Revue de statistique appliquée

J. Bayart

Ordonnancement d'une œuvre comprenant de multiples tâches avec des contraintes d'antériorité (méthode P.E.R.T.) (P.E.R.T. : Program Evaluation and Research Task). Présentation de la méthode sur un exemple simplifié

Revue de statistique appliquée, tome 14, nº 1 (1966), p. 5-17
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1966__14_1_5_0>

ORDONNANCEMENT
D'UNE ŒUVRE COMPRENANT DE MULTIPLES TACHES AVEC DES CONTRAINTES D'ANTÉRIORITÉ

(Méthode P.E.R.T.)

(P.E.R.T. : Program Evaluation and Research Task)

Présentation de la méthode sur un exemple simplifié

J. BAYART
Statisticien-conseil

1 - LES DONNEES ET L'OBJECTIF DE L'ETUDE

Pour réaliser une oeuvre complexe faisant appel au concours de divers spécialistes, de plusieurs entreprises, de plusieurs matériels de production, l'organisateur commence par demander à chacun des intervenants :

a) après quelles opérations (antériorités) il peut techniquement et/ ou matériellement commencer la tâche qui lui est demandée ;

b) quelle sera la durée (en jours, en heures) de la tâche dont il a la charge.

Pour l'exemple qui va être traité dans çette note, on a obtenu les renseignements ci-dessous :

Tableau I

Antériorités	Tâches	Durées (j)
-	a	7
a	b	5
a	c	11
a	d	6
abf	e	13
dbg	f	8
d	g	12
ac	h	7
ad	i	9
chi	j	3
d	k	15
c	l	20
dih	m	11
fgkj	n	15
bfkj	p	7
lmp	q	10

L'objectif qu'on se fixe ici (il en est d'autres) est l'établissement d'un programme de réalisation de l'oeuvre d'ensemble de <u>durée minimale</u> et, naturellement, compatible avec les contraintes d'antériorité.

2 - REDUCTION DES ANTERIORITES AUX SEULES ANTERIORITES STRICTEMENT IMMEDIATES

La relation "antérieur à" est une relation que les mathématiciens qualifient de "transitive". Cela signifie que :

$$\left.\begin{array}{l}\text{A antérieur à B}\\ \text{et} \quad \text{B antérieur à C}\end{array}\right\} \text{impliquent : A antérieur à C}$$

En ce cas, A, bien qu'antérieur à C, n'est pas immédiatement antérieur à C ; par contre (s'il n'y a aucun autre élément entre B et C) B est immédiatement antérieur à C.

Il arrive fréquemment que les participants à l'oeuvre d'ensemble signalent dans les antériorités à leur intervention, une ou plusieurs antériorités non immédiates.

Il est indispensable que l'organisateur fasse un tri de façon à savoir, à propos de chaque tâche, quelles sont les tâches qui lui sont <u>immédiatement</u> antérieures.

En pratique, on commence par repérer les tâches qui n'ont aucune antériorité (il peut y en avoir une seule ou plusieurs) puis celles qui n'ont comme antériorités que l'une ou plusieurs des tâches précédentes (tâches initiales) lesquelles sont nécessairement immédiatement antérieures :

Ainsi, <u>dans l'exemple</u> : (a) est la seule tâche initiale, puis (b), (c) et (d) ont une seule antériorité immédiate qui est (a).

Arrivé à ce stade, on parcourt la colonne des antériorités en examinant celles qui figurent devant les tâches non encore repérées : si l'on y trouve à la fois l'une des tâches (b), (c) ou (d), <u>et</u> la tâche (a), on élimine cette dernière car elle n'est pas "antériorité immédiate" :

<u>Dans l'exemple,</u> on est ainsi amené à éliminer (a) parmi les antériorités des tâches : (e), (h), (i).

On repère maintenant les tâches qui ont parmi leurs antériorités conservées une ou plusieurs tâches parmi les 3 seules tâches (b), (c), (d) : se trouvent ainsi repérées (h) et (l) ayant pour antériorité (c) ; (g), (i) et (k) ayant pour antériorité (d). On parcourt à nouveau la colonne des antériorités des tâches non encore repérées :

- si l'on y trouve à la fois soit (h), soit (l) <u>et</u> (c) ; on élimine (c) ;

- si l'on y trouve à la fois soit (g), soit (i), soit (k) <u>et</u> (d) : on élimine (d).

