_{m-1}} < \ldots < x^*_{i_1}$ telles que :

si $0 \leqslant x < x^*_{i_m}$, on produise au niveau N_{i_m},

si $x^*_{i_k} \leqslant x < x^*_{i_{k-1}}$ ($k = 2, \ldots, m$), on produise au niveau $N_{i_{k-1}}$,

si $x^*_{i_1} \leqslant x$, on ne produise rien.

Nous nous limiterons dans la suite au cas d'un seul niveau ($l = 1$) et nous nous arrêterons à l'étude des politiques de la classe $\mathfrak{L}$. Elles sont intéressantes en raison de leur simplicité, de leur caractère "intuitif" et de leurs qualités d'optimalité, qualités qui ont été énoncées plus haut en version statique, mais qui subsistent, moyennant quelques hypothèses supplémentaires sur les fonctions de coût, en version dynamique (infinité de périodes et facteur d'actualisation). Elles présentent, en outre, l'intérêt que pour une distribution exponentielle négative, ou plus généralement gamma, de la demande, et des coûts $s(u) = s.u$ et $p(u) = p.u$ (pour $u > 0$), la détermination de la valeur optimale de x^* en modèle dynamique est analytiquement possible.

Cette détermination fait l'objet du paragraphe suivant. Nous y supposerons que, quelle que soit la valeur de x^*, le niveau x_n possède, pour $n \longrightarrow \infty$, une distribution-limite indépendante de x_0. Cette propriété de caractère ergodique implique, bien entendu, $E(\eta) > E(\xi)$. L'implication réciproque peut s'établir, dans le cas d'une demande exponentielle négative et d'une entrée de distribution quelconque, par un recours aux théories des files d'attente et du renouvellement. Nous dirons comment dans le paragraphe 5.

3 - RECHERCHE DE LA VALEUR OPTIMALE DE x^* DANS LE CAS D'UNE DEMANDE DE DISTRIBUTION EXPONENTIELLE NEGATIVE (OU GAMMA), $s(u) = s.u$, $p(u) = p.u$.

Cette recherche comprend trois phases : A. détermination de la fonction de répartition-limite de x_n ; elle dépend de x^*, φ et H ; B. calcul de l'espérance mathématique associée du coût total ; elle dépend de x^*, φ, H, s et p ; C. détermination de la valeur de x^* qui minimise cette espérance.

On retrouve dans ce schéma de recherche la dichotomie habituelle du traitement des problèmes de stock ; il comprend, en effet, une partie descriptive purement mathématique - la phase A - dans le résultat de laquelle sont introduits ensuite, en vue de la recherche de l'optimum, les éléments de nature économique s et p.

Soit $F_n(x)$ la fonction de répartition de x_n et soit $F_{n+1} = T(F_n)$. La fonction de répartition-limite $\mathcal{F}$ doit satisfaire à $\mathcal{F} = T(\mathcal{F})$; elle est donc un point fixe de la transformation T. L'explicitation de T n'est pas difficile ; en déduire $\mathcal{F}$ est plus malaisé.

On a

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n - \xi & \text{si} \quad x_n \geqslant x^* \\ x_n + \eta - \xi & \text{si} \quad x_n < x^*, \end{cases}$$

d'où, pour $x \geqslant x^*$,

$$\begin{aligned} &\text{Prob.}(x < x_{n+1} < x + dx) = \text{Prob.}(x_n \geqslant x,\ x_n - x - dx < \xi < x_n - x) + \\ &\text{Prob.}(x_n < x^*,\ \eta > x - x_n,\ x_n + \eta - x - dx < \xi < x_n + \eta - x), \end{aligned}$$

et pour $x < x^*$,

$$\begin{aligned} &\text{Prob.}(x < x_{n+1} < x + dx) = \text{Prob.}(x_n \geqslant x^*,\ x_n - x - dx < \xi < x_n - x) + \\ &\text{Prob.}(x \leqslant x_n < x^*,\ \eta \geqslant 0,\ x_n + \eta - x - dx < \xi < x_n + \eta - x) + \\ &\text{Prob.}(x_n < x,\ \eta > x - x_n,\ x_n - \eta - x - dx < \xi < x_n + \eta - x), \end{aligned}$$

