REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

F. BASTENAIRE

Un test de signification des différences entre les moyennes de plusieurs courbes de réponse estimées par la méthode « staircase »

Revue de statistique appliquée, tome 14, n° 2 (1966), p. 19-29
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1966__14_2_19_0>

UN TEST DE SIGNIFICATION DES DIFFÉRENCES ENTRE LES MOYENNES DE PLUSIEURS COURBES DE RÉPONSE ESTIMÉES PAR LA MÉTHODE "STAIRCASE" (1)

F. BASTENAIRE

L'estimation de la moyenne et de l'écart-type de la courbe de probabilité de réponse à l'intensité d'une action exige, par les méthodes classiques (probits, maximum de vraisemblance), des essais nombreux et d'assez longs calculs. S'il n'est pas nécessaire d'estimer l'écart type avec précision, la méthode "Staircase" est intéressante car elle donne une estimation aussi bonne de la moyenne avec un plus petit nombre d'essais. Cependant, dans les applications, on cherche aussi à connaître les intervalles de confiance de moyennes correspondant à des conditions d'essai distinctes et à tester l'existence de différences entre de telles moyennes. Une méthode basée sur la comparaison de deux variances est proposée ici pour résoudre ce problème.

I - INTRODUCTION

Il existe un grand nombre de méthodes d'essais physiques, chimiques et biologiques constituées d'épreuves distinctes au cours de chacune desquelles un paramètre est fixé à un niveau arbitrairement choisi tandis qu'est observée l'apparition ou la non apparition d'un certain phénomène.

Par exemple, parmi les essais biologiques, ceux des insecticides et, plus généralement, des agents destructeurs de parasites, sont de ce type : on administre diverses doses de l'agent étudié à différents sujets et l'on note pour chacun d'eux s'il y a mort ou survie.

Parmi les essais physiques, ceux des matériaux se présentent souvent de façon analogue. Le traitement applicable aux éprouvettes du matériau dépend alors de la contrainte mécanique ou du temps ou de la concentration en tel agent corrosif et l'on observe alors si l'éprouvette est détruite ou si elle révèle tel ou tel caractère défini (attaque, fissuration etc...).

Ces modèles intéressent le statisticien dès que le phénomène observé n'est pas en relation absolument déterminée avec la valeur x du paramètre de l'essai. Dans ce cas, le phénomène se produit avec une probabilité P qui dépend de x. Si x reste le même pour n épreuves indépendantes, le phénomène se produit un nombre aléatoire de fois r suivant une loi binomiale de paramètres n et P(x).

Dans le cas le plus général, la probabilité P(x) d'apparition du phénomène peut être une fonction quelconque de x pourvu que $0 < P(x) < 1$

----

(1) Staircase : Terme anglais signifiant "Escalier".

dans l'intervalle de variation de x mais, en pratique, P(x) est, le plus souvent, une fonction monotone. Ce fait s'explique quelquefois par de simples raisons physiques mais aussi, plus fréquemment, par l'existence d'une variable aléatoire inobservable sous-jacente dont la valeur détermine l'apparition du phénomène.

Ainsi, par exemple, un insecte pris au hasard dans une population sera atteint mortellement par un produit toxique à la concentration x dans son milieu si x égale ou surpasse sa limite individuelle X de résistance au produit, limite dont on peut admettre l'existence sans pouvoir la mesurer.

On a donc :

$$P(x) = \text{Prob}\,\{X \leqslant x\} \tag{1}$$

On voit que P(x) est identique à la fonction de répartition de X. Elle est donc non-décroissante. De plus, la forme de P(x) résulte de la loi de distribution de X. Si X est normale de moyenne μ et d'écart type σ, on aura :