On continue ainsi systématiquement jusqu'à ce que toutes les tâches soient repérées. On arrive alors au tableau des antériorités strictement immédiates :

Tableau II

Antériorités strictement immédiates	Tâches
-	a
a	b
a	c
a	d
bg	e
bg	f
d	g
c	h
d	i
hi	j
d	k
c	l
ih	m
fkj	n
fkj	p
lmp	q
enq	-

La dernière ligne du tableau ci-dessus n'est pas obtenue par le filtrage décrit plus haut. On l'obtient en examinant quelles sont les tâches qui ne figurent pas dans la colonne "antériorités immédiates" : il s'agit évidemment des tâches finales, celles par lesquelles se termine l'oeuvre d'ensemble. En vue de boucler le circuit, on les porte ensemble (il peut n'y en avoir qu'une) en dernière ligne de la colonne "antér. strict imméd." et en face (dans la colonne "tâches") on note (-), c'est-à-dire "néant".

3 - TRACE ET RANG DES NOEUDS DU GRAPHE

Pour pouvoir continuer commodément l'étude et déterminer notamment la durée minimale de réalisation complète de l'oeuvre, on a recours à un procédé de visualisation appelé "graphe". Le graphe permet d'avoir une vue globale des tâches qui doivent se succéder et des tâches qui peuvent se faire simultanément.

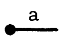
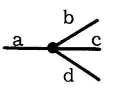
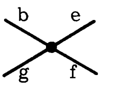
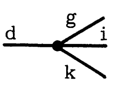
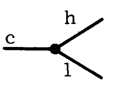
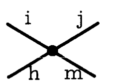
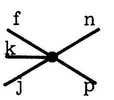
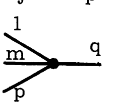
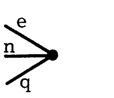
Le graphe est formé de segments (ou d'arcs) représentant chacun une tâche, et de noeuds (appelés parfois "étapes") représentant des niveaux d'avancement du programme.

Un noeud désigne le moment où plusieurs tâches simultanées peuvent démarrer ou bien le moment ou plusieurs tâches simultanées sont terminées. Sauf le noeud initial (qui n'indique que des démarrages de tâches) et le noeud final (qui n'indique que des fins de tâches), tous les autres noeuds sont à la fois indicateurs de fin de certaines tâches et de début de certaines autres tâches.

Avant de monter le graphe, il faut faire le tracé individuel de chacun des noeuds. Pour cela, on examine simultanément les deux colonnes du tableau II, ligne par ligne, et on place un noeud (c'est-à-dire un point ou un petit cercle) entre chaque groupe d'antériorités communes et chaque groupe de postériorités communes.

Cela donne pour l'exemple :

Tableau III

	Rangs des noeuds		
a seule tâche initiale, d'où noeud initial à sa gauche.		(0)	Aucune antér. au noeud
a antér. commun à b, c, d, d'où noeud intermédiaire entre a et b, c, d		(1)	Une antér., a, au noeud
b, g antér. communs tous deux à e, f		(3)	Une séquence de 3 antér. à ce noeud : a, d, g
d antérieur commun à g, i, k		(2)	Une séquence de 2 antér. à ce noeud : a, d
c antérieur commun à h, l		(2)	Une séquence de 2 antér. à ce noeud : a, c
i, h antér. communs tous deux à j, m		(3)	Deux séquences de 3 antér. à ce noeud : a, d, i et a, c, h
f, k, j antér. communs tous trois à n, p		(4)	Trois séquences de 4 antér. à ce noeud, notamment : a, d, g, f
l, m, p antér. communs tous trois à q		(5)	Au moins une séquence de 5 antériorités : a, d, g, f, p
e, n, q tâches finales d'où noeud final à leur droite.		(6)	Au moins une séquence de 6 antériorités : a, d, g, f, p, q

Le tableau III donne, dans la colonne de gauche le tracé des divers noeuds avec tous commentaires utiles dans la marge de gauche.

Pour déterminer le rang de chacun des noeuds, on applique la règle suivante : Un noeud est de rang x s'il est précédé au maximum d'une séquence de x tâches antérieures, celles-ci étant comptées à partir du noeud initial (lequel est évidemment de rang zéro).