dont on tire,

pour $x \geqslant x^*$,

$$dF_{n+1}(x) = dx \left[\int_x^\infty \varphi(t - x)\, dF_n(t) + \int_{-\infty}^{x^*} dF_n(t) \int_{x-t}^\infty \varphi(t + \eta - x)\, dH(\eta) \right]$$

et pour $x < x^*$,

$$\begin{aligned} dF_{n+1}(x) = dx \Bigg[&\int_{x^*}^\infty \varphi(t - x)\, dF_n(t) + \int_x^{x^*} dF_n(t) \int_0^\infty \varphi(t + \eta - x)\, dH(\eta) + \\ &\int_{-\infty}^x dF_n(t) \int_{x-t}^\infty \varphi(t + \eta - x)\, dH(\eta) \Bigg]. \end{aligned} \tag{2}$$

Supposons maintenant que la demande ait une distribution exponentielle négative : $\varphi(\xi) = \lambda e^{-\lambda\xi}$, $\lambda > 0$. Les équations (1) et (2) donnent, dans ce cas, pour $n \longrightarrow \infty$, si l'on remplace $d\mathcal{F}$ par $f(x)\, dx$,

pour $x \geqslant x^*$

$$e^{-\lambda x} f(x) = \lambda \int_x^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt + \lambda \int_{-\infty}^{x^*} f(t)\, dt \int_{x-t}^\infty e^{-\lambda(t+\eta)}\, dH(\eta), \tag{3}$$

pour $x < x^*$,

$$\begin{aligned} e^{-\lambda x} f(x) = \lambda \int_{x^*}^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt + \lambda \int_x^{x^*} f(t)\, dt \int_0^\infty e^{-\lambda(t+\eta)}\, dH(\eta) + \\ \lambda \int_{-\infty}^x f(t)\, dt \int_{x-t}^\infty e^{-\lambda(t+\eta)} dH(\eta), \end{aligned} \tag{4}$$

dont on construit sans grande difficulté la solution

$$f(x) = \begin{cases} C e^{-\alpha(x^* - x)} & \text{pour } x < x^* \\ C\lambda \int_{x-x^*}^\infty dz \int_z^\infty e^{-\alpha(y-z)} dH(y) & \text{pour } x \geqslant x^*, \end{cases}$$

où $\alpha > 0$ satisfait à l'équation de condition

$$\lambda - \alpha = \lambda \int_0^\infty e^{-\alpha t} dH(t), \qquad (5).$$

qui, en vertu de l'inégalité $E(\eta) > E(\xi)$, possède une solution positive unique, et où C est une constante de normalisation, qui est indépendante de x^*.

Il résulte d'une application de la méthode de Wiener-Hopf que cette solution f(x) de {(3), (4)} est unique.

L'espérance mathématique correspondante du coût est, au facteur C près,

$$\mathcal{L}(x^*) = \int_{x^*}^\infty L(x) \left(\lambda \int_{x-x^*}^\infty e^{\alpha z} dz \int_z^\infty e^{-\alpha y} dH(y)\right) dx + \int_0^{x^*} e^{-\alpha(x^*-x)} M(x)\, dx +$$
$$\int_{-\infty}^0 e^{-\alpha(x^*-x)} N(x)\, dx,$$

où L(x), M(x) et N(x) sont les espérances mathématiques conditionnelles respectivement pour $x > x^*$, $0 < x < x^*$ et $x < 0$, lesquelles fonctions se déterminent par un calcul de probabilités fort simple :

$$L(x) = s \int_0^x (x - \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi + p \int_x^\infty (\xi - x)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