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \tag{2}$$

Etant donné l'importance de la loi normale, la plupart des études théoriques concernant le modèle qui nous occupe supposent que P(x) possède la forme donnée par l'équation (2). Son second membre contient deux paramètres, la moyenne ou médiane μ et l'écart-type σ qui, dans presque tous les cas, sont inconnus. Il faut donc les estimer et il existe pour cela plusieurs méthodes comme la méthode des probits, celle du maximum de vraisemblance, ou la méthode "staircase". Nous ne nous étendrons pas ici sur les principes de ces méthodes et leurs avantages respectifs qui ont déjà été exposés ailleurs [1]. Le problème de l'estimation étant supposé résolu, il se présente alors celui de comparer entre elles des estimations obtenues dans des conditions différentes. Sa solution dépend évidemment de la méthode d'estimation adoptée et nous ne nous occuperons ici que de la méthode "staircase" qui présente un assez grand intérêt en raison de sa simplicité et du nombre d'épreuves dont elle permet de se contenter, le principal inconvénient des méthodes plus classiques étant, en effet, d'exiger un grand nombre d'essais.

II - LA METHODE "STAIRCASE"

II. a - Principe.

Rappelons rapidement le mode opératoire défini par cette méthode. Une échelle de valeurs du paramètre x espacées en progression arithmétique, x_0 , x_1 , x_2 , . . . , x_n étant choisie (avec l'espacement a), une première épreuve est réalisée en assignant à x_i la valeur que l'on juge a priori la plus voisine de μ (dans les applications on a presque toujours une idée plus ou moins groissière de la valeur de μ).

Deux évènements, de probabilités P(x) et 1 - P(x) respectivement, sont alors possibles, la probabilité de l'un d'eux étant une fonction croissante de x.

Soit E ce dernier évènement. La méthode staircase est alors définie par la règle d'action suivante déterminant la valeur de x à adopter au cours de l'essai suivant :

1/ Si E a eu lieu, donner à x la valeur x_{i-1} ;

2/ Si E n'a pas eu lieu, donner à x la valeur x_{i+1} .

L'expérimentateur réalise ainsi n épreuves, n étant théoriquement quelconque mais devant pratiquement être égal ou supérieur à 10.

La figure 1 donne la représentation graphique des résultats d'une telle suite d'épreuves : les valeurs de x fluctuent autour de la moyenne μ et continueraient indéfiniment à le faire si les essais étaient poursuivis à l'infini.

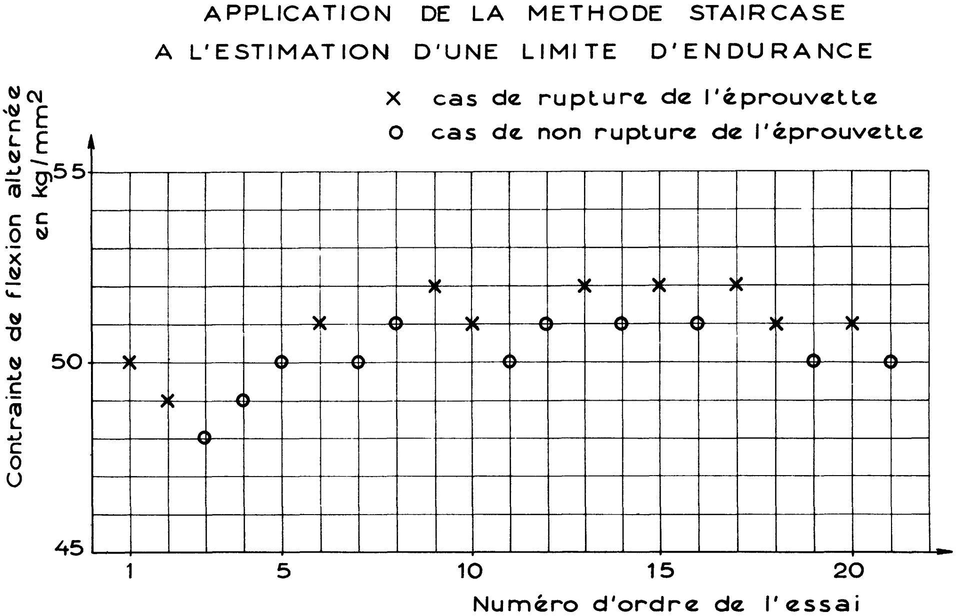

Figure 1

II. b - Calcul des estimations de μ et σ.

Dixon et Mood [2] ont indiqué comment calculer des estimations de μ et σ à partir des résultats.