Ainsi le 2ème noeud du tableau III est de rang (1) car il n'est précédé que d'une seule tâche a. Le 3ème noeud de ce tableau ne peut être doté tout de suite d'un rang, car la tâche g ne débute pas à un noeud de rang actuellement connu. On passe un noeud suivant qui est de rang (2) car la seule tâche antérieure débute à un noeud déjà classé (le 2ème du tableau) qui est de rang (1) et comme il y a une tâche de plus (qui est d) ce 4ème noeud est de rang (2). Même raisonnement et même conclusion - rang (2) - pour le 5ème noeud du tableau.

On peut maintenant revenir au 3ème noeud qui avait été passé provisoirement : l'antériorité b sort d'un noeud de rang (1) et l'antériorité g sort d'un noeud de rang (2), il en résulte que ce 3ème noeud est de rang (2) + (1) = (3).

Les rangs des autres noeuds se déterminent de la même façon. Les résultats complets figurent dans la colonne de droite du tableau III, avec commentaires dans la marge de droite.

4 - TRACE DU GRAPHE

Le tableau III montre qu'il y a au total 7 rangs possibles pour les noeuds : de (0) à (6).

Pour construire le graphe, on prend une feuille de papier quadrillé et on trace à la partie supérieure 7 verticales numérotées de gauche à droite (0), (1), (2), ..., (6) avec un espacement constant entre verticales consécutives.

On reproduit sur ces verticales les différents noeuds, les noeuds de rang (2), par exemple, étant tracés l'un au-dessous de l'autre sur la verticale de n° (2), et ainsi de suite. Voir le détail sur la partie supérieure de la planche ci-après.

La construction du graphe proprement dit est maintenant chose aisée. Il s'agit de joindre les différents noeuds par des segments figurant les diverses tâches, de telle façon que chaque segment commence au noeud convenable et se termine au noeud convenable ; ce montage est analogue à l'emboîtage des tubes d'armature d'une tente de camping dans les éclisses de raccordement.

On n'obtient pas toujours du premier jet un tracé parfaitement satisfaisant du point de vue de la clarté. On peut améliorer celle-ci en déplaçant verticalement certains noeuds, ou en permutant deux noeuds qui se trouvent sur la même verticale. Il est recommandé d'éviter (dans la mesure du possible !) les intersections intempestives des segments (c'est-à-dire les intersections sans noeud).

On est arrivé ainsi au graphe tracé sur la planche ci-contre.

5 - DUREE MINIMALE DE REALISATION DE L'OEUVRE. SEQUENCE DES TACHES CRITIQUES

Dans ce qui suit les temps seront exprimés en jours, aussi bien en ce qui concerne les durées qu'en ce qui concerne les dates. Pour les dates, celle de début de la tâche initiale sera conventionnellement désignée par jour 0 (zéro) et les autres dates seront repérées à partir de cette origine.

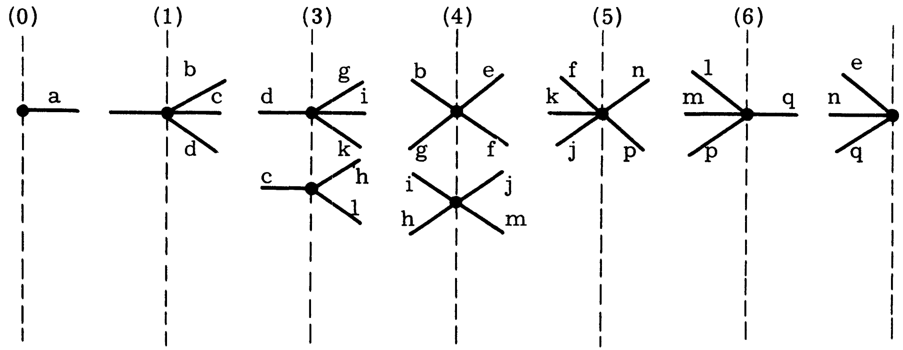
a) Date d'arrivée "au plus tôt" à chacun des noeuds

Dire que l'on est arrivé à un noeud, c'est dire que toutes les tâches antérieures à ce noeud ont été exécutées ; s'il y a plusieurs séquences de tâches antérieures aboutissant en un noeud de numéro donné, c'est la