(termes correspondant respectivement au coût de stockage pour $\xi < x$ et au coût de pénurie pour $\xi > x$),

$$M(x) = s \int_0^x (x - y) \left(\int_0^\infty \varphi(y + t)\, dH(t)\right) dy + s \int_{-\infty}^{c} (x - y) \left(\int_{-y}^\infty \varphi(y + t)\, dH(t)\right) dy$$
$$+ p \int_x^\infty (y - x) \left(\int_0^\infty \varphi(y + t)\, dH(t)\right) dy$$

(termes correspondant respectivement au coût de stockage pour:

$\eta < \xi < \eta + x$,

au coût de stockage pour $\xi < \eta$ et au coût de pénurie pour $\xi > \eta + x$),

$$N(x) = s \int_{-\infty}^x (x - y) \left(\int_{-y}^\infty \varphi(y + t)\, dH(t)\right) dy + p \int_x^0 (y - x)$$
$$\left(\int_{-y}^\infty \varphi(y + t)\, dH(t)\right) dy + p \int_0^\infty (y - x) \left(\int_0^\infty \varphi(y + t)\, dH(t)\right) dy,$$

(termes correspondant respectivement au coût de stockage pour $\xi < \eta + x$, au coût de pénurie pour $\eta + x < \xi < \eta$ et au coût de pénurie pour $\xi > \eta$).

La dérivée seconde $\mathcal{L}''(x^*)$ est positive, et $\mathcal{L}'(x^*)$ possède donc au plus un zéro simple, nécessairement minimum absolu. On montre par dérivation, intégration par parties et en tenant compte de (5) que la solution de $\mathcal{L}'(x^*) = 0$ est :

$$-\frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{\lambda E(\eta)\, s}{s + p}\right).$$

Le choix optimal de x^* est ainsi, sous la contrainte $x^* \geqslant 0$,

$$\max \left[0, - \frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{\lambda E(\eta)\, s}{s + p} \right) \right], \tag{6}$$

expression dans laquelle η intervient par le truchement de sa moyenne $E(\eta)$ et de α, et où les coûts se manifestent sous la forme de la fraction $\frac{s}{s+p} = \frac{1}{1 + \frac{p}{s}}$.

Karlin procède aussi, selon un même schéma, mais par une démonstration beaucoup plus longue, à la détermination analytique complète de la valeur optimale de x^* dans le cas où la distribution exponentielle négative de la demande est remplacée par une distribution gamma :

$$\varphi(\xi) = \frac{\lambda^k \xi^{k-1} e^{-\lambda\xi}}{\Gamma(k)}$$

($k = 2, 3, \ldots$; pour $k = 1$, on retrouve la distribution exponentielle négative).

Nous donnons dans le paragraphe suivant des résultats numériques relatifs tant à des demandes exponentielles négatives qu'à des demandes de distribution gamma.

4 - QUELQUES RESULTATS NUMERIQUES[1]

Ils concernent une demande exponentielle négative et une demande de distribution gamma d'ordre $k = 2$, la moyenne étant dans les deux cas égale à 1.

A - <u>Demande exponentielle négative</u>, $\lambda = 1$, c'est-à-dire $\varphi(\xi) = e^{-\xi}$.

Comme on a $E(\xi) = \frac{1}{\lambda} = 1$, il convient de ne considérer que des $E(\eta) > 1$.

Le tableau 1 donne les valeurs optimales de x^* correspondant respectivement à une entrée η exponentielle négative, à une entrée η de distribution gamma d'ordre $k = 2$, puis d'ordre $k = 6$, et enfin à une quantité entrante η fixe, et ce, dans chacun des cas, pour différentes valeurs > 1 de la moyenne a de cette entrée, et chaque fois, pour $\gamma = \frac{s}{s+p} = \frac{1}{4}$ et $= \frac{3}{4}$, c'est-à-dire respectivement pour $p = 3\,s$ et $s = 3\,p$.

----

(1) reproduits ou déduits de Karlin, chapitre 14 de l'ouvrage déjà cité.