Des deux évènements possibles : E et son contraire, on détermine celui qui s'est produit le moins souvent au cours des essais. On compte alors combien de fois ce dernier a eu lieu à chaque niveau, n_i, et on calcule les deux sommes :

$$A = \sum_i i\, n_i$$

$$B = \sum_i i^2\, n_i$$

L'estimation de μ est donnée par la formule suivante :

$$m = x_0 + a\left(\frac{A}{N} \pm \frac{1}{2}\right) \qquad (3)$$

dans laquelle a est l'espacement des niveaux x_i tandis que :

$$N = \Sigma\, n_i$$

La formule (3) est appliquée avec le signe - si l'évènement que l'on a compté est E (celui dont la probabilité est une fonction croissante de x). Elle est appliquée avec le signe + dans le cas contraire.

On peut aussi estimer σ :

$$s = 1,62\ a \left(\frac{N B - A^2}{N^2} + 0,029\right) \tag{4}$$

mais cette estimation n'est valable, d'après les auteurs, que si :

$$\frac{N B - A^2}{N^2} > 0,3 \tag{5}$$

II. c - Propriétés de m et s.

L'estimation m de μ est distribuée de façon sensiblement normale et sans biais avec l'écart type :

$$\sigma_m = \frac{\sigma G}{\sqrt{N}} \tag{6}$$

G est un facteur dont les auteurs de la méthode ont donné un graphique ;

G varie avec le rapport $\frac{a}{\sigma}$ de l'espacement des valeurs de x à l'écart type σ de la courbe de réponse P(x) ; G varie aussi, mais assez peu, en fonction de la position de l'échelle des valeurs de x par rapport à μ. Pour des valeurs de a/σ comprises entre 0,5 et 2, G varie entre 0,95 et 1,1. Il est donc de l'ordre de l'unité.

De façon analogue, l'écart type σ_s de l'estimation s de σ est donné par la formule :

$$\sigma_s = \frac{H\sigma}{\sqrt{N}} \tag{7}$$

où H est un facteur dépendant aussi de a/σ et de la position de l'échelle des valeurs de x par rapport à la moyenne vraie μ.

Les variations de H sont plus importantes que celles de G. Ainsi, alors que le minimum possible de H est inférieur à 1, H atteint et dépasse 2 pour $a < 0,4\sigma$ ou $a > 2,6\sigma$.

Lorsqu'on applique la méthode, il faut donc être très attentif au choix de a/σ, choix d'autant plus délicat que σ est plus mal connu. En pratique, il suffit que la condition :

$$0,5\sigma < a < 2,5\sigma$$

soit réalisée pour que la méthode donne de bons résultats.

III - COMPARAISON D'ESTIMATIONS OBTENUES DANS DES CONDITIONS D'ESSAI DIFFERENTES

Ce problème se présente, en pratique, beaucoup plus fréquemment que celui de l'estimation seule. Deux cas sont possibles :

1/ Les écarts-types vrais σ_1 , σ_2 ,..., σ_k des k courbes de réponse étudiées sont inconnus mais égaux entre eux.

2/ Ces écarts types sont inégaux.

Nous supposerons, dans tout ce qui suit, que l'on se trouve dans le premier cas. En fait, il en est très souvent ainsi car, si l'on s'interroge sur la signification des différences entre des moyennes estimées par la méthode staircase, c'est que ces différences sont relativement faibles. A moins que les conditions d'essai n'aient un effet spécifique sur la dispersion, on aura alors des écarts types peu différents entre eux.

Quoi qu'il en soit, il peut être bon de s'en assurer avant de procéder à la comparaison des moyennes. En général, cette vérification n'est pas facile parce que les estimations des écarts types σ_i ont des dispersions élevées et des distributions de forme mal connue. Il existe toutefois un cas particulier où cette vérification est aisée, c'est lorsque la méthode a été appliquée en effectuant le même nombre d'épreuves dans chaque cas. Les estimations s_1, s_2,..., s_k ont alors toutes la même précision et, pour vérifier l'égalité des σ_i entre eux, il suffit de comparer la dispersion observée des s_i à leur écart-type théorique donné par la formule (7) dans laquelle σ inconnu est remplacé par la moyenne arithmétique de s_1, s_2,..., s_k.