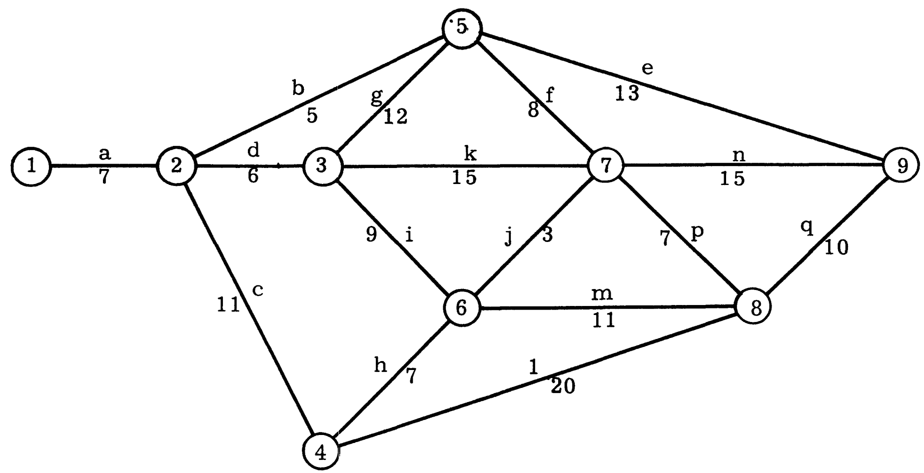
1ère Planche : Construction du graphe

Rang des Noeuds :

Noeuds classés par rang :



GRAPHE



(on a indiqué au-dessous de chaque segment la durée de la tâche représentée) durée totale de la séquence la plus longue qui donne la date d'arrivée "au plus tôt" à ce noeud. Chaque noeud possède une "date d'arrivée au plus tôt" qu'il est obligatoire de calculer. On notera cette date T_1^c pour le noeud n° 1, T_2^c pour le noeud n° 2, etc... (l'indice c noté en haut, initiale du mot "court", rappellera qu'il s'agit de date "au plus tôt").

Pour calculer les T^c on procède d'amont en aval, en traitant les noeuds de rang 1, puis ceux de rang 2, etc...

Pour le noeud n° 1, on a par convention : $T_o^c = 0$; Pour le noeud n° 2, la seule antériorité étant a = 7 jours, on a $T_2^c = 7$; pour le noeud n° 3, on a : $T_3^c = T_2^c + d = 7 + 6 = 13$; de même $T_4^c = T_2^c + c = 7 + 11 = 18$.

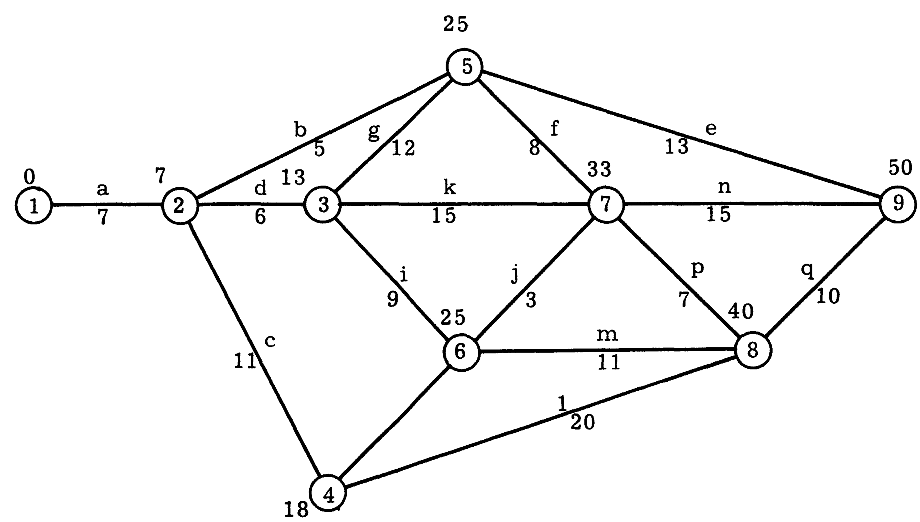
Pour le noeud n° 5 qu'on atteint en venant soit du noeud n° 2, soit du noeud n° 3, on calcule les deux sommes : $T_2^c + b = 7 + 5 = 12$, et $T_3^c + g = 13 + 12 = 25$ et c'est évidemment la plus forte des deux qui est la date d'arrivée "au plus tôt" en ce noeud n° 5, donc $T_5^c = 25$.