I. $dH(y) = \frac{1}{a} e^{-\frac{y}{a}} dy$, distribution exponentielle négative, $E(\eta) = a$

	a = 1,01	a = 1,05	a = 1,1	a = 1,2	a = 1,5	a = 2
$\gamma = \frac{1}{4}$	139,01	28,09	14,20	7,22	2,94	1,39
$\gamma = \frac{3}{4}$	28,05	5,02	2,12	0,63	0	0

II. $dH(y) = \left(\frac{2}{a}\right)^2 y e^{-\frac{2y}{a}} dy$, distribution gamma d'ordre k = 2, $E(\eta) = a$

	a = 1,01	a = 1,05	a = 1,1	a = 1,2	a = 1,5	a = 2
$\gamma = \frac{1}{4}$	104,37	21,18	10,76	5,53	2,31	1,12
$\gamma = \frac{3}{4}$	21,06	3,78	1,60	0,48	0	0

III. $dH(y) = \left(\frac{6}{a}\right)^6 \frac{y^5 e^{-\frac{6y}{a}}}{\Gamma(6)} dy$, distribution gamma d'ordre k = 6, $E(\eta) = a$

	a = 1,01	a = 1,05	a = 1,1	a = 1,2	a = 1,5	a = 2
$\gamma = \frac{1}{4}$	81,27	16,58	8,47	4,40	1,89	0,95
$\gamma = \frac{3}{4}$	16,40	2,96	1,26	0,39	0	0

IV. η fixe, = a

	a = 1,01	a = 1,05	a = 1,1	a = 1,2	a = 1,5	a = 2
$\gamma = \frac{1}{4}$	69,73	14,27	7,33	3,84	1,68	0,87
$\gamma = \frac{3}{4}$	14,07	2,55	1,09	0,34	0	0

Tableau 1

Les densités correspondant aux trois premières distributions d'entrées considérées ont leur maximum respectivement en 0, $\frac{a}{2}$ et $\frac{5a}{6}$; les médianes valent respectivement et approximativement 0,70 a ; 0,89 a et 0,945 a ; les variances respectives sont a^2, $\frac{a^2}{2}$ et $\frac{a^2}{6}$. Le tableau illustre, pour chacune des deux valeurs de γ considérées, l'influence - nullement inattendue - sur la valeur optimale de x^* de cette diminution, à moyenne égale, des variances et des probabilités relatives aux petites valeurs de η - c'est-à-dire à de gros pourcentages de rebut -. Il illustre aussi l'influence de γ, la valeur optimale de x^* diminuant évidemment lorsqu'augmente le rapport du coût de stockage au coût de pénurie, et l'influence très nette d'une augmentation de la moyenne a.

B - Demande de distribution gamma, k = 2, $\lambda = 2$, c'est-à-dire $\varphi(\xi) = 4\xi\, e^{-2\xi}$.

Comme on a $E(\xi) = \frac{k}{\lambda} = 1$, il convient de ne considérer que des $E(\eta) > 1$.

Le tableau 2 donne les valeurs optimales de x^* correspondant respectivement à une entrée η exponentielle négative ou fixe, et ce, dans chacun de ces deux cas, pour différentes valeurs > 1 de la moyenne, et, chaque fois, pour $\gamma = \frac{1}{4}$ et $\gamma = \frac{3}{4}$.

I. $dH(y) = \frac{1}{a} e^{-\frac{y}{a}} dy$, distribution exponentielle négative, $E(\eta) = a$

	a = 1,01	a = 1,05	a = 1,1	a = 1,2	a = 1,5	a = 2
$\gamma = \frac{1}{4}$	104,22	21,04	10,63	5,13	2,22	1,09
$\gamma = \frac{3}{4}$	21,10	3,83	1,66	0,54	0	0

II. η fixe, = a

	a = 1,01	a = 1,05	a = 1,1	a = 1,2	a = 1,5	a = 2
$\gamma = \frac{1}{4}$	35,01	7,29	3,83	2,11	1,06	0,63
$\gamma = \frac{3}{4}$	7,18	1,42	0,67	0,24	0	0

Tableau 2

Ce tableau permet de faire des constatations très semblables à celles qui ont été faites au cours de l'examen du tableau 1, à propos de l'influence sur la valeur optimale de x^* d'une diminution, à moyenne égale, de la variance de η, d'une augmentation de γ et d'une augmentation de $E(\eta)$.