Pour comparer les estimations m_1 , m_2 ,..., m_k des moyennes théoriques μ_1 , μ_2 ,..., μ_k des courbes de réponse, il faut maintenant, en supposant $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_k = \sigma$ procéder en deux temps :

1/ Estimer le σ commun.

2/ Comparer les moyennes sur la base de cette estimation commune.

III. a - Estimation de σ.

Tout en posant $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_k = \sigma$, nous nous plaçons dans le cas général où le nombre des épreuves faites pour étudier chaque courbe de réponse peut être variable. Les différentes estimations s_i n'ont pas alors la même précision et elles ne peuvent pas jouer un rôle symétrique dans l'estimateur de σ.

Nous utiliserons une estimation pondérée :

$$s = \frac{\Sigma\, w_i\, s_i}{\Sigma\, w_i} \tag{8}$$

dans laquelle les coefficients w_i sont choisis de façon que la variance de s soit minimale.

On sait que, pour obtenir ce résultat, il suffit que les poids w_i soient inversement proportionnels aux variances des s_i , que l'on peut déduire de (7) :

$$V(s_i) = H_i^2\, \sigma^2/N_i \tag{9}$$

Pour les w_i , définis à un facteur de proportionnalité près, on prend donc :

$$w_i = N_i/H_i^2 \tag{10}$$

Il faut noter toutefois que les coefficients H_i sont donnés par le graphique de Dixon et Mood en fonction de a/σ et que si a_i, espacement des valeurs de x utilisé pour la détermination de la ième courbe de réponse, est connu, il n'en est pas de même de σ. Pour utiliser l'abaque, il faut donc disposer d'une première évaluation de σ.

A cet effet, la moyenne arithmétique simple des s_i, soit $\bar{s}$, peut suffire. On obtient alors, par la formule (8), une estimation plus fine de σ :

$$s^{(1)} = \frac{\sum_i N_i\, s_i / H_i^2}{\sum_i N_i / H_i^2} \tag{11}$$

Si cette estimation diffère notablement de $\bar{s}$, il faut s'en servir pour en déduire de nouvelles valeurs des coefficients H_i à partir des $a_i/s^{(1)}$ plus proches des a_i/σ que les $a_i/\bar{s}$.

Les coefficients $H_i^{(1)}$ ainsi obtenus permettent de calculer une seconde estimation $s^{(2)}$ de σ qui permet à son tour de calculer de nouveaux coefficients $H_i^{(2)}$ et ainsi de suite. C'est une méthode d'itération qui aboutit à l'estimation finale de σ en un nombre de pas qui, en pratique, ne dépasse guère deux ou trois.

III. b - Précision de l'estimation de σ.

L'estimation s de σ à laquelle mène la méthode précédente peut encore présenter une dispersion notable bien qu'elle soit la moyenne de plusieurs estimations indépendantes.

Les coefficients w_i désignant maintenant les valeurs asymptotiques des coefficients de pondération (en pratique les dernières valeurs calculées), on obtient à partir de l'équation (8) :

$$V(s) = \Sigma\ w_i^2 V(s_i)/(\Sigma\ w_i)^2 \tag{12}$$

Compte tenu du fait que

$$\begin{aligned} w_i &= N_i/H_i^2 \\ &= \sigma^2/V(s_i)\ , \end{aligned}$$

il vient :

$$V(s) = \sigma^2/(\Sigma\ w_i) \tag{13}$$

d'où :

$$V(s/\sigma) = 1/(\Sigma\ w_i) \tag{14}$$

La variance de s/σ est donc numériquement calculable lorsqu'on a estimé σ par la méthode exposée en III. a.

III. c - Comparaison des estimations m_i des paramètres μ_i.

Les quantités m_i sont évidemment des variables aléatoires indépendantes puisque calculées à partir de groupes de résultats d'épreuves indépendantes.

Les distributions des m_i étant sensiblement normales, il est facile de tester l'hypothèse $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$ quand on connaît les variances des estimations m_i des μ_i, ce que nous allons supposer dans une première étape.