On continue de même pour tous les autres noeuds, jusqu'au noeud final pour lequel on trouve $T_9^c = 50$.

Cette date d'atteinte au plus tôt du noeud final (50ème jour) nous fournit la durée minimale de réalisation de l'oeuvre qui sera de 50 jours, toutes tâches nécessaires effectuées.

Reproduction du graphe avec indication des "Dates d'arrivée au plus tôt" aux noeuds"

(ces dates sont indiquées au-dessus des noeuds, légèrement à gauche (côté amont)



b) Date de départ "au plus tard" de chacun des noeuds

Si l'on se représente le graphe comme un réseau de routes permettant de se rendre de la ville n° 1 (noeud initial) à la ville n° 9 (noeud final) en passant par certaines villes intermédiaires (autres noeuds) mais en se déplaçant toujours de la gauche (amont) vers la droite (aval), il est évident qu'il y a maintes façons d'aller du n° 1 au n° 9. A chaque façon correspond ce qu'on appelle un chemin. Il y a notamment un chemin qui est plus long que tous les autres. Ce chemin est appelé "chemin critique".

En réalité, le graphe ne représente pas un réseau routier mais un ensemble de tâches qu'il faut toutes effectuer. Il n'en reste pas moins que c'est la somme des durées des tâches se trouvant sur le chemin critique qui donne la durée minimale de réalisation de l'oeuvre.

A l'expression "chemin critique" on substituera l'expression de "séquence critique", laquelle est constituée de "tâches critiques" et passe par les "noeuds critiques".

La détermination de la "séquence critique" est capitale pour l'ordonnancement. Pour l'obtenir on commence par calculer les dates de "départ au plus tard" de chacun des noeuds.

On a vu que la durée minimale de réalisation de l'oeuvre est de 50 jours. Supposons que nous ayons l'intention de réaliser effectivement cette oeuvre en ce temps minimum de 50 jours. Cette décision va entraîner l'obligation de partir de chacun des noeuds précédant le dernier à une certaine date "au plus tard", faute de quoi la durée totale fixée serait dépassée. Ces "dates de départ au plus tard" seront notées T^1_8, T^1_7, ..., pour les noeuds n° 8, n° 7, ... (l'indice 1, initiale du mot "long", rappellera qu'il s'agit de date "au plus tard").

Pour calculer les T^1 on procède d'aval en amont : noeud n° 8, noeud n° 7, ...

Pour le noeud final n° 9, on a par convention $T^1_9 = 50$ (temps total consenti). Pour le noeud n° 8, on a : $T^1_8 = T^1_9 - q = 50 - 10 = 40$; en effet il faut quitter le noeud n° 8 au plus tard le 40ème jour si l'on veut arriver au noeud n° 9 le 50ème, car entre temps il faut effectuer la tâche q qui prend 10 jours.

Pour le noeud n° 7 qui précède, par une seule tâche, à la fois le noeud n° 9 et le noeud n° 8, on calcule les deux différences :

$$T^1_9 - n = 50 - 15 = 35 \quad \text{et} \quad T^1_8 - p = 40 - 7 = 33$$

et c'est évidemment le résultat le plus faible qui donne la "date de départ au plus tard" du noeud n° 7, soit $T^1_7 = 33$; en effet ce n'est que si l'on quitte le noeud n° 7 au plus tard le 33ème jour que l'on pourra arriver au noeud final au 50ème jour, ayant effectué entre temps les tâches p et q qui exigent 7 + 10 = 17 jours.

On continue de même pour tous les autres noeuds jusqu'au noeud initial où $T^1_0 = 0$.