Enfin, la comparaison des tableaux 1 et 2 permet de voir quelle est l'influence sur la valeur optimale x^* de la diminution de la dispersion de la demande, qui résulte de la substitution à une demande exponentielle négative d'une demande gamma de même moyenne. Cette diminution entraîne, comme la diminution de la variance de l'entrée η, une diminution de la valeur optimale de x^* (et non une augmentation de cette valeur, comme le dit Karlin, à la suite de la comparaison de deux tableaux correspondant à des moyennes de demande différentes).

5 - L'INEGALITE $E(\eta) > E(\xi)$ EST UNE CONDITION SUFFISANTE D'ERGODISME

Il s'agit de la propriété annoncée à la fin du paragraphe 2.

Karlin démontre, grâce à une transposition inhabituelle du problème de stock en un problème de file d'attente, que, pour une demande exponentielle négative et une entrée de distribution quelconque, la condition $E(\eta) > E(\xi)$ est suffisante pour que x_n possède une distribution-limite indépendante de x_0, pour $n \longrightarrow \infty$.

Le modèle de file d'attente qu'il substitue au modèle de gestion de stock est celui d'un centre de capacité illimitée, à une station, dans lequel les intervalles entre arrivées sont les η (entrées en stock) et les durées de service sont les demandes ou parties de demandes qui, dans le modèle de gestion de stock, sont mises en attente. Les durées de service sont ainsi exponentielles négatives (grâce à la propriété d'oubli de ce type de distribution).

Karlin suppose, pour sa démonstration, et ce sans nuire à la généralité, que $x^* = 0$. Considérons, dans la figure 1, pour plus de précision dans la description du modèle d'attente adopté, une réalisation particulière du processus associé au modèle de gestion de stock. On y a pris $x_0 = 0$ et supposé une diminution linéaire, de pente -1, du stock. La variable à laquelle on s'intéresse est l'ordonnée des points marqués $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$

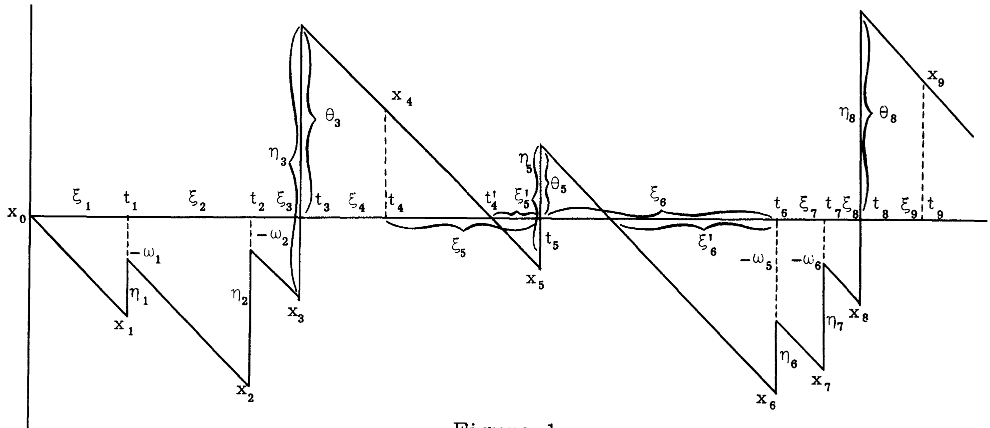

Figure 1

Dans le modèle d'attente associé, on suppose qu'un premier client se présente au centre à l'instant $t = 0$, le guichet étant supposé libre, et l'on prend pour durées successives des services et pour intervalles entre arrivées, si l'on désigne par σ_i la durée de service du i^e client ($i = 1, 2, \dots$) et par α_i l'intervalle de temps qui sépare l'arrivée du i^e client de l'arrivée du $(i+1)^e$.