III. c.1 - Test de l'hypothèse $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$, σ étant connu.

De la formule (6), on tire :

$$V(m_i) = \frac{\sigma^2 G_i^2}{N_i} \tag{15}$$

Posons :

$$v_i = N_i / G_i^2 \tag{16}$$

de sorte que :

$$V(m_i) = \sigma^2 / v_i$$

d'où :

$$V(m_i \sqrt{v_i}) = \sigma^2 \tag{17}$$

L'équation (17) montre que les k variables aléatoires $m_i\sqrt{v_i}$ ont toutes même variance σ^2. On peut donc leur appliquer les théorèmes de l'analyse de variance.

La forme quadratique $\Sigma v_i\, m_i^2$ peut être décomposée en deux formes quadratiques au moyen de l'identité algébrique :

$$\Sigma\, v_i\, m_i^2 = \Sigma\, v_i (m_i - \bar{m})^2 + \bar{m}^2 (\Sigma\, v_i) \tag{18}$$

dans laquelle

$$\bar{m} = (\Sigma\, v_i\, m_i)/(\Sigma v_i)\ . \tag{19}$$

Le rang de la forme quadratique $\bar{m}^2(\Sigma\, v_i)$ est évidemment égal à 1 puisque cette quantité est le carré de la forme linéaire $\bar{m}\sqrt{\Sigma\, v_i}$. De plus, l'équation (19) montre que cette forme linéaire s'exprime, en fonction des variables d'égale variance $m_i\sqrt{v_i}$, au moyen de l'équation :

$$\bar{m}\sqrt{\Sigma\, v_i} = \sum_i \sqrt{v_i / \Sigma\, v_i}\ .\ m_i \sqrt{v_i} \tag{20}$$

dans laquelle la somme des carrés des coefficients des variables $m_i\sqrt{v_i}$ est égale à 1.

On peut donc regarder l'équation (20) comme la première ligne d'une transformation linéaire orthogonale de l'ensemble des variables $m_i\sqrt{v_i}$. Comme cette transformation conserve la norme (ou somme des carrés), la somme des carrés de ses (k - 1) autres lignes doit nécessairement être égale à la différence entre $\Sigma v_i\, m_i^2$ et $\bar{m}^2\, \Sigma\, v_i$, c'est-à-dire à $\Sigma\, v_i (m_i - \bar{m})^2$ d'après l'identité (18).

Or, les variables que cette transformation orthogonale substitue aux $m_i\sqrt{v_i}$ sont encore normales, indépendantes et d'égale variance σ^2. Il en résulte que $\bar{m}^2\, .\, \Sigma\, v_i$, carré de la première de ces variables, et $\Sigma\, v_i (m_i - \bar{m})^2$ somme des carrés des (k - 1) autres, sont distribuées comme des variables $\sigma^2 \chi^2$ centrées ou non, selon les espérances mathématiques des $m_i\sqrt{v_i}$, avec 1 et (k - 1) degrés de liberté respectivement.

Afin de déterminer le rôle que jouent les μ_i dans la distribution de $\Sigma v_i (m_i - \bar{m})^2$, effectuons le changement de variables :

$$\varepsilon_i = m_i - \mu_i \tag{21}$$

et posons, comme en (19) :

$$\bar{\varepsilon} = (\Sigma v_i \varepsilon_i)/(\Sigma v_i) \tag{22}$$

et

$$\bar{\mu} = (\Sigma v_i \mu_i)/(\Sigma v_i) \tag{23}$$

Observons que les variables ε_i sont centrées (espérance mathématique nulle) et effectuons la substitution. Il vient :

$$\Sigma v_i (m_i - \bar{m})^2 = \Sigma (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon} + \mu_i - \bar{\mu})^2 v_i . \tag{24}$$

Lorsque :

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = \mu ,$$

le second membre de l'équation (24) se réduit à $\Sigma v_i (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2$. La quantité $\Sigma v_i (m_i - \bar{m})^2$ est alors distribuée de la même façon que si toutes les variables étaient centrées, c'est-à-dire comme $\sigma^2 \chi^2_{k-1}$.