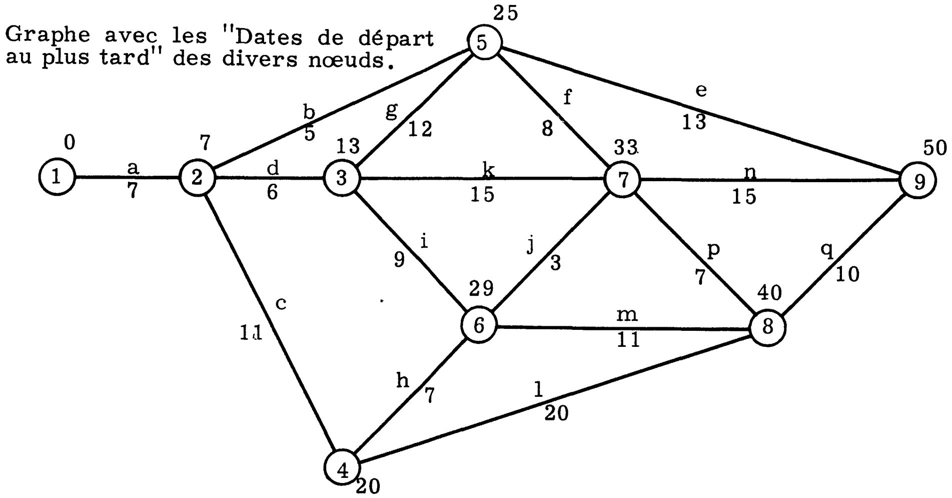
c) Battement toléré en chacun des noeuds. Séquence des tâches critiques

En comparant pour chaque noeud sa "Date d'arrivée au plus tôt : T^c " et sa "Date de départ au plus tard : T^1" (dates obtenues aux paragraphes a/ et b/ ci-dessus et que l'on a reportées sur la 2ème planche, ci-après page), on constate que pour certains noeuds ces deux dates coïncident, tandis que pour d'autres elles diffèrent.

Les noeuds pour lesquels les dates T^c et T^1 sont identiques, doivent être quittés dès qu'ils sont atteints, sinon la durée totale minimale de l'oeuvre sera dépassée : ces noeuds sont critiques, ils ne tolèrent aucun battement.

Graphe avec les "Dates de départ au plus tard" des divers noeuds"

(ces dates sont indiquées au-dessus des noeuds, légèrement à droite, côté aval)



Les noeuds pour lesquels les dates T^c et T^1 sont différentes sont atteints à une date T^c mais ne doivent être quittés (au plus tard) qu'à une date T^1 postérieure à T^c : ces noeuds (non critiques) tolèrent un certain "battement" égal à la différence entre la "Date de départ au plus tard" et la "Date d'arrivée au plus tôt".

Pour l'exemple étudié, on voit sur la 2ème planche, que :

le noeud n° 4 tolère un battement : $B_4 = T_4^1 - T_4^c = 20 - 18 = 2$ jours;

le noeud n° 6 tolère un battement : $B_6 = T_6^1 - T_6^c = 29 - 25 = 4$ jours;

tous les autres noeuds sont critiques.

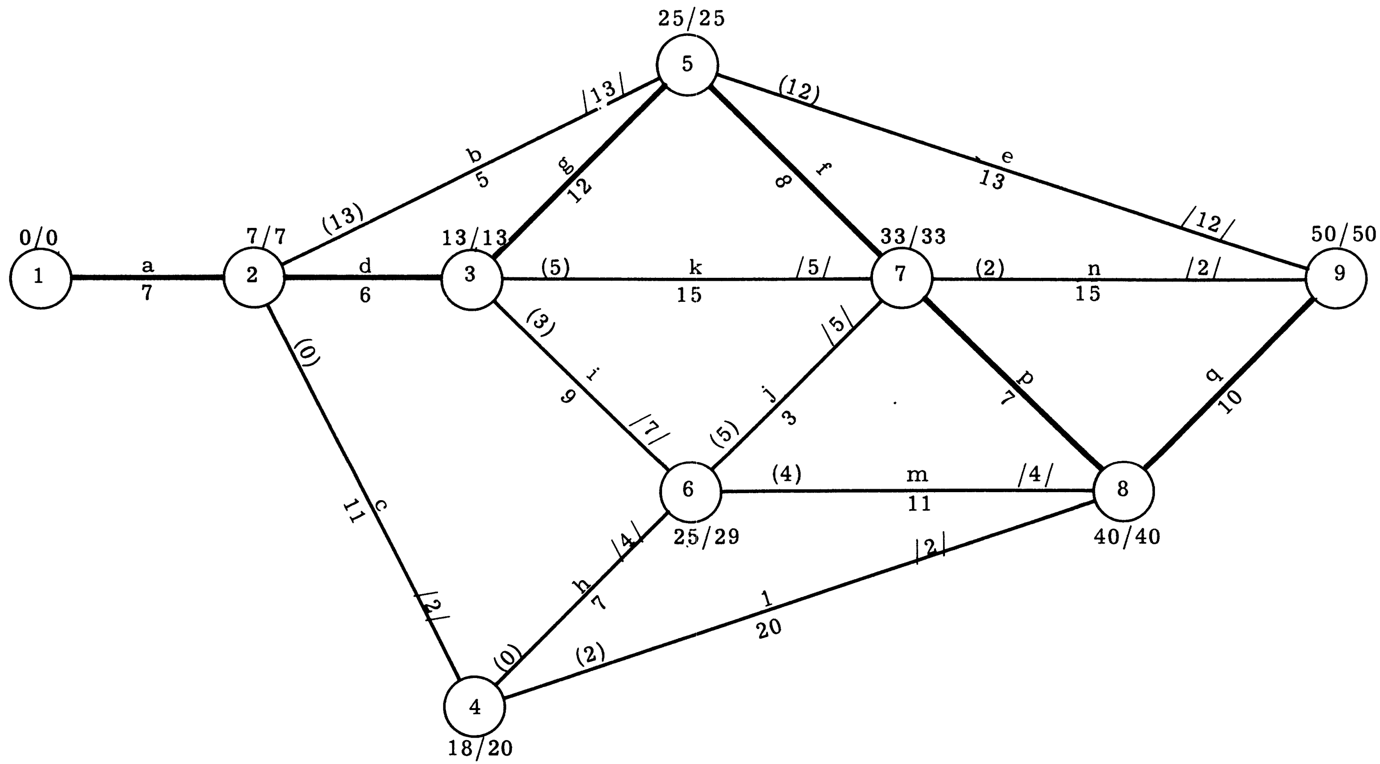
Sur cette 2ème planche, on a indiqué entre () au-dessus de chaque noeud (non critique) le battement toléré.

On obtient maintenant la SEQUENCE DES TACHES CRITIQUES en joignant d'amont en aval les noeuds critiques consécutifs dans l'ordre de succession naturelle des dates T^c.

Ici, la séquence critique passe par les noeuds de n° : 1-2-3-5-7-8-9, d'où les tâches critiques, qui s'insèrent entre ces noeuds : a d g f p q.

Sur la 2ème planche, la séquence des tâches critiques a été marquée d'un trait fort.

2ème Planche : Graphe complètement analyse



6 - MARGE LIBRE ET MARGE TOTALE RELATIVES A CHACUNE DES TACHES

Rappelons que c'est la durée totale des tâches critiques (constituant la "séquence critique") qui donne la durée minimale de réalisation de l'oeuvre.

Il en résulte - outre le fait que les noeuds critiques n'ont aucun battement - que les tâches critiques ne disposent d'aucune marge : le moindre retard au démarrage d'une tâche critique (ou le moindre allongement de sa durée prévue) entraîne un recul égal de la date d'achèvement de l'oeuvre.

Par contre les tâches non critiques disposent quant à leur démarrage (ou quant à leur durée prévue) de certaines marges calculées ci-dessous.

a) "Marge libre" de chaque tâche non critique

Prenons comme exemple la tâche i : sa durée prévue est $t_i = 9$, elle ne peut débuter au plus tôt qu'à la date au plus tôt de son noeud-amont, c'est-à-dire à la date $T_3^c = 13$, en conséquence la tâche i peut être terminée au plus tôt à la date : $T_3^c + t_i = 13 + 9 = 22$; or, la date au plus tôt de son noeud-aval n'est que $T_6^c = 25$ (ceci provient du fait qu'il y a au moins une séquence de tâches plus longue aboutissant à ce noeud-aval n° 6), il en résulte que la tâche i dispose d'une marge libre égale à $25 - 22 = 3$ jours.

La "marge libre" d'une tâche est un retard toléré au démarrage de cette tâche (ou un temps d'interruption en cours d'exécution, ou un allongement de la durée d'exécution prévue) qui n'entraîne aucune modification du calendrier des tâches en aval et notamment aucun recul de la date d'achèvement de l'oeuvre.

En pratique, on calcule la marge libre d'une tâche insérée entre un noeud-amont et un noeud aval, par la formule :

$$r = (T^c_{aval} - T^c_{amont}) - t$$

Exemple : tâche i $\qquad r_i = (T_6^c - T_3^c) - t_i = (25 - 13) - 9 = 3$

Autre exemple : tâche c : $\qquad r_c = (T_4^c - T_2^c) - t_c = (18 - 7) - 11 = 0$

Ce 2ème exemple montre qu'une tâche non critique peut très bien avoir une "marge libre" nulle, ce qui signifie qu'on ne peut retarder sa date de démarrage sans modifier le calendrier de certaines tâches en aval. Cependant, si l'on consent à faire ces modifications en aval, on peut - tout en sauvegardant la date d'achèvement de l'oeuvre - attribuer aux diverses tâches non critiques une autre sorte de marge, appelée "marge totale".

b) "Marge totale" de chaque tâche non critique

Si l'on veut respecter la date d'achèvement au plus tôt de l'oeuvre (ici 50ème jour), il est impératif de quitter chacun des noeuds à "la date de départ au plus tard" notée T^1. La différence, appelée "battement", entre la date T^1 et la "date d'arrivée au plus tôt" T^c relatives à un même noeud, représente le retard maximum admissible pour l'ensemble des tâches en aval du noeud considéré sans que la date d'achèvement de l'oeuvre soit modifiée.

Prenons par exemple la tâche i : son noeud-aval dispose d'un battement B_6 = 4 et on vient de voir que cette tâche disposait d'une marge libre de r_i = 3. Si cette tâche prend un retard maximum égal à sa marge libre (donc 3 jours) : rien à modifier au calendrier des tâches en aval. Mais si le retard vient à dépasser ces 3 jours de marge libre, on peut encore sauvegarder la date d'achèvement global en décalant certaines tâches en aval jusqu'à concurrence de 5 jours, durée égale au battement du noeud-aval.

On dispose donc pour la tâche i d'une "marge totale" de 3 + 4 = 7 jours ce que l'on peut écrire : $R_i = r_i + B_6$

et, plus généralement, pour une tâche quelconque : $R = r + B_{aval}$

Sur la 2ème planche (page 14), on a indiqué sur chaque segment représentant une tâche non critique, d'une part entre (.) la marge libre r, d'autre part entre /./ la marge totale R.

7 - CALENDRIER DE L'ENSEMBLE DES TRAVAUX (DIAGRAMME DE GANTT)

Ce calendrier permet de suivre dans le temps les tâches simultanément en cours, de surveiller les dates de démarrage diverses et les durées d'exécution prévues (tout spécialement pour les tâches critiques), de voir les marges libres et les dépassements de celles-ci jusqu'à concurrence des marges totales et, dans ce dernier cas, indique les modifications de calendrier des tâches en aval.

On le construit facilement en mettant d'abord en place sur une bande (centrale de préférence) la séquence des tâches critiques ; puis on représente sur des bandes parallèles les autres tâches, avec des verticales montrant les enclanchements ou signalant les butées-aval (dates de fin au plus tard).

Par exemple, on y voit (planche 3ème) que la tâche b ne peut débuter qu'après 7 jours (fin de la tâche critique a) et, comme sa durée propre est de 5 jours, elle pourra être terminée (si elle débute dès que possible) fin du 12ème jour. Cette tâche b dispose d'une marge libre de 13 jours (qui est aussi sa marge totale) jusqu'à la butée de raccordement au 25ème jour avec le début de la tâche critique f.

On voit clairement aussi que la tâche i dispose d'une marge libre de 3 jours entre le 22ème et le 25ème jour, et, en repoussant les tâches aval j et m (ce qui permet de récupérer encore 4 jours, jusqu'à ce que m arrive à la butée du 40ème jour) d'une marge totale de 3 + 4 = 7 jours.

Remarque finale

Dans cette note introductive à la méthode PERT, on a volontairement évité diverses difficultés (contraintes spéciales, durées aléatoires des tâches) auxquelles cette méthode est parfaitement capable de faire face.

3ème planche : Diagramme de Gantt (calendrier)