$$\sigma_1 = \xi_1, \quad \sigma_2 = \xi_2, \quad \sigma_3 = \xi_3, \quad \sigma_4 = \xi_5', \quad \sigma_5 = \xi_6', \quad \sigma_6 = \xi_7, \quad \dots\dots$$

$$\alpha_1 = \eta_1, \quad \alpha_2 = \eta_2, \quad \alpha_3 = \eta_3, \quad \alpha_4 = \eta_5, \quad \alpha_5 = \eta_6, \quad \alpha_6 = \eta_7, \quad \dots\dots .$$

Les $\theta_3, \theta_5, \theta_8, \dots$ de la figure 1 deviennent les périodes d'inactivité du serveur ; les $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ sont les durées d'attente respectivement des 2^e, 3^e, 4^e, ... clients.

La figure 2 montre le schéma d'attente associé à cette réalisation particulière. On voit que les niveaux négatifs du stock ($x_n < 0$) sont les opposés des temps de séjour τ_i dans le système :

$$- x_1 = \xi_1 = \sigma_1 = \tau_1, \quad - x_2 = \xi_2 + \omega_1 = \sigma_2 + \omega_1 = \tau_2,$$

$$- x_3 = \xi_3 + \omega_2 = \sigma_3 + \omega_2 = \tau_3, \quad - x_5 = \xi_5' = \sigma_4 = \tau_4,$$

$$- x_6 = \xi_6' = \sigma_5 = \tau_5, \quad - x_7 = \xi_7 + \omega_5 = \sigma_6 + \omega_5 = \tau_6,$$

$$- x_8 = \xi_8 + \omega_6 = \sigma_7 + \omega_6 = \tau_7, \quad \dots$$

Il résulte dès lors d'études classiques sur les systèmes GI/G/1 que la condition $E(\eta) > E(\xi)$ est suffisante pour que la distribution conditionnelle de $x_n | x_n < 0$ converge, pour $n \longrightarrow \infty$, vers une distribution-limite indépendante de x_0. La Prob. $(x_n < 0)$ converge aussi, comme on peut le voir par la théorie du renouvellement.

Quant aux $x_n > 0$, ils sont les différences entre durées d'inactivité et sommes-inférieures à ces durées- de variables indépendantes de même distribution. On peut montrer par la théorie du renouvellement que leur distribution converge aussi vers une distribution-limite indépendante de x_0.

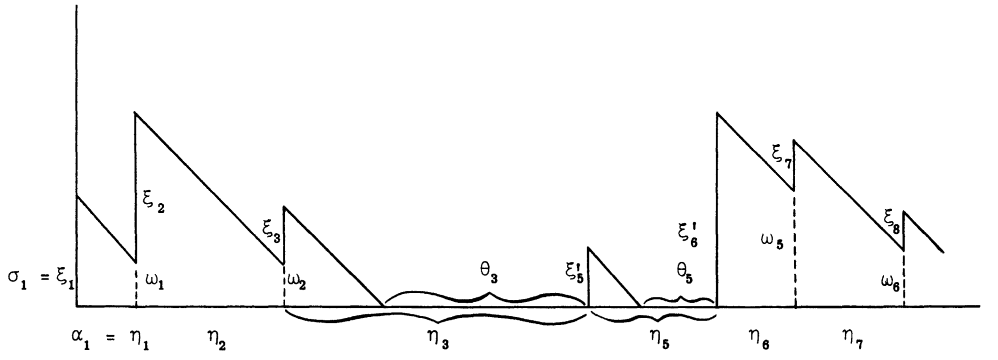

Figure 2

L'ensemble de ces divers résultats conduit à la propriété ergodique annoncée au sujet des x_n en général.