Il serait donc facile, comme nous l'avons annoncé, de tester l'hypothèse d'égalité des μ_i entre eux si σ était connu, le rapport de $\Sigma v_i (m_i - \bar{m})^2$ à σ^2 devant être distribué comme χ^2_{k-1} sous cette hypothèse.

En pratique, on ne connait qu'une estimation s de σ obtenue comme nous l'avons indiqué en III. a. Par analogie avec les tests de l'analyse de variance, il vient à l'esprit de former le rapport :

$$\frac{\Sigma v_i (m_i - \bar{m})^2}{s^2}$$

et de rechercher sa loi de distribution.

Cette idée trouve d'ailleurs sa justification dans le fait que σ intervient principalement dans la loi de distribution de s, comme un paramètre d'échelle, puisque la variance de s/σ est indépendante de σ comme le montre l'équation (14).

III. c. 2 - Test de l'hypothèse $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ lorsque σ est estimé.

Partant du fait que σ intervient comme un paramètre d'échelle dans la loi de s, nous allons assimiler la distribution de s^2 à celle de la variable $\sigma^2 \chi^2_d / d$, en choisissant le nombre de degrés de liberté d de façon appropriée. Comme nous connaissons l'écart type de s, nous allons poser que celui de la variable $\sigma \chi_d / \sqrt{d}$ lui est égal.

L'écart type de χ_d peut être calculé à partir de $E[\chi_d]$ et $E[\chi^2_d]$ par la formule classique :

$$V(\chi_d) = E[\chi^2_d] - (E[\chi_d])^2 \tag{25}$$

On sait que :

$$E[\chi^2_d] = d \tag{26}$$

Pour $E[\chi_d]$, on trouve :

$$E[\chi_d] = \frac{1}{2^{(d-2)/2}\,\Gamma(d/2)} \int_0^\infty e^{-\frac{\chi^2}{2}} \chi^d \, d\chi \tag{27}$$

$$= 2^{1/2} \, \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \tag{28}$$

La formule (28) n'est pas d'une utilisation commode et il n'y a pas d'inconvénient de principe à remplacer l'expression de $E[\chi_d]$ par une approximation puisque l'assimilation de la loi de s à la loi de $\sigma \chi_d/\sqrt{d}$ en est déjà une.

On connaît une bonne approximation de la fonction Γ grâce à la formule de Stirling :

$$\log \Gamma(x+1) = \frac{1}{2} \log(2\pi) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - x + \frac{1}{12\,x} - \frac{1}{360\,x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

On en tire [3] :

$$E[\chi_d] = \sqrt{d}\left(1 - \frac{1}{4\,d} + \frac{1}{32\,d^2} + \frac{5}{128\,d^3} + \dots\right)$$

d'où :

$$(E[\chi_d])^2 = d\left(1 - \frac{1}{2\,d} + \frac{1}{8\,d^2} + \frac{1}{16\,d^3} + \dots\right) \tag{29}$$

Des équations (25) (26) et (29), on tire :

$$V(\chi_d) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8\,d} - \frac{1}{16\,d^2} + \dots \tag{30}$$

On peut alors écrire la condition d'égalité de la variance de $\sigma\,\chi_d/\sqrt{d}$ à celle de s. En rapprochant les équations (13) et (30), on obtient :

$$\sigma^2/\Sigma\, w_i = (\sigma^2/d)\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{8\,d} = \frac{1}{16\,d^2} + \dots\right] \tag{31}$$

On voit que σ^2 disparaît et qu'on est conduit à résoudre l'équation en d :

$$\frac{2\,d}{1 - 1/4\,d - 1/8\,d^2 + \dots} = \Sigma\, w_i \tag{32}$$

Dès que $d \geqslant 5$, l'erreur que l'on commet en remplaçant le premier membre par $2d(1 + 1/4d)$ est négligeable. On peut alors résoudre l'équation et on obtient :

$$d = \frac{\Sigma\, w_i - 1/2}{2} \tag{33}$$

En général, ce nombre n'est pas entier et il faut l'arrondir pour que d soit assimilable à un nombre de degrés de liberté. Nous allons voir qu'en raison de l'usage que nous allons faire de s^2, il faut prendre pour valeur de d le plus grand entier inférieur ou égal à $(\Sigma\, w_i - 1/2)/2$.

En effet, la distribution de s^2 étant assimilée à celle de la variable aléatoire $\sigma^2\chi_d^2/d$ et celle de $\Sigma\, v_i(m_i - \bar{m})^2$ étant celle de la variable $\sigma^2\ \chi_{k-1}^2$ (cf. le paragraphe III. c. 1), on obtient le F de Snédécor en formant le rapport :

$$\frac{\Sigma\ v_i(m_i - \bar{m})^2}{(k - 1)\ s^2} \tag{34}$$

Vu les approximations faites, il est alors préférable d'attribuer à s^2 un nombre de degrés de liberté trop faible plutôt que trop élevé de façon à élever le seuil de signification. Le premier risque associé au test, c'est-à-dire celui de déclarer significatifs des écarts entre les m_i alors que $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$, ne peut que s'en trouver diminué.

IV - CALCUL D'INTERVALLES DE CONFIANCE POUR LES m_i ET POUR $\bar{m}$.

IV. a - Intervalles de confiance des m_i.

L'écart-type d'une estimation m_i déterminée est donné par la formule (6) mais, dans cette formule, σ n'est, en général, pas connu. On doit donc le remplacer par son estimation s basée sur l'ensemble des s_i. En assimilant, comme au paragraphe précédent, s^2 à la variable $\sigma^2\chi_d^2/d$ et en admettant la normalité de la distribution de m_i, on en déduit que le rapport de la variable centrée et normée $\frac{(m_i - \mu_i)\sqrt{N_i}}{\sigma G_i}$ à s/σ est distribué approximativement comme le t de Student avec un nombre de degrés de liberté d :

$$t = \frac{(m_i - \mu_i)\sqrt{N_i}}{s\ G_i} \tag{35}$$

L'équation (35) permet alors, soit de tester une hypothèse relative à μ_i, soit de construire un intervalle de confiance pour μ_i au seuil α :

$$m_i - t_\alpha\ G_i\ s/\sqrt{N_i} < \mu_i < m_i + t_\alpha\ G_i\ s/\sqrt{N_i} \tag{36}$$

IV. b - Intervalle de confiance pour la moyenne $\bar{m}$.

Au paragraphe III. c. 1 nous avons mis les variances des m_i sous la forme :

$$V(m_i) = \sigma^2/v_i \tag{37}$$

et la moyenne d'ensemble $\bar{m}$ se déduit des m_i par l'équation (19).

Cette équation permet de calculer $V(\bar{m})$:

$$\begin{aligned} V(\bar{m}) &= (\Sigma\ v_i^2\ V(m_i))/(\Sigma\, v_i)^2 \\ &= \sigma^2/(\Sigma\, v_i) \end{aligned} \tag{38}$$

En procédant comme au paragraphe IV. a, on peut former un intervalle de confiance pour

$$\bar{\mu} = \frac{\Sigma\ v_i\,\mu_i}{\Sigma\, v_i}$$

mais, en pratique, cet intervalle n'a de sens que si $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = \mu$, ce qu'il est possible de tester comme indiqué en III. c. 2. Dans ce cas, on déduit de l'équation (38) que $\frac{\bar{m} - \mu}{\sigma / \sqrt{\Sigma v_i}}$ est une variable normale réduite d'où il résulte que :

$$\frac{(\bar{m} - \mu)\sqrt{\Sigma v_i}}{s}$$

est distribué comme le t de Student avec d degrés de liberté. Ceci permet de former l'intervalle de confiance de μ au niveau α :

$$\bar{m} - t_\alpha \, s/\sqrt{\Sigma v_i} < \mu < \bar{m} + t_\alpha \, s/\sqrt{\Sigma v} \quad (39)$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J. ULMO - Annales des Mines (1952) n° III - IV.

[2] W. J. DIXON et A. M. MOOD - J. A. S. A. vol. 43 (1948).

[3] M. G. KENDALL et A. STUART - The advanced theory of Statistics. vol. I, p. 371-